

Primal-Dual Optimization through A-G Inequality

岩本誠一 (九州大学・名誉教授), 木村寛 (秋田県立大学),
藤田敏治 (九州工業大学)

Seiichi Iwamoto (Professor Emeritus, Kyushu University),
Yutaka Kimura (Akita Prefectural University),
Toshiharu Fujita (Kyushu Institute of Technology)

概要

We consider a duality between a primal quadratic optimization problem and its dual problem through arithmetic-geometric mean inequality (A-G inequality). It is shown that optimal values and optimal solutions of these problems are characterized by the Golden number. Both optimal solutions of (primal and dual) problems have a Golden triplet, which consists of (i) Golden optimal value, (ii) Golden optimal path, and (iii) Golden complementarity. This is called the Golden complementary duality.

1 主双対最適化

1.1 フィボナッチ最適化問題

n 変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の 2 次計画問題として次の最小化問題 (P₁) を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{k=0}^{n-1} [(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2] \\ \text{(P}_1\text{)} \quad & \text{subject to} \quad \text{(i) } x \in R^n \\ & \quad \quad \quad \text{(ii) } x_0 = c. \end{aligned}$$

ただし $c \in R^1$ とする。記号 R^1 は実数全体の集合を表す。この主問題 (P₁) の双対問題は n 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ の最大化問題として次で与えられる：

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} [(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2] - \mu_n^2 \\ \text{(D}_1\text{)} \quad & \text{subject to} \quad \text{(i) } \mu \in R^n. \end{aligned}$$

定理 1 (i) 主問題 (P₁) は最小解

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k, \dots, \hat{x}_{n-1}, \hat{x}_n \right) \\ &= \frac{c}{F_{2n+1}} \left(F_{2n-1}, F_{2n-3}, \dots, F_{2n-2k+1}, \dots, F_3, F_1 \right)\end{aligned}$$

のとき、最小値 $m_1 = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}c^2$ をもつ。

(ii) 双対問題 (D₁) は最大解

$$\begin{aligned}\mu^* &= (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^*, \dots, \mu_{n-1}^*, \mu_n^*) \\ &= \frac{c}{F_{2n+1}} (F_{2n}, F_{2n-2}, \dots, F_{2n-2k+2}, \dots, F_4, F_2)\end{aligned}$$

のとき、最大値 $M_1 = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}c^2$ をもつ。

ここに $\{F_n\}$ はフィボナッチ数列(Fibonacci sequence)を表し、以下の2階線形差分方程式 (3項間漸化式)

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad x_1 = 1, x_0 = 0 \quad (1)$$

の解として定義される。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

表 1 フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

実数

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$

は黄金数(Golden number)といわれている。黄金数については次が成り立つ。

$$1 : \phi = \phi^{-2} : \phi^{-1}, \quad \phi^{-2} + \phi^{-1} = 1.$$

黄金数 ϕ は2次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (2)$$

の正の解としても定義される。

1.2 黄金最適化問題

n 変数 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の2次計画問題として次の最小化問題 (P₂) を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{k=0}^{n-1} [(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2] + \phi^{-1} x_n^2 \\ (P_2) \quad & \text{subject to} \quad (i) \ x \in R^n \\ & \quad \quad \quad (ii) \ x_0 = c. \end{aligned}$$

この双対問題は n 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ の最大化問題として次で与えられる：

$$(D_2) \quad \begin{aligned} & \text{Maximize } 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} [(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2] - \phi^{-1}\mu_n^2 \\ & \text{subject to (i) } \mu \in R^n. \end{aligned}$$

両問題の最適解は次のようになる。

定理 2 (i) 主問題 (P_2) は最小解

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}, \hat{x}_n) = c(\phi^{-2}, \phi^{-4}, \dots, \phi^{-2n+2}, \phi^{-2n})$$

で最小値 $m_2 = \phi^{-1}c^2$ をもつ。

(ii) 双対問題 (D_2) は最大解

$$\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_{n-1}^*, \mu_n^*) = c(\phi^{-1}, \phi^{-3}, \dots, \phi^{-2n+3}, \phi^{-2n+1})$$

で最大値 $M_2 = \phi^{-1}c^2$ をもつ。

補題 1 黄金数 ϕ について次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{k=1}^n \phi^{2k-1} = \phi^{2n} - 1 \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{k=1}^n \phi^{-2k} = \phi^{-1} - \phi^{-2n-1} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \text{(iii)} \quad & \phi^n + \phi^{n+1} = \phi^{n+2} \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots, \\ \text{(iv)} \quad & 2 \sum_{k=1}^n \phi^{-3k-1} + \phi^{-3n-2} = \phi^{-2} \quad n = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

定義 1 列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ は

$$x_n = c\phi^{-2n} \quad \text{または} \quad x_n = c\phi^{-n}$$

のとき、**黄金経路** (*Golden path, GP*) という。ただし、 c は定数である。前者を $1:\phi$ 型といい、後者を $\phi:1$ 型という。

