

非線形放物型方程式について

早大 理工学部 井上 弘
石井仁司
堤 正義

§ 1 Introduction

ある種の化学反応や、制御されていない原子核分裂等を記述している次の方程式の初期値境界値問題について考察する。

$$(1.1) \quad u_t(t, x) = \Delta u(t, x) + u^2(t, x) \quad (t, x) \in [0, T] \times \Omega$$

$$(1.2) \quad u(0, x) = u_0(x) \quad x \in \Omega$$

$$(1.3) \quad u(t, x) = 0 \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega.$$

ここで $u_t(t, x)$ は $u(t, x)$ の t に関する偏微分, Δ は R^n における laplacian operator, Ω は R^n における有界領域で滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつものとする。(1.1), (1.2), (1.3) の解 $u(t, x)$ は $u_0(x)$ のある意味での大きさにより、時間に関して global に存在するか、又は有限時間で blow up することが知られている。(Tsutsumi [1], Lions [5], 他)

§2 では, どのような条件で解 $u(t, x)$ が global に存在するか, blow up するかを述べる. §3 では (1.1) を安定化した方程式 (3.1) の解 $u_\varepsilon(t, x)$ を用いて $u(t, x)$ の近似を行なう. §4 では特に空間次元を 1 次元として $u(t, x)$ の blowing up time t_b を評価する. §5 では, やはり空間次元として, (1.1) の安定化方程式 (3.1) を差分化し, 差分近似式の安定性と誤差の評価を行なう.

§2. global solution と blow up solution

最初に関数空間を定義する

定義: $L^p(\Omega) = \{u \mid (\int_{\Omega} |u(x)|^p dx)^{1/p} < +\infty\} \quad 1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_p = (\int_{\Omega} |u(x)|^p dx)^{1/p} \quad \text{特に } \|u\| = \|u\|_2$$

$H_0^1(\Omega) : C_0^\infty(\Omega)$ のノルム $\|u_x\|$ による完備化

$C^k([0, T]; X) \quad (X: \text{Banach sp})$

: X -valued の k 回連続的微分可能な関数の作る Banach sp. 特に $C^0([0, T]; X) = C([0, T]; X)$

Lemma 2.1. 任意の $f \in H_0^1(\Omega)$ に対して, ある定数 $C_1 > 0$ が存在し, 次の不等式が成立する.

$$\|f\| \leq C_1 \|f_x\|, \quad \|f\|_3 \leq C_1 \|f_x\|.$$

Lemma 2.2. $C_2 = (\text{measure}(\Omega))^{1/6}$ とする. 任意の $f \in L^3(\Omega)$ に対し,

$$\|f\| \leq C_2 \|f\|_3$$

が成り立つ.

Theorem 2.1. (local existence) 任意の $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ に対し, ある $T_1 > 0$ が存在し, $[0, T_1]$ 上で, 初期値境界値問題 (1.1)-(1.3) は一意的な解 $u(t, x) \in C([0, T_1]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T_1]; L^2(\Omega))$ を持つ. 更に, $u_0(x) \geq 0$ a.e. in Ω ならば, $u(t, x) \geq 0$ a.e. in Ω .

証明. Segal [2] を参照.

そこで,

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u_x\|^2 - \frac{1}{3} \|u\|_3^3, \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

$$K(u) = \|u\|_3^3 - \|u_x\|^2$$

$$d = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda u)$$

とおく

Lemma 2.3. $d > 0$.

Lemma 2.4.

$$(2.1) \quad \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + J(u(t)) = J(u_0).$$

Theorem 2.2 (global existence)

$\overline{W}_S = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid J(u) < d, K(u) < 0\}$ とする.

$u_0 \in \overline{W}_S$ ならば, 初期値・境界値問題 (1.1)-(1.3) の解 $u(t, x)$ は global に存在し, $u(t, x) \in \overline{W}_S$ for all t . さらに, この時 $\|u(t)\|$ は $t \rightarrow \infty$ で exponentially に decay する.

Lemma 2.5.

