

擬リーマン空間型内の平均曲率ベクトルが零となる ローレンツ曲面について

お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科 三浦幸平 (Kouhei Miura)
Graduate School of Humanities and Sciences,
Ochanomizu University

1 はじめに

擬リーマン定曲率空間である, 次元 n , 指数 t の擬球面 S_t^n および擬双曲空間 H_t^n には, 正定値 ($t = 0$) の球面 $S^n := S_0^n$ 上の標準はめ込みに対応する “標準はめ込み” が構成される ([3]). (正定値) リーマン幾何学における標準はめ込みに対しては, 多くの研究が知られている. 擬リーマン定曲率空間上の “標準はめ込み” も, その構成方法から, 球面の標準はめ込みに類似した性質を持つことが期待される.

本稿では, 特に「球面 S^2 から球面 S^n への極小等長はめ込みは S^2 の標準はめ込みに合同である」という E. Calabi([1]) のリーマン幾何学における結果の不定値版を考える. 具体的には, 「定曲率ローレンツ曲面 $M_1^2(K)$ から定曲率空間 $\widetilde{M}_t^n(c)$ への平均曲率ベクトルが零となる等長はめ込みは剛性を持つか」という問題に関して得られた結果を報告する (K と c は断面曲率).

なお, 本研究は長谷川和志氏 (金沢大学) との共同研究 ([2]) である.

2 ローレンツ曲面の極值的な等長はめ込み

ベクトル束 E に, 非退化な束計量 g^E が与えられたとき, E を擬リーマン・ベクトル束とよぶ. E が階数 2 でローレンツ計量を持つとき, ローレンツ平面束とよぶ. E の階数が $2m$ で, g^E の指数が m であるとき, $J^E \in \text{End}(E)$ で, $(J^E)^2 = \text{id}_E$, $g^E(J^E v, w) = -g^E(v, J^E w)$ を満たすものを E のパラ・エルミート構造という ($v, w \in E$).

向きづけられた 2 次元ローレンツ多様体はローレンツ曲面とよばれる. ローレンツ曲面 (M, g) には, そのレビ・チビタ接続 ∇ で平行なパラ・エルミート構造が (符号を除いて) 標準的に存在する. 以降, M 上のパラ・エルミート構造 $J \in \text{End}(TM)$ として, M 上の向き付けられた局所枠場 $e = (e_+, e_-)$ で, $g(e_\pm, e_\pm) = 0$, $g(e_+, e_-) = 1$ となるものに対して,

$$J(e_\pm) = \pm e_\pm$$

を満たすものをとる. M 上の等長はめ込み f の第 2 基本形式を α とすると, 上の局所枠場 $e = (e_+, e_-)$ に関して, f の平均曲率ベクトル場 H は $H = \alpha(e_+, e_-)$ と表される. 本稿では, 平均曲率ベクトル場が恒等的に零である等長はめ込みを極值的であるとよぶことにする.

以下, ローレンツ曲面 M から擬リーマン多様体 $\widetilde{M}$ への等長はめ込み f に関して, その定義域と値域を局所的に同一視して記述する. 等長はめ込みの第 k 接触空間 $\text{Osc}^k(f)$ を次のように

定める (k は正の整数):

$$\text{Osc}^1(f) := TM$$

$$\text{Osc}^k(f) := \text{Span}\{\tilde{\nabla}_{X_1}\tilde{\nabla}_{X_2}\cdots\tilde{\nabla}_{X_{l-1}}X_l \mid X_i \in \Gamma(TM) \quad (2 \leq i \leq l \leq k)\}$$

ここで, $\tilde{\nabla}$ は $\widetilde{M}$ のレビ・チビタ接続である.

等長はめ込み f に対して, 正の整数 d で次を満たすものが一意に存在する:

- (1) $\text{Osc}^1(f) \subsetneq \text{Osc}^2(f) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Osc}^d(f)$ である.
- (2) $\text{Osc}^1(f), \dots, \text{Osc}^d(f)$ が, f に沿って $T\widetilde{M}$ の擬リーマン部分束である.
- (3) $\text{Osc}^d(f) = \text{Osc}^{d+1}(f)$ であるか, または $\text{Osc}^{d+1}(f)$ は $T\widetilde{M}$ の擬リーマン部分束ではない.