主問題 (P_2) の最小解と双対問題 (D_2) の最大解の間には次の 3 つの関係が成り立っている。

1. (**双対性**) 最小値と最大値が等しい： $m_2 = M_2$. 共に初期値 c の 2 次関数で、その係数は黄金数の逆数 ϕ^{-1} である。
2. (**黄金**) 最小点 $(x_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ と最大点 $(\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*)$ は共に $1:\phi$ 型の黄金経路である。

3. (相補性) 最小点と最大点を交互に編むと、 $\phi:1$ 型の黄金経路である。

すなわち、最適点の交互列は

$$\begin{aligned} & (x_0, \mu_1^*, \hat{x}_1, \mu_2^*, \hat{x}_2, \dots, \mu_n^*, \hat{x}_n) \\ &= c(1, \phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, \dots, \phi^{-(2n-1)}, \phi^{-2n}) \end{aligned}$$

となる。

この三位一体の関係を黄金相補双対性 (Golden complementary duality, GCD) という [12, 5, 14, 15, 6, 16]。

2 相加・相乗平均不等式

定理 3 任意の $x, y \in R^1$ に対して

$$2xy \leq x^2 + y^2 \quad (3)$$

が成り立つ。等号は $x = y$ のときに限り成り立つ。

不等式 (3) は相加・相乗平均不等式 (arithmetic-geometric mean inequality) (以下、AG 不等式とよぶ) とよばれる。

補題 2 c を定数とすると、不等式

$$2c\mu_1 - \mu_1^2 - \phi^{-1}\mu_1^2 \leq (c - x_1)^2 + x_1^2 + \phi^{-1}x_1^2 \quad \forall x_1 \in R^1, \forall \mu_1 \in R^1 \quad (4)$$

が成り立つ。等号は $x_1 = \phi^{-2}c, \mu_1 = \phi^{-1}c$ のときに限り成り立つ。このとき両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ になる。

Proof. AG 不等式より、任意の実数 x_1, μ_1 に対して 2 つの不等式と等号条件

$$\begin{aligned} 2(c - x_1)\mu_1 &\leq (c - x_1)^2 + \mu_1^2; & c - x_1 &= \mu_1 \\ 2\left(\phi^{\frac{1}{2}}x_1\right)\left(\phi^{-\frac{1}{2}}\mu_1\right) &\leq \phi x_1^2 + \phi^{-1}\mu_1^2; & \phi^{\frac{1}{2}}x_1 &= \phi^{-\frac{1}{2}}\mu_1 \end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると

$$2c\mu_1 \leq [(c - x_1)^2 + \phi x_1^2] + \mu_1^2 + \phi^{-1}\mu_1^2$$

になる。 $\phi = 1 + \phi^{-1}$ であることから、すなわち (4) を得る。この等号は 2 つの等号条件が同時に成り立つとき、すなわち、 $x_1 = \phi^{-2}c, \mu_1 = \phi^{-1}c$ のとき成り立つ。このとき両辺の値が $\phi^{-1}c^2$ であることは、実際に右辺は

$$\begin{aligned} (c - x_1)^2 + x_1^2 + \phi^{-1}x_1^2 &= c^2 [(\phi^{-2} + \phi^{-4}) + \phi^{-5}] \\ &= c^2 [(\phi^{-1} - \phi^{-5}) + \phi^{-5}] \\ &= \phi^{-1}c^2. \end{aligned}$$

一方、左辺についても

$$\begin{aligned}
 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \phi^{-1}\mu_1^2 &= c^2 [2\phi^{-1} - (\phi^{-2} + \phi^{-3})] \\
 &= c^2 [2\phi^{-1} - \phi^{-1}] \\
 &= \phi^{-1}c^2
 \end{aligned}$$

より成り立つ。

補題 3 c を定数とする。 $(x_1, x_2) \in R^2$, $(\mu_1, \mu_2) \in R^2$ のとき

$$2c\mu_1 - \mu_1^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 - \phi^{-1}\mu_2^2 \leq (c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + \phi^{-1}x_2^2 \quad (5)$$

が成り立つ。等号は $x_1 = \phi^{-2}c$, $x_2 = \phi^{-4}c$, $\mu_1 = \phi^{-1}c$, $\mu_2 = \phi^{-3}c$ のときに限り成り立つ。このとき両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ になる。

Proof. AG 不等式より、任意の実数 x_1, x_2, μ_1, μ_2 に対して 4 つの不等式と等号条件

$$\begin{aligned}
 2(c - x_1)\mu_1 &\leq (c - x_1)^2 + \mu_1^2; & c - x_1 &= \mu_1 \\
 2x_1(\mu_1 - \mu_2) &\leq x_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2; & x_1 &= \mu_1 - \mu_2 \\
 2(x_1 - x_2)\mu_2 &\leq (x_1 - x_2)^2 + \mu_2^2; & x_1 - x_2 &= \mu_2 \\
 2\left(\phi^{\frac{1}{2}}x_2\right)\left(\phi^{-\frac{1}{2}}\mu_2\right) &\leq \phi x_2^2 + \phi^{-1}\mu_2^2; & \phi^{\frac{1}{2}}x_2 &= \phi^{-\frac{1}{2}}\mu_2
 \end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると

$$2c\mu_1 \leq [(c - x_1)^2 + \phi x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + \phi x_2^2] + [\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + \phi^{-1}\mu_2^2]$$