$u \in \widetilde{W}_s = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid J(u) \leq d_0 < d, K(u) < 0\}$ ならば, d_0 に依存する定数 $\delta = \delta(d_0)$ ($0 < \delta < 1$) が存在して

$$K(u) < -\delta \|u_x\|^2.$$

Theorem 2.2 の証明. 解の存在については Tsutsumi [1] を見よ.

$\|u(t)\|$ が exponentially に decay することを示そう. (1.1) 式に $u(t, x)$ を乗じて積分すれば,

$$(2.2) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 = K(u).$$

Lemma 2.4 から

$$J(u(t)) \leq J(u_0)$$

したがって $d_0 = J(u_0)$ として Lemma 2.5 を用いれば, $u \in \widetilde{W}_s$ で

$$K(u(t)) < -\delta \|u_x(t)\|^2.$$

これと, Lemma 2.1 を用いれば, ある正の定数 C が存在して

$$(2.3) \quad K(u(t)) < -C \|u(t)\|^2.$$

従って, (2.2) から $\|u(t)\|$ は exponentially に decay する.

証明終り.

Theorem 2.3. (blow up solution)

$$\overline{W}_b = \{u \mid J(u) < d, K(u) > 0\} \text{ とおく.}$$

$u_0 \in \overline{W}_b$ ならば, 初期値問題 (1.1)–(1.3) の解 $u(t, x)$ は有限時間で blow up する.

証明. $t_b = \sup T$ such that $u(t, x) \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$

とおく. この時 $\forall t \in [0, t_b)$ に対して

$$u(t, x) \in \overline{W}_b$$

となる (証明は Theorem 2.2 と同様 Tsutsumi [1] 参照).

Lemma 2.6.

M を正の定数とする

$$u \in \widehat{W}_b = \{ u \in H_0^1(\Omega) \mid J(u) \leq d_0 < d, 0 < K(u) < M \}$$

ならば, d_0 に依存する定数 $\delta = \delta(d_0)$ が存在して

$$K(u) > \delta \|u_x\|^2 \quad (\delta > 0).$$

Theorem 2.3 の証明の続き.

$J(u) < d$ と $0 < \|u_x\|^2 < \|u\|_3^3$ から, もし $\|u\|_3^3 \geq 12d$ ならば

$$(2.4) \quad \|u_x\|^2 \leq \frac{5}{6} \|u\|_3^3$$

もし, $\|u\|_3^3 \leq 12d$ ならば, Lemma 2.6 ($d_0 = J(u_0)$) が使えて

$$(2.5) \quad K(u) > \delta \|u_x\|^2$$

いずれにしても,

$$(2.6) \quad K(u) > \min\left(\frac{1}{6}, \delta\right) \|u_x\|^2$$

となり, Lemma 2.1 と (2.2) 式 から

$$(2.7) \quad \|u(t)\|^2 \geq e^{C_3 t} \|u_0\|^2 \quad t \in [0, t_b)$$

が成り立つ. ここで C_3 は正の定数.

$$\text{一方} \quad \frac{d}{dt} \|u\|^2 = 2 \|u\| \frac{d}{dt} \|u\| = 2(u, u_t) \leq 2 \|u\| \|u_t\|$$

を用いれば

$$(2.8) \quad \frac{d}{dt} \|u(t)\| \leq \|u_t(t)\|. \quad \text{従って,}$$

$$(2.9) \quad \|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|u_t(s)\| ds \leq \|u_0\| + \sqrt{t} \left(\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \right)^{1/2}.$$

(2.6) を用いて (2.9) を書き変えると

$$(2.10) \quad t \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \geq \|u_0\|^2 (e^{c_3 t} - 2) \quad t \in [0, t_0]$$

となる。ここで

$$(2.11) \quad I(t) = \int_{t_0}^t \|u(s)\|^2 ds + (T_0 - t) \|u(t_0)\|^2 + \gamma(t + \tau)^2 \\ t \in [t_0, T_0]$$

とおく。但し $0 < t_0 < T_0 < t_b$, $\tau > 0$, $\gamma > 0$, (γ, τ は後で決める。)

$$(2.12) \quad I'(t) = \|u(t)\|^2 - \|u(t_0)\|^2 + 2\gamma(t + \tau) \\ = \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \|u(s)\|^2 ds + 2\gamma(t + \tau)$$

$$(2.13) \quad I''(t) = 2(u(t), u_t(t)) + 2\gamma \\ = -2\|u_x\|^2 + 2\|u\|_3^3 + 2\gamma \\ = 6 \int_{t_0}^t \|u_t(s)\|^2 ds + \|u_x\|^2 - 6J(u(t_0)) + 2\gamma$$