このとき, 等長はめ込み f の大域的な非退化階数は d であるという. この定義により, $\text{Osc}^{k+1}(f)$ 内における $\text{Osc}^k(f)$ の直交補空間が一意に定まる. これを f の第 k 法空間 N^k と定める ($k = 1, 2, \dots, d-1$).

$$\text{Osc}^{k+1}(f) = \text{Osc}^k(f) \oplus N^k$$

さらに定義より, $\text{Osc}^d(f)$ の $T\widetilde{M}$ での直交補空間も一意的であるので, $N^d := \text{Osc}^d(f)^\perp$ とおく. $N^0 := TM$ とおくことで, f に沿って次の直交直和分解を得る:

$$T\widetilde{M} = \bigoplus_{i=0}^d N^i$$

大域的な非退化階数が d である等長はめ込みに対して, 第 $(k+1)$ 基本形式を

$$\alpha^{k+1}(X_1, \dots, X_{k+1}) := (\tilde{\nabla}(X_1, \dots, X_{k+1}))^{N^k} \quad k = 1, 2, \dots, d$$

と定義する. ここで, $(\bullet)^{N^k}$ は “ $\bullet$ ” の N^k 成分を表している. これらの高階基本形式はすべて対称であり, $\alpha^2 = \alpha$ が成り立つ. 簡単のため $l+m = k+1$ である非負整数 k, l に対して

$$\alpha^{k+1}(X^l, Y^m) := \alpha^{k+1}(\underbrace{X, \dots, X}_l, \underbrace{Y, \dots, Y}_m)$$

のように表す.

ローレンツ曲面からの等長はめ込み f が極值的 ($H = \alpha^2(e_+, e_-) = 0$) であるとき, 高階基本形式に対して, $\alpha^{k+1}(e_+^l, e_-^m) = 0$ が $l+m = k+1$ を満たす正の整数 l, m に対して成り立つ. このことから, f の大域的な非退化階数が d であれば, その $(d-1)$ 階までの法空間 N^k の階数は 1 か 2 である.

$$N^k = \text{Span}\{\alpha^{k+1}(e_+^{k+1}), \alpha^{k+1}(e_-^{k+1})\}$$

3 水平なレフレクター・リフトをもつはめ込み

はめ込み f に沿った $\widetilde{M}$ のベクトル場 ζ に対して, M に接する成分を $\zeta^\top$, 直交する成分を $\zeta^\perp$ で表すことにする. ローレンツ曲面 M から, 偶数次元 $2m$, 指数 m の向き付けられた擬リーマ

ン多様体 $\widetilde{M}_m^{2m}$ への等長はめ込み $f: M \rightarrow \widetilde{M}$ に対して, M の標準的なパラ・エルミート構造 J と法束 $TM^\perp$ のパラ・エルミート構造 $J^\perp$ を用いて

$$\widetilde{J}(\zeta) := J(\zeta^\top) + J^\perp(\zeta^\perp)$$

と定めた $\widetilde{J}$ を, f のレフレクター・リフトという. 等長はめ込み $f: M \rightarrow \widetilde{M}$ が, 水平なレフレクター・リフトをもつとは, $\widetilde{M}$ のレビ・チビタ接続 $\widetilde{\nabla}$ に関して平行なレフレクター・リフト $\widetilde{J}$ が存在することである. このとき, f は超極值的であるともいわれる.

以降で述べていく結果を導く上で, 次の補題は基礎的である.

