

記号力学系と C^* 環

群馬大: I 松本健吾 (Kengo Matsumoto)

0. はじめに

位相力学系から C^* 環を構成し, もとの位相力学系の力学系としての性質とてきた C^* 環の代数的性質を調べた. この研究は昔からいろいろとあります. そのときの C^* 環の構成方法として, たとえば, コンパクト空間の上^部に同相写像 (達) が作用しているというような場合には, そのコンパクト空間の上の連結円数環を考え, 同相写像を自己同型に持ちあげ, 接合積を取る. というボブローフな方法がまず思い浮かびます.

この路線での研究は, 最近では, 富山先生, Gerdner, Skau, Putnam, 等の人々達によって精力的ななされているので, ほんの尖り端々全くありません. これとは別に, 位相的マルコフチェーンから位相的マルコフシフトを作り, この位相的マルコフシフトに附随しててくる Cuntz-Krieger 環の研究があまりにも有名です.

ここでは, 位相的マルコフシフトの一般化である記号力学

系 (サブシフトとも呼ばれる) という位相空間系に注目して、この一般の記号力学系から (多くの場合) 単純, 純粋無限 C^* 環も構成して, その C^* 環の構造をもこの力学系の性質を見ながら調べていきます。この構成方法で特にモルのサブシフトが位相的マルコフシフトの場合は, 構成された C^* 環は, Cuntz-Krieger 環にほゞ, さらに特に, フルシフトの場合に Cuntz 環にほゞ ます。

以下の目次で進めていきます

1. サブシフトと C^* 環の構成
2. AF-環が中に入ってくる
3. C^* 環の普遍性
4. C^* 環の単純性, 純粋無限性
5. Sofic subshift の例
6. K-群
7. 最近わかったことなど

1. サブシフトと C^* 環の構成

$n = 1, 2, 3, \dots$ を固定する。

$\Sigma = \{1, 2, \dots, n\}$ とおき, その無限直積 $\Sigma^{\mathbb{Z}} = \prod_{i=-\infty}^{\infty} \Sigma$,
 $\Sigma^{\mathbb{N}} = \prod_{i=1}^{\infty} \Sigma$ に直積位相を入れて, コンパクトにする。

shift σ on $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ or $\Sigma^{\mathbb{N}}$ is $\sigma((x_i)_i) = (x_{i+1})_i$, $i \in \mathbb{Z}$ or $\mathbb{N}$
 is defined. For any family $\Lambda \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$ (or $\Sigma^{\mathbb{N}}$)
 $\sigma(\Lambda) = \Lambda$ is satisfied. We consider, for Λ , (Λ, σ) is
 a subshift (or, one-sided subshift) and so on. Below,
 we consider, in particular, (two-sided) subshifts.

例 1 (フルシフト)

$\Lambda = \Sigma^{\mathbb{Z}}$ としたとき $(\Sigma^{\mathbb{N}}, \sigma)$ is (n) -full shift and so on.

例 2 (与えられたマルコフシフト)

$A = (A(i, j))_{i, j=1, 2, \dots, m}$: $m \times m$ matrix with entries 0, 1 is given.
 For this, we consider,

$$\Lambda_A = \{ (x_i)_{i=-\infty}^{\infty} \mid A(x_i, x_{i+1}) = 1 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \}$$

is (Λ_A, σ) is a subshift. It is called a Markov shift (or, Markov subshift) and so on. In particular, the case where all entries are 1 is the full shift.

Markov shifts are not the only subshifts. There are many other subshifts. For example, the following is a sofic shift (sofic shift) and so on. It belongs to the class of subshifts.

例 3 $\Sigma = \{1, 2\}$,

$Y \equiv \{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \mid x_i \text{ is even for all } i \}$ is a subshift.

さて, $\mu_j \in \Sigma$, $j=1,2,\dots,k$ に対して, その有限列 $\mu=(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ のことを block or word (語) と言います. また, $|\mu|$ はその長さ k を現わします.