(2.7) を用いて $(I'(t))^2$ を計算すれば

$$(2.14) \quad (I'(t))^2 \leq 4I(t) \left(\int_{t_0}^t \|u_t(s)\|^2 ds + \gamma \right)$$

を得る。(2.13) より次の式を得る。

$$(2.15) \quad I(t) \cdot I''(t) \geq \frac{3}{2}(I')^2 - 4\left(\gamma + \frac{3}{2}J(u(t_0))\right) \cdot I(t).$$

(2.3) 及び (2.10) より $J(u(t))$ は次の様に存る,

$$(2.16) \quad -J(u(t)) = -J(u_0) + \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \\ \geq \frac{1}{t} \|u_0\|^2 (e^{c_3 t} - 2) - J(u_0), \quad t \in [0, t_0].$$

従って $0 \leq t_0 < t_b$ を $J(u(t_0)) < 0$ とするようによりに固定

できる. 更に $\sigma = -\frac{3}{2} J(u(x_0))$ とすれば (2.15) より

$$(2.17) \quad I(t) \cdot I''(t) \geq \frac{3}{2} (I')^2$$

$$(2.18) \quad (I^{-\frac{1}{2}})'' \leq 0$$

となる. 故に

$$(2.19) \quad I(t) \geq I^3(x_0) \left\{ I(x_0) - \frac{1}{2} (t-x_0) I'(x_0) \right\}^{-2}.$$

$$I(t) < +\infty, \quad t \in [x_0, T_0] \quad \text{より} \quad I(x_0) - (T_0 - x_0) I'(x_0) > 0$$

でなり得る存在しない. (2.12) より

$$(2.20) \quad T_0 - x_0 < I(x_0)/I'(x_0) < +\infty.$$

$$T_0 < x_b) \quad \text{は任意をかき} \quad t_b \leq x_0 + I(x_0)/I'(x_0) < +\infty$$

よって $u_0 \in W_b$ に対する解 $u(t, x)$ は有限時間で

blow up する.

証明終り.

§ 3 $u(t, x)$ の近似

(1.1) を定式化した次の式を考える。

$$(3.1) \quad u_t = \Delta u + u^2 - \varepsilon u^3 \quad x \in \Omega$$

$$(3.2) \quad u(0, x) = u_0(x) \geq 0 \quad x \in \Omega$$

$$(3.3) \quad u(t, x) = 0 \quad x \in \partial\Omega$$

ここで ε は小さな正の定数とする. もし $0 \leq u_0(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}$,

$u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ ならば (3.1), (3.2), (3.3) の解 $u_\varepsilon(t, x)$ は t

に関して global に存在しかつ

$$(3.4) \quad 0 \leq u_\varepsilon(t, x) \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad u_\varepsilon(t, x) \in C([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \cap$$

$$C^1([0, \infty); L^2(\Omega))$$

を満たす。(Lions [5])

Lemma 3.1 (3.1), (3.2), (3.3) の解 $u_\varepsilon(x, t)$ は ε に関して monotone decreasing である。

証明. $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ として $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に対する解をそれぞれ $u_{\varepsilon_1}(x, t), u_{\varepsilon_2}(x, t)$ とすると

$$(3.5) \quad u_{\varepsilon_1 t}(x, t) > \Delta u_{\varepsilon_1}(x, t) + u_{\varepsilon_1}^2(x, t) - \varepsilon_2 u_{\varepsilon_1}^3(x, t)$$

が成立し, 比較定理により $u_{\varepsilon_1}(x, t) \geq u_{\varepsilon_2}(x, t)$ を得る。

Q. E. D.

Theorem 3.1 $u(T_0, x) < +\infty$ なるよう T_0 を固定する。

任意の $(x, t) \in [0, T_0] \times \Omega$ に対し $u_\varepsilon(x, t)$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ で一様に $u(x, t)$ へ収束する。