補題 等長はめ込み $f: M_1^2 \rightarrow \widetilde{M}_d^{2d}(c)$ が水平なレフレクター・リフト $\widetilde{J}$ をもち, その大域的な非退化階数が d であるとき, $\widetilde{J}$ はすべての第 k 法空間 ($k = 1, 2, \dots, d-1$) にパラ・エルミート構造 J^k を定める. 特に, N^k はローレンツ平面束となる. さらに, 高階基本形式 α^{k+1} に対して次が成り立つ:

$$\alpha^{i+1}(X_1, \dots, X_i, JX_{i+1}) = J^i \alpha^{i+1}(X_1, \dots, X_{i+1})$$

この補題より, 超極值的であれば極值的となることが次からわかる:

$$\alpha^2(e_+, e_-) = \alpha^2(J^1 e_+, e_-) = \alpha^2(e_+, J^1 e_-) = -\alpha^2(e_+, e_-)$$

さらに, 法ベクトル $\alpha^{k+1}(e_+^{k+1}), \alpha^{k+1}(e_-^{k+1})$ が N^k において, $J^k(\alpha^{k+1}(e_\pm^{k+1})) = \pm \alpha^{k+1}(e_\pm^{k+1})$ を満たす局所枠場を与えることがわかる. このとき, 次のように $(d-1)$ 個の関数をおくと

$$\lambda_k := \langle \alpha^{k+1}(e_+^{k+1}), \alpha^{k+1}(e_-^{k+1}) \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, d-1$$

これらは, ローレンツ曲面 M 上の大域的な関数を定める. また, 補題によりこれらの λ_k は M 上で零点を持たない. これらの関数について, つぎの関係式を得る ($k = 1, 2, \dots, d-1$):

$$\lambda_k = \left(c - \binom{k}{2} K - \Delta \log |\lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}| \right) \lambda_{k-1} \quad (1)$$

ここで, $\binom{a}{b}$ は二項係数であり, $\binom{1}{2} := 1$ とする. また, K と c はそれぞれ M と $\widetilde{M}$ の断面曲率, Δ は M 上のラプラス作用素であり, $\lambda_0 := 1$ とする. 関係式 (1) から, 各関数 λ_k は M の曲率 K , 定数 c , 次数 k から決定されることがわかる.

補題により得られた f の局所枠場に関して計算することにより, 次の定理が得られる.

定理 1 次元 $2d$, 指数 d の定曲率空間 $\widetilde{M}_d^{2d}(c)$ への, 連結なローレンツ曲面 M からの等長はめ込み $f, \bar{f}: M \rightarrow \widetilde{M}_d^{2d}(c)$ に対して, f と $\bar{f}$ が水平なレフレクター・リフトをもち, 大域的な非退化階数が共に d であれば, f と $\bar{f}$ は互いに合同である.

注意 文献 [3] で構成された等長はめ込みのうち, 特に, 次元 2 のローレンツ球面とローレンツ双曲空間上のものは定理 1 の条件を満たす.

注意 関係式 (1) から, M が定曲率 K のときは, すべての $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}$ は K と c から決まる非零な定数となる. また, この λ_k の非零性は第 k 法空間 N^k の非退化性とその階数が 2 であることに関与することが定義からわかる. この事実から, レフレクター・リフトに関する条件の代りに定曲率 K の値に関して条件を課すことで, 極值的な定曲率ローレンツ曲面について, 次節で述べる結果を得る.

4 定曲率空間内の極値的定曲率ローレンツ曲面

以降, ローレンツ曲面 $M_1^2(K)$ は定曲率 K をもつとする. 特に測地的に完備で, $K > 0$ のときは擬球面 $S_1^2(K)$ であり, $K < 0$ のときは擬双曲空間 $H_1^2(K)$ である. 既に言及したように, これらの空間から定曲率空間への, ある極値的等長はめ込みが, 球面 $S^2(K)$ の標準はめ込み $\psi_{2,d}: S^2(K) \rightarrow S^{2d}(c)$ (d は正の整数で $K = 2c/d(d+1)$) から構成されている. それらを,

$$\psi_{2,d,1}: S_1^2(K) \rightarrow S_d^{2d}(c), \quad \psi_{2,d,1}^H: H_1^2(K) \rightarrow H_d^{2d}(c)$$

で表し, これらも標準はめ込みとよぶことにする. ここで, d は正の整数で曲率は $K = 2c/d(d+1)$ である.

注意 文献 [3] では, 任意の次元 n と指数 t の定曲率空間からの定曲率空間への極値的等長はめ込み $\psi_{n,d,t}$ と $\psi_{n,d,t}^H$ を, 球面の標準はめ込み $\psi_{n,d}$ をもとにして構成している.