$\lambda=(\lambda_i)_{i=-\infty}^{\infty} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ と $\mu=(\mu_1, \dots, \mu_k)$ に対して, μ が列 λ に "現れる" とは

$\exists m \in \mathbb{N}; \quad \lambda_m = \mu_1, \lambda_{m+1} = \mu_2, \dots, \lambda_{m+k-1} = \mu_k$
のことも言います。

これから, 以後, ハフシフト (Λ, σ) も Σ 固定します。

$\Lambda^k \equiv \{ \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に現れる長さ } k \text{ の語全体} \}$ と

$$\Lambda_+ = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Lambda^k, \quad \Lambda_* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \quad \text{とします.}$$

このハフシフトから $\mathbb{C}^{\pm}$ 環を構成し得るのでありますが, ます, 土台となる Hilbert 空間を以下のようにつくります。

$\{e_0, \dots, e_n\}$ を n -次元 Hilbert 空間 $\mathbb{C}^n$ の適当 basis とし

$$F_{\Lambda}^0 \equiv \mathbb{C}e_0, \quad (e_0: \text{真空状態 vector})$$

$F_{\Lambda}^k =$ ベクトル 達 $e_{\mu} \equiv e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k}, \mu=(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \Lambda^k$
で張られる Hilbert 空間.

そこで

$$F_{\Lambda} \equiv \bigoplus_{k=0}^{\infty} F_{\Lambda}^k : \text{Hilbert 空間の直和}$$

と置き, ハフシフト Λ の対応してできる Hilbert 空間を構成します. そこで, その上に "生成作用素" を $u, v \in \Lambda_*$ に対して,

$$T_\nu e_\mu \equiv \begin{cases} e_\nu \otimes e_\mu & \text{if } \overset{\text{極小元} \mu \text{ となる}}{\nu} \mu \in \Lambda_+ \\ 0 & \text{if else.} \end{cases}$$

と定めます。これは各 $\nu \in \Lambda_+$ に対し, partial isometry として

$P_0 = \mathbb{C}e_0$ への 1次元射影 として, すると

$$\sum_{i=1}^n T_i T_i^* + P_0 = 1 \quad \text{がすぐわかります。また}$$

$T_\mu P_0 T_\nu^*$ がベクトル $\mathbb{C}e_\nu$ から $\mathbb{C}e_\mu$ への 1次元の partial isometry として,

$K(F_\Lambda) \equiv F_\Lambda$ 上のコンパクト作用素全体の作る C^* 環

$\mathcal{I}_\Lambda \equiv T_\mu : \mu \in \Lambda_+ \text{ によって生成される } F_\Lambda \text{ 上の } C^* \text{環}$

と定めます

定義 (サフシフトに付随してできる C^* 環 $\mathcal{O}_\Lambda$)

$$\mathcal{O}_\Lambda \equiv \mathcal{I}_\Lambda / K(F_\Lambda) \quad \text{商 } C^* \text{環}$$

ここで, S_μ を T_μ の商作用素, 特に S_n は $T_{e_1, \dots, e_n}$ の商作用素とします。

この C^* 環 $\mathcal{O}_\Lambda$ がこれから 研究対象 となる C^* 環です。

まずすぐに分かることは 生成元達 $S_i, i=1, \dots, n$ が内積式

$$\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1 \quad \text{を満たしていることがわかります。}$$

前記しますが, この構成方法は, 榎本, 藤井, 総矢 共著 [EFW]

2 Evans [E] が独逸の マルコフシフト Λ に対し Cuntz-Krieger 環を構成したときの方法を、一般のサブシフト Λ に対してよくが直線化-ものである。ですが、この [EFW] 2 [E] の結果により、サブシフト Λ に対しマルコフシフト Λ_A をとり、

$\mathcal{O}_{\Lambda_A} \cong \mathcal{O}_A$ が成立します。したがって、このようにして作られたサブシフト Λ から得られる C^* 環 $\mathcal{O}_\Lambda$ のクラスは Cuntz-Krieger 環 $\mathcal{O}_A$ の K 群のクラスを含むという事です。またこのサブシフトがフルシフトだったとき、もちろん、そこから得られる C^* 環は Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ に一致します。

以後、この C^* 環の構成を述べて行きます。

2. AF 環から出てくる

Cuntz-Krieger 環の場合も $\mathcal{O}_n$ の場合と同様に、議論を進めます。

Lemma 2.1 $S_\mu^* S_\mu, S_\nu S_\nu^*, \mu, \nu \in \Lambda_+$ は皆交換可能である。

証明は $T_\mu^* T_\mu, T_\nu T_\nu^*$ が交換可能であることを示せばよいが、それは簡単。よって。

Corollary 2.2 $a_\mu S_\nu = S_\nu a_{\mu\nu}, \quad \forall \mu, \nu \in \Lambda_+$

where $a_\mu = S_\mu^* S_\mu$

この系の中で $\sum_{|\mu|=k} S_\mu S_\mu^* = 1$ に注意すると、次の Lemma がわかる

Lemma 2.3 $S_\nu, S_\nu^*, \nu, j=1, 2, \dots, n$ を含む word を含む

$$S_\mu a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_m} S_\nu^*, \quad \mu, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \nu \in \Lambda_+$$