証明. (3.4) と Ascoli-Arzelà の定理より明らか。

証明終り。

定義 (3.1) の steady state solution とは (3.1) を満たして時間微分が 0 となるものでかつ非負に存在ものを言う。特に $S_\varepsilon(x)$ で non-trivial なものを表わす。

Theorem 3.2 $S_\varepsilon(x)$ は unstable な steady state solution であり, $u(x, t) \equiv 0, \frac{1}{\varepsilon}$ は asymptotically stable steady state solution である。つまり

$$\frac{1}{\varepsilon} \geq u_0(x) > \lambda S_\varepsilon(x) \quad (\lambda > 1) \text{ ならば } u_\varepsilon(x, t) \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \text{ as } t \rightarrow \infty$$

$$0 \leq u_0(x) \leq \lambda S_\varepsilon(x) \quad (\text{as } \lambda < 1) \quad \text{なすは} \quad u_\varepsilon(x) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty$$

となる。

証明 $u = \lambda S_\varepsilon$ λ : constant とする

$$(3.6) \quad \Delta u + u^2 - \varepsilon u^3 = \lambda(\lambda - 1)(1 - \varepsilon(\lambda + 1)S_\varepsilon)S_\varepsilon^2.$$

ε : 十分小より $\lambda > 1$ なすは (3.6) の右辺は正,
 $0 < \lambda < 1$ なすは負となる。一方 $u \equiv \frac{1}{\varepsilon}$ は (3.1) を満たす。
 1. 境界では $u > 0$ より $u \equiv \frac{1}{\varepsilon}$ は

$$(3.7) \quad \Delta u + u^2 - \varepsilon u^3 = 0$$

(3.3) の upper solution である。同様に $u \equiv 0$ は lower solution である。

$\lambda > 1$ のとき $u = \lambda S_\varepsilon$ は (3.7), (3.1) の lower solution となり,
 $\lambda S_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon}$ より $u \equiv \frac{1}{\varepsilon}$ は asymptotic stable solution となる。同様に $0 < \lambda < 1$ のとき
 $u = \lambda S_\varepsilon$ は upper solution となり $\lambda S_\varepsilon > 0$ より
 $u \equiv 0$ は asymptotic stable solution となる。それ故
 S_ε は unstable steady state solution である。以上により定理は証明された。(Sattinger [6])

系. $\varepsilon_1 < \varepsilon$ と ($S_{\varepsilon_1}(x) < \frac{1}{\varepsilon}$ なすは $u_{0\varepsilon}(x) = S_{\varepsilon_1}(x)$)
 とおけば $u_\varepsilon(x) \rightarrow \frac{1}{\varepsilon}$ as $x \rightarrow \infty$.

$\varepsilon_2 > \varepsilon$ とすれば $S_{\varepsilon_2}(x)$ から出発する (3.1) の解は $x \rightarrow \infty$ で 0 に decay する。

§ 4 t_b の評価

この § では空間次元を 1 次元とする。 (1.1), (1.2), (1.3) を一次元化した次の式を考える。

$$(4.1) \quad u_t(x) = u_{xx}(x) + u^2(x) \quad (x) \in [0, T] \times [-1, 1]$$

$$(4.2) \quad u(0, x) = u_0(x) \geq 0 \quad x \in [-1, 1]$$

$$(4.3) \quad u(x, -1) = u(x, 1) = 0$$

$u_0(x)$ がある意味で大きければ解 $u(x, t)$ は有限時間で blow up する (Theorem 2.3)。ここで t_b を $u_0(x)$ のみから評価するために (3.1) を 1 次元にした次の式を考える。

$$(4.4) \quad u_t(x, x) = u_{xx}(x, x) + u^2(x, x) - \varepsilon u^3(x, x)$$

(4.4), (4.2), (4.3) の解 $u_\varepsilon(x, x)$ は Lemma 3.1 より

$$(4.5) \quad u_\varepsilon(x, x) < u(x, x) \quad (x, x) \in [0, t_0] \times [-1, 1]$$