$B_d^c := \{2c/k(k+1) \mid 1 \leq k < d\}$ とおく. 超極値的な等長はめ込みに関して, 次の結果が得られる.

定理 2 曲率 K が B_d^c に属さないとき, 超極値的な等長はめ込み $f: M_1^2(K) \rightarrow \widetilde{M}_d^{2d}(c)$ の大域的非退化階数は d であり, $K = 2c/d(d+1)$ である. 特に, $c > 0$ のとき f は $\psi_{2,d,1}$ と局所的に合同であり, $c < 0$ のとき f は $\psi_{2,d,1}^H$ と局所的に合同である.

系 曲率 K が任意の正の整数 k に対して, $K \neq 2c/k(k+1)$ であるとき, 定曲率空間 $\widetilde{M}_t^n(c)$ への超極値的な等長はめ込みは存在しない.

以降は, (偶数とは限らない) 次元 n , 指数 t の定曲率空間 $\widetilde{M}_t^n(c)$ への擬リーマン多様体 M の等長はめ込み $f: M \rightarrow \widetilde{M}$ を考える. f に対して, 次の条件 (†) を考える:

(†) M の各ヌル測地線が, $\widetilde{M}$ 内のある全等方的な全測地的部分多様体に含まれる.

ここで, $\widetilde{M}$ 内の部分多様体 L が全等方的であるとは, $\widetilde{M}$ の擬リーマン計量が定める L の誘導計量が零テンソルとなることである. このような L に対して, 全測地的であるとは, $\widetilde{M}$ のレビ・チビタ接続 $\widetilde{\nabla}$ が L に自然にアフィン接続を定めることである.

注意 任意の次元と指数の擬球面と擬双曲空間の標準はめ込み ([3]) は条件 (†) を満たす. より一般に, 接触数 (contact number) が ∞ である擬リーマン等長はめ込みは, 条件 (†) を満たす (cf. [4], [5]).

等長はめ込み $f: M \rightarrow \widetilde{M}$ に対して,

$$T_{f(p)}\widetilde{M} = \text{Osc}_p^\infty(f) := \bigcup_{k>0} \text{Osc}_p^k(f)$$

を満たすとき, f は点 $p \in M$ で充満であるという. ここで, $\text{Osc}_p^k(f)$ は点 p における第 k 接触空間を表す. 明らかに, 定曲率空間へのはめ込みが充満な点をもつならば, 線型充満である. す

なわち, はめ込みの像を含む全測地的な真部分多様体は $\widetilde{M}$ 内に存在しない.

定理 3 連結な定曲率ローレンツ曲面 $M_1^2(K)$ の定曲率空間 $\widetilde{M}_t^n(c)$ への極値的等長はめ込みが充満な点をもつとする. さらに, はめ込み f が条件 (†) を満たすとき, ある正の整数が存在して

$$n = 2d, \quad t = d, \quad K = \frac{2c}{d(d+1)}$$

となる. さらに $c > 0$ のとき, f は $\psi_{2,d,1} : S_1^2(K) \rightarrow S_d^{2d}(c)$ と局所的に合同であり, $c < 0$ のとき, f は $\psi_{2,d,1}^H : H_1^2(K) \rightarrow H_d^{2d}(c)$ と局所的に合同である.

参考文献

- [1] Calabi, E.: Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, J. Differential Geometry **1**, (1967) 111–125.
- [2] Hasegawa, K. and Miura, K.: Lorentz surfaces in pseudo-Riemannian space forms with horizontal reflector lifts, in preparation.
- [3] Miura, K.: Construction of harmonic maps between semi-Riemannian spheres, Tsukuba J. Math., **31**, No. 2, (2007), 397–409.
- [4] Miura, K.: Isometric immersions with geodesic normal sections in semi-Riemannian geometry, Tokyo J. Math., **31**, No. 2, (2008), 479–488.
- [5] Miura, K.: The contact number of affine immersions, Result. Math., **56**, (2009), 245–258.