の形に整理して表す。

次のように記号を定義します。 $k \leq \ell$: 自然数に対し

$$A_\ell = C^*(a_\mu \mid |\mu| \leq \ell),$$

$$A_\Lambda = C^*(a_\mu \mid \mu \in \Lambda_*)$$

$$\mathcal{F}_k^\ell = C^*(S_\mu a S_\nu^* \mid |\mu|=|\nu|=k, a \in A_\ell)$$

$$\mathcal{F}_k^\infty = C^*(S_\mu a S_\nu^* \mid |\mu|=|\nu|=k, a \in A_\Lambda)$$

$$\mathcal{F}_\Lambda^\infty \equiv C^*(S_\mu a S_\nu^* \mid |\mu|=|\nu|, a \in A_\Lambda)$$

そして以下のことがわかります。

Lemma 2.4

(i) $\dim A_\ell < \infty$

(ii) $A_\ell \hookrightarrow A_{\ell+1}$ (subset かつ) .. 故に $A_\Lambda = \varinjlim_{\ell} A_\ell$ ^{丁度} AF-環

(iii) $\mathcal{F}_k^\ell$ の任意の元は $S_\mu a S_\nu^*, \mu, \nu \in \Lambda^k, a \in A_\ell$ の形の有限 1 次結合。 故に $\mathcal{F}_k^\ell$ は有限次元環。

(iv) $\{\mathcal{F}_k^\ell\}_{k \leq \ell}$ に関して以下の 2 つの性質が成り立つ

(a) $A_\ell \hookrightarrow A_{\ell+1}$ により $\mathcal{F}_k^\ell \hookrightarrow \mathcal{F}_k^{\ell+1}$

(b) 恒等式

$$S_\mu a S_\nu^* = \sum_{j=1}^m S_{\mu j} S_j^* a S_j S_{\nu j}^*, \quad \mu, \nu \in \Lambda_+, a \in A_\ell$$

を通した埋め込み $\gamma_\ell: \mathcal{F}_k^\ell \hookrightarrow \mathcal{F}_k^{\ell+1}$

(v) $\mathcal{F}_k^\infty = \varinjlim_{\ell} \mathcal{F}_k^\ell$, $\mathcal{F}_\Lambda^\infty = \varinjlim_{k, \ell} \mathcal{F}_k^\ell$ は AF 環.

こゝで AF 環 $\mathcal{F}_\Lambda^\infty$ が Cuntz-Kreier 環の中にある AF-環も一般化したものである。Cuntz-Kreier 環の場合、AF 環の Bratteli diagram は横幅が一定で伸びていくが、一般の subshift (Λ, σ) の AF 環 $\mathcal{F}_\Lambda^\infty$ の Bratteli diagram は (Λ, σ) が sofic system ならば、横幅が一定で伸びていく。

subshift の場合

Fock space F_Λ 上の変換 $e_n \mapsto \sum_{|M|=k} z_M e_{n+M}$, $|M|=k, z_M \in \mathbb{C}, |z_M|=1$ を定義すると、これは 1次元トーラス群 $\mathbb{T}$ の unitary 表現を与えます。これは $K(F_\Lambda)$ を不変に作用するので、 $\mathcal{O}_\Lambda$ 上の action を定義します。これを α と表し、gauge action と呼ぶ。従って、

$$\alpha_z(S_i) = z S_i, \quad i=1,2,\dots, n, \quad z \in \mathbb{T} \subset \mathbb{C}, |z|=1.$$

Lemma 2.5 $\mathcal{F}_\Lambda^\infty = \mathcal{O}_\Lambda^\alpha$: 不動点環.

3. C^* 環の普遍性

C^* 環 $\mathcal{Q}_\Lambda$ を構成する方法で述べたものより、抽象的な方法で述べたものより、次の ^{2.2} 普遍性定理が成立します。

Theorem 3.1 (普遍性 2.1)

$\mathcal{A}$ を勝手な C^* 環で、 A_Λ が $\mathcal{A}$ の中への準同型 π があって
 成します。さらに、 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ^{Exercises} $\forall$ partial isometries が

$\pi(A_\mu^* A_\mu) = A_\mu^* A_\mu, \quad A_\mu^* A_\mu A_\nu = A_\nu A_\mu^* A_\nu \quad \forall \mu, \nu \in \Lambda$
 を満たしているとき、 π は $\mathcal{Q}_\Lambda$ 全体の上の準同型に拡張
 できる。