但し $t_0 > t_b$ とし $t \in [t_b, t_0]$ に対しては $u(x, x) = \infty$ とし不等式を成立させる。

Lemma 4.1 $v = \{M(1-x^2)^\alpha\}^{\zeta(t)}$ とおく

$$(4.6) \quad \text{但し } \zeta(t) = \gamma t_0 / (\gamma t_0 - t), \quad \gamma = 1 - 2 \log M / \log \varepsilon$$

$$\alpha \geq 3 \quad \text{constant,}$$

M, t_0 は次の条件 (4.7) ~ (4.10) を満足する定数とする。

$$(4.7) \quad M > \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2} \right)^\alpha \cdot \alpha$$

A, B を次のように定める。

$$(4.8) \quad A = \gamma \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{\alpha-2} \cdot \frac{2}{\log M \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^\alpha}$$

$$(4.9) \quad B = \frac{\gamma}{2} \left\{ M \left(\frac{2\alpha-2}{2\alpha-1} \right)^\alpha - \left(\frac{2\alpha-1}{2\alpha-2} \right)^2 \cdot 2\alpha \right\} \cdot \frac{1 - e^{1-\frac{\gamma}{2}}}{\log M}$$

$$(4.10) \quad \frac{1}{x_0} = \min(A, B) \quad .$$

そうすれば v は次の関係を満足する。

$$(4.11) \quad v_t < v_{xx} + v^2 - \varepsilon v^3 \quad x \in [0, x_0]$$

証明. 最初大次のことを示す。

$$(4.12) \quad C = \frac{\gamma}{2} M \left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1} \right)^\alpha \cdot \frac{1 - e^{1-\frac{\gamma}{2}}}{\log M}$$

とおけば (4.10) より

$$(4.13) \quad x_0 > \frac{1}{C}$$

が成立つ。

v_t, v_{xx} を直接計算すれば

$$(4.14) \quad v_t - v_{xx} - v^2 + \varepsilon v^3 = \left\{ \frac{\gamma^2}{4x_0} \log M (1-x^2)^\alpha + \frac{2\alpha\gamma \{1 - (2\alpha-1)x^2\}}{(1-x^2)^2} - v + \varepsilon v^3 \right\} \cdot v$$

となる。ここで

$$(4.15) \quad \max_{\substack{x \in [0, x_0] \\ \gamma \in [1, 17]}} \varepsilon \cdot v = M^{\gamma(x_0)} = \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^\gamma = e^{1-\frac{\gamma}{2}}$$

に注意すれば, V を次のように書いてその negativity を示せばよい。

$$(4.16) \quad V = \frac{\xi^2}{\gamma \lambda_0} \log M(1-x^2)^\alpha + \frac{2\alpha\xi\{1-(2\alpha\xi-1)x^2\}}{(1-x^2)^2} - (1-\xi^{1-\frac{\gamma}{2}}) \cdot \{M(1-x^2)^\alpha\}^\xi.$$

a) $1 \geq x^2 \geq 1-M^{-\frac{1}{\alpha}}$ の場合。

(4.7) より次の式が成立つ

$$(4.18) \quad 1-(2\alpha\xi-1)x^2 \leq 1-(2\alpha\xi-1)(1-M^{-\frac{1}{\alpha}}) < 0$$

x^2 の範囲より $\log M(1-x^2)^\alpha < 0$ とある。故に $V < 0$ 。

b) $(\alpha-1)^{-1} \leq x^2 \leq 1-M^{-\frac{1}{\alpha}}$ の場合。

(4.7) より $1-M^{-\frac{1}{\alpha}} > (\alpha-1)^{-1}$ は成立つ。

$$(4.19) \quad V \leq \frac{\xi^2}{\gamma \lambda_0} \log M\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^\alpha + \frac{2\alpha\xi\{1-(2\alpha\xi-1)\frac{1}{\alpha-1}\}}{\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^2} \\ = 2\xi\left[\frac{1}{2\gamma\lambda_0} \log M\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^\alpha - \frac{2\alpha^2(\alpha-1)}{(\alpha-2)^2}\right]\xi + \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{\alpha-2}.$$

(4.10) より $\{ \dots \}$ は負であり, $\xi \geq 1$ に注意すれば $V < 0$ がわかる。

c) $(2\alpha\xi-1)^{-1} \leq x^2 \leq (\alpha-1)^{-1}$ の場合。

$\eta = M(1-x^2)^\alpha$ とおくと $\log \eta > 1$ とある。

$$(4.20) \quad V_1 = \frac{\xi^2}{\gamma \lambda_0} \log \eta - (1-\xi^{1-\frac{\gamma}{2}}) \eta^\xi$$