少し記号を準備します。

$$\mathcal{Q}_\Lambda \cong C^*(S_\mu S_\mu^* \mid \mu \in \Lambda^+).$$

これは可換 C^* 環でもこの subalgebra の片側 subalgebra 上の通称同型
 環と同型で、その上の shift σ に対応するものから、

$$\phi_\Lambda(X) = \sum_{j=1}^n S_j X S_j^*, \quad X \in \mathcal{Q}_\Lambda \quad \text{で}.$$

Cuntz-Krieger 環の普遍性を証明するときに使った “既約
 行列 (not $\leq$ 同分)” に対応する条件は次の条件 (I_A) の

条件 (I_A): $\forall k \leq l, \exists \delta_k^l \in \mathcal{Q}_\Lambda$: projection ;

$$(i) \delta_k^l a \neq 0 \quad \forall a \in A_l, \quad (ii) \delta_k^l \phi_\Lambda^n(\delta_k^l) = 0, \quad 1 \leq n \leq k.$$

Theorem 3.2 (普通性定理の2)

Theorem 3.1 と同じ状況で, 準同型 $\pi: A_\Lambda \rightarrow \Delta$ が injective だが, 成り立つ。このとき, もし $\mathcal{O}_\Lambda$ が条件 (I_Λ) を満たしていれば, 拡張された準同型 π は injective になる。

この普通性定理により, $\mathcal{O}_\Lambda$ の代数構造は完全に, π の可換 $\mathcal{O}_\Lambda$ の部分 A_Λ に決ってしまうことを意味しています。

4. $\mathcal{O}_\Lambda$ の単純性, 純粋無限性

Theorem 9.2 が $\mathcal{O}_\Lambda$ の単純性が等かれないことは示している。 ある条件も加味すれば 想が合う。そこで,

と仮定す

$$\lambda(X) = \sum_{j=1}^n S_j^* X S_j, \quad X \in A_\Lambda$$

と仮定します。

特に X が A_Λ の元の時, λ を λ_ℓ とかいたりもします。

λ は A_Λ 上の自己準同型を与えますが, もし A_Λ の中に λ -不変な ideal がなかったら, λ を "minimal" と呼ぶことにします。このとき, 次のようになります。

Theorem 4.1 $\mathcal{O}_\Lambda$ が条件 (I_Λ) を満たし, λ が minimal

だとする。このとき, $\mathcal{O}_\Lambda$ は単純で純粋無限である。

条件 (I_A) と λ の minimality は Cantz-Krieger 環 いろいろ $\mathbb{C} = \mathbb{C}$ の “既約かつ not $\mathbb{C}$ 同形” に対応しています。実際, Cantz-Krieger 環の場合はその条件に一致します。また, この (I_A) と minimality は もとの subshift の言葉でいうと, もとのサブシフトの非周期点 ^{少なくても} が 1 つ あり, シフトが位相混合的 + $\overline{D}$ のような条件に合う ということです。この $\overline{D}$ の部分は少し 言うから です。

5. Sofic subshift の例

Sofic subshift (or Sofic system) というのは, Markov shift より も広いクラスで, Markov 以外の Sofic の 例が 最初 の 例 3 の Y での subshift です。Sofic の 詳しい 定義等は 記号力学の 論文等を見てください。

$$\mathcal{D}_k \equiv C^*(S_n S_n^* \mid |M| \leq k) \quad \text{etc.}$$

Proposition 5.1

- (i) (A, σ) が sofic $\Leftrightarrow \dim A_A < \infty$
- (ii) “ subshift of finite type $\Leftrightarrow A_A \subset \mathcal{D}_k$ for some k
- (iii) (A, σ) が Markov $\Leftrightarrow A_A \subset \mathcal{D}_1$

そこで 最初 の 例 3 の Y での sofic subshift を 見て みる

と、 γ の語 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ に対し

$$S_\mu^* S_\mu = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu = (2, \dots, 2) \\ S_1^* S_1 & \text{if } \mu = (*, \dots, *, 1) \text{ or } (*, \dots, *, 1, \underbrace{2, 2}_{\text{偶}}) \\ S_2^* S_1^* S_1 S_2 & \text{if } \mu = (*, \dots, *, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{\text{奇}}) \end{cases}$$

つまり、 $S_1^* S_1 + S_2^* S_1^* S_1 S_2 = 1$ を満たします。

従って、

$$A_l = A_\gamma = \mathbb{C} S_1^* S_1 + \mathbb{C} S_2^* S_1^* S_1 S_2, \quad l \in \mathbb{N}$$

つまり $\dim A_\gamma = 2$ である。

次に、最近、C*-環論の中ではやっという (た?) 分類理論に関連して、K-群の計算公式等も述べましょう。

6. K-群.

まず AF 環 $\mathcal{K}_\infty$ のうですか、 Λ は Matkum のときは、この K_0 -群 $K_0(\mathcal{K}_\infty)$ がやはり もとの サブリフト (1.5) の 次元解 (Krieger 達の意味で)、やはり ます。したがって、一般に α subshift に対して AF-環 $\mathcal{K}_\infty$ の K_0 が もとの サブリフトの "次元解" です。つまり

$$\textcircled{6} \quad K_0(\mathcal{K}_\infty) = \text{次元解} \text{ 環 } (1.5).$$

✓ ~~解~~ 順序群としての計算はむづかしいですが、単に“群”として
5 次の群をします

$$\boxed{\text{Theorem 6.1}} \quad K_0(\mathbb{Z}_n^\infty) = \varinjlim (\mathbb{Z}^{m(l)}, \lambda_{l+1})$$

ただし, $m(l) = \dim A_l$ であり $\mathbb{Z}^{m(l)} = K_0(A_l)$ であり λ_{l+1} は

$$\lambda_{l+1}: K_0(A_l) \rightarrow K_0(A_{l+1}) \text{ である。}$$

この結果を利用して, また, $\mathbb{Z}_n^\infty$ が $\mathcal{O}_n \rtimes \Pi$ に stably
同型であることに注意すると, Pimsner-Voiculescu の K 群の 6 項
完全列が計算できます。次がわかります。

$\boxed{\text{Theorem 6.2}}$ (K-群公式)

$$(i) \quad K_0(\mathcal{O}_n) = \varinjlim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{Z}^{m(l+1)} / (i_{l+1} - \lambda_{l+1}) \mathbb{Z}^{m(l)}$$

$$(ii) \quad K_1(\mathcal{O}_n) = \varinjlim_{l \rightarrow \infty} \text{Ker}(i_{l+1} - \lambda_{l+1}) \text{ in } \mathbb{Z}^{m(l)}$$

頂度, Cant-Krieger 環の K 群公式の帰納的極限の形になっています。

$\boxed{\text{例}}$ 先ほど述べた sofic subshift Y 上の K-群公式
を適用して計算してみよう。

$$K_0(\mathcal{O}_Y) \cong \mathbb{Z}^2 / (1 - [1 \ 1])\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$$

$$K_1(\mathcal{O}_Y) \cong \operatorname{Ker} (1 - [1 \ 1])_{\text{in}} \mathbb{Z} = 0$$

と決ります。

サブリットから決まる C^* 環 $\mathcal{O}_Y$ の決りは、最近の Kirchby
と Phillips がやった分類の枠組の中で C^* 環で決ります。

Proposition 6.3 $\mathcal{O}_Y$ は ^{unital} separable, nuclear, simple
purely infinite の U.C.T (Universal Coefficient Theorem)
を満たす。従って、 $\mathcal{O}_Y$ の同型は完全なその K -群で決
ります。

このことと $\mathcal{O}_Y$ の K_0, K_1 が決ると、 $\mathcal{O}_Y$ は Cuntz-Krieger
環 $\mathcal{O}_{[1 \ 1]}$ に同型がわかります。

7. 最近わかったことなど。

① 一般の $\mathcal{O}_A$ も、Cuntz-Krieger 環の生成元の関係式

$$S_i^* S_i = \sum_{j=1}^m A(i, j) S_j S_j^*$$

の“無限和”が収束することがわかりました。

② $\operatorname{subshift}(\Lambda, \sigma)$ の ILD-ピー $\mathcal{O}_Y$ が $\mathcal{O}_A$ の同型な C^* 環 $\mathcal{O}_A$

の gauge action の KMS-状態の“温度”で捉えることがわかってきました。

⑦他にもいろいろあります。

この辺をやめます。

以上の話は梶谷光五 (九大), 片山光五 (大阪教大) の Carter-Kreier 環のこと^下をいろいろ教えるところ、進んでは話そう。

細かい証明は省略

K. Matsumoto: 「on C^* algebras associated with subshifts」 preprint

「K-Theory for C^* algebras associated with subshifts」

にあります。

参考

[EFW]: M. Enomoto, M. Fujii and Y. Watatai: 「tensor algebras on the sub Fock space associated with $\mathcal{O}_A$ 」 Math. Japon 24 (1979)

[E]: D. Evans: 「Gauge actions on $\mathcal{O}_A$ 」 J. O.T. 7 (1972)