とおくと $V \leq V_1$ 。

(4.12) より $V_{1,\xi} (= \frac{\partial V_1}{\partial \xi}) \leq 0$, $V_{1,\xi\xi} \leq 0$ が示される。

再び (4.12) を用いて $V_1 < 0$ が示される。

d) $0 \leq x^2 \leq (2\alpha_5 - 1)^{-1}$ の場合。

$$(4.21) \quad V_2 = \frac{2\beta^2}{\beta x_0} \log \eta + \frac{2\alpha_5}{\left(\frac{2\alpha-2}{2\alpha-1}\right)^2} - (1 - e^{1-\frac{x}{2}}) \eta^5$$

とあくと $V \leq V_2$ と存る。c) と同様の手法を用いて (4.9), (4.10) より $V_2 < 0$ が示される。

a), b), c), d) の結果より Lemma 4.1 は証明された。

Lemma 4.2 $\varphi = M(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{x_1}{x_1-x}$ とおく。

但し M, x_1 は次の関係を満たす。

$$(4.22) \quad x_1 = (M-2)^{-1}$$

そうすれば φ は次の関係を満たす。

$$(4.23) \quad \varphi_x > \varphi_{xx} + \varphi^2$$

証明. φ_x, φ_{xx} を直接計算して評価すればよい。

Theorem 4.1

(4.2) における $u_0(x)$ が次の不等式を満足するとする。

$$(4.24) \quad M(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \geq u_0(x) \geq M(1-x^2)^\alpha \quad x \in [-1, 1].$$

(4.1), (4.2), (4.3) の解 $u(x, t)$ の blow up 時間 t_b は次のように評価される。

$$(4.25) \quad t_1 \leq t_b \leq t_0$$

証明. 簡単な比較定理を用いれば

$$(4.25) \quad u_\varepsilon(x, t) \geq v(x, t) \quad (x, t) \in [0, t_0] \times [-1, 1]$$

$$(4.27) \quad \varphi(x) \geq u(x), \quad (x) \in [0, x_1) \times [-1, 1].$$

(4.5), (4.15), (4.24), (4.26) より (4.25) の後半を得る。

(4.24), (4.27) より (4.25) の前半を得る。証明終り。

系 . 空間次元が3次元のときでも球対称ならば Theorem 4.1 と同様の結果が得られる。

§ 5 差分方程式

(4.1) の差分近似を求める場合 scheme の安定性や truncation error の評価は式の不安定性のため困難が多い。ここでは (4.1) を下から近似している安定な (4.4) を用いて差分法も考察する。考える空間は §4 と同様に $[-1, 1]$ とし、それを $2n$ 等分して空間の mesh size を $h = \frac{1}{n}$ とする。time step を τ とし、時間微分の所を前進差分、空間微分の所を中心差分にかき変えた次の式を考える。

$$(5.1) \quad D_t \omega(m\tau, nh) = D_+ D_- \omega(m\tau, nh) + \omega^2(m\tau, nh) - \varepsilon \omega^3(m\tau, nh)$$

$$(5.2) \quad \omega(0, nh) = u_0(nh), \quad m \geq 0, \quad -1 \leq nh \leq 1.$$

ここで $\tau = \lambda h^2$ とおくと (5.1) は次のようになる。

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \omega((m+1)\tau, nh) &= \lambda \omega(m\tau, (n+1)h) + (1-2\lambda) \\ &\times \omega(m\tau, nh) + \lambda \omega(m\tau, (n-1)h) + \tau \omega^2(m\tau, nh) \\ &- \varepsilon \tau \omega^3(m\tau, nh). \end{aligned}$$

Lemma 5.1 $0 < \lambda \leq \frac{1}{3}$: fix. $\varepsilon > 3\tau$ とする。

$0 \leq u_0(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad x \in [-1, 1]$ ならば 全ての $m \geq 0$ に対して
 $0 \leq \omega(m\tau, n_k) \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad n \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ となる。

証明. 帰納法で示す。

全ての n について $\omega(m\tau, n_k) \leq \frac{1}{\varepsilon}$ ならば $\omega((m+1)\tau, n_k) \leq \frac{1}{\varepsilon}$ を示す。(5.3)より

$$(5.4) \quad \omega((m+1)\tau, n_k) \leq \frac{2\lambda}{\varepsilon} + (1-2\lambda)\omega(m\tau, n_k) \\ + \frac{\tau}{\varepsilon} \omega^2(m\tau, n_k) (1 - \varepsilon\omega(m\tau, n_k))$$

となり、条件より (5.4) の右辺の最大値は $\frac{1}{\varepsilon}$ である。(5.4) は $m=0$ から順次成立つから Lemma 5.1 は示された。

Theorem 5.1 $0 < \lambda \leq \frac{1}{3}$: fix. $3\varepsilon < \tau$, $0 \leq u_0(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}$ ならば $u_\varepsilon(m\tau, n_k)$ と $\omega(m\tau, n_k)$ との差は $O(\tau)$ である。

証明. $w(m\tau, n_k) = u_\varepsilon(m\tau, n_k) - \omega(m\tau, n_k)$ とおく。

$$(5.5) \quad w((m+1)\tau, n_k) = \lambda u(m\tau, (n+1)k) + (1-2\lambda)w(m\tau, n_k) \\ + \lambda w(m\tau, (n-1)k) + \tau \{ u_\varepsilon(m\tau, n_k) + \omega(m\tau, n_k) \} w(m\tau, n_k) \\ - \varepsilon \tau \{ u_\varepsilon^2(m\tau, n_k) + u_\varepsilon(m\tau, n_k)\omega(m\tau, n_k) + \omega^2(m\tau, n_k) \} \\ \cdot w(m\tau, n_k) + O(k^4)$$

となる。ここで次のように $z(m\tau, n_k)$ を考えよう。

$$(5.6) \quad z((m+1)\tau, n_k) = \lambda z(m\tau, (n+1)k) + (1-2\lambda) \\ \times z(m\tau, n_k) + \lambda z(m\tau, (n-1)k) + \frac{3\tau}{\varepsilon} z(m\tau, n_k) + Ck^4$$

$$(5.7) \quad Z(0, \kappa k) = 0$$

C : 正の定数

$$\{u_\varepsilon + \omega\} \omega - \varepsilon \{u_\varepsilon^2 + u_\varepsilon \omega + \omega^2\} \omega \leq \frac{2}{3} |\omega| \quad \text{より}$$

$$(5.8) \quad W(m\tau, \kappa k) \leq Z(m\tau, \kappa k) \quad .$$

(5.6) で定義された $Z(m\tau, \kappa k)$ は次の式を満たす。

$$(5.9) \quad Z(m\tau, \kappa k) = \sum_{j=1}^m C_j \left(\frac{3\tau}{\varepsilon} \right)^{j-1} C k^4$$

これは帰納法によって簡単に示される。故に $Z(m\tau, \kappa k)$ は次のように書き換えられる。

$$(5.10) \quad Z(m\tau, \kappa k) = \left(1 + \frac{3\tau}{\varepsilon}\right)^m \frac{\varepsilon}{3\tau} C \lambda^2 \tau^2$$

$$= \left(1 + \frac{3\tau}{\varepsilon}\right)^m \frac{\varepsilon}{3} C \lambda^2 \tau$$

Q.E.D.

References

- [1] M.Tsutsumi, On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space, Mathematica Japonica, Vol. 17, No. 2, (1972)
- [2] I.Segal, Nonlinear semigroups, Anals. of Math, Vol. 7, No. 2, (1968)
- [3] T.Kato, Nonlinear equations in Banach spaces, Proc. Appl. Math., 17 (1965)

- [4] T.Nakagawa, Blowing up of a finite difference solution
to $u_t = u_{xx} + u^2$, preprint.
- [5] J.L.Lions, Quelques Methodes de Resolution des Problemes
aux Limites Non Lineaires, Dunod, Paris,
(1969).
- [6] D.H.Sattinger, Topics in stability and bifurcation
theory, Springer-Verlag, 1973.