になる。 $\phi = 1 + \phi^{-1}$ であることから、すなわち (5) を得る。この等号は 4 つの等号条件が同時に成り立つとき、すなわち、

$$x_1 = \phi^{-2}c, \quad x_2 = \phi^{-4}c, \quad \mu_1 = \phi^{-1}c, \quad \mu_2 = \phi^{-3}c$$

のとき成り立つ。このとき両辺の値が $\phi^{-1}c^2$ であることは、実際に右辺は、

$$\begin{aligned}
 &(c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + \phi^{-1}x_2^2 \\
 &= c^2 [(\phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + \phi^{-8}) + \phi^{-9}] \\
 &= c^2 [(\phi^{-1} - \phi^{-9}) + \phi^{-9}] \\
 &= \phi^{-1}c^2.
 \end{aligned}$$

一方、左辺についても

$$\begin{aligned}
 &2c\mu_1 - \mu_1^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 - \phi^{-1}\mu_2^2 \\
 &= c^2 [2\phi^{-1} - (\phi^{-2} + \phi^{-4}) - (\phi^{-6} + \phi^{-7})] \\
 &= c^2 [2\phi^{-1} - (\phi^{-1} - \phi^{-5}) - \phi^{-5}] \\
 &= c^2 (2\phi^{-1} - \phi^{-1}) \\
 &= \phi^{-1}c^2
 \end{aligned}$$

より成り立つ。

定理 4 c を定数として、 $x_0 = c$ とすると、任意の $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in R^n$ に対して

$$\begin{aligned} 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} [(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2] - \phi^{-1}\mu_n^2 \\ \leq \sum_{k=0}^{n-1} [(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2] + \phi^{-1}x_n^2 \end{aligned} \quad (6)$$

が成り立つ。等号は

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = c(\phi^{-2}, \phi^{-4}, \dots, \phi^{-2n+2}, \phi^{-2n}) \quad (7)$$

$$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n) = c(\phi^{-1}, \phi^{-3}, \dots, \phi^{-2n+3}, \phi^{-2n+1}) \quad (8)$$

のときに限り成り立つ。このとき両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ になる。

Proof. AG 不等式 $2xy \leq x^2 + y^2$ ($\forall x, y \in R^1$) より、 x, μ に対して $2n$ 個の不等式と等号条件

$$\begin{aligned} 2(c - x_1)\mu_1 &\leq (c - x_1)^2 + \mu_1^2; & c - x_1 &= \mu_1 \\ 2x_1(\mu_1 - \mu_2) &\leq x_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2; & x_1 &= \mu_1 - \mu_2 \\ 2(x_1 - x_2)\mu_2 &\leq (x_1 - x_2)^2 + \mu_2^2; & x_1 - x_2 &= \mu_2 \\ &\vdots \\ 2x_{k-1}(\mu_{k-1} - \mu_k) &\leq x_{k-1}^2 + (\mu_{k-1} - \mu_k)^2; & x_{k-1} &= \mu_{k-1} - \mu_k \\ 2(x_{k-1} - x_k)\mu_k &\leq (x_{k-1} - x_k)^2 + \mu_k^2; & x_{k-1} - x_k &= \mu_k \\ &\vdots \\ 2x_{n-1}(\mu_{n-1} - \mu_n) &\leq x_{n-1}^2 + (\mu_{n-1} - \mu_n)^2; & x_{n-1} &= \mu_{n-1} - \mu_n \\ 2(x_{n-1} - x_n)\mu_n &\leq (x_{n-1} - x_n)^2 + \mu_n^2; & x_{n-1} - x_n &= \mu_n \\ 2\left(\phi^{\frac{1}{2}}x_n\right)\left(\phi^{-\frac{1}{2}}\mu_n\right) &\leq \phi x_n^2 + \phi^{-1}\mu_n^2; & \phi^{\frac{1}{2}}x_n &= \phi^{-\frac{1}{2}}\mu_n \end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると

$$\begin{aligned} 2c\mu_1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} [(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2] + \phi^{-1}x_n^2 \\ + \mu_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} [(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2] + \phi^{-1}\mu_n^2 \end{aligned}$$

になる。 $\phi = 1 + \phi^{-1}$ であることから、すなわち (6) を得る。 $2n$ 個の等号条件が同時に成り立つとき、この等号は成り立つ。しかも $2n$ 連立 $2n$ 元 1 次方程式は唯一の解 (7), (8) を

もつ。このとき両辺の値が $\phi^{-1}c^2$ であることは、実際に右辺は、

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{n-1} [(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2] + \phi^{-1}x_n^2 \\
 &= c^2 \left[\sum_{k=1}^{2n} \phi^{-2k} + \phi^{-4n-1} \right] \\
 &= c^2 [(\phi^{-1} - \phi^{-4n-1}) + \phi^{-4n-1}] \\
 &= \phi^{-1}c^2.
 \end{aligned}$$

一方、左辺についても

$$\begin{aligned}
 & 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} [(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2] - \phi^{-1}\mu_n^2 \\
 &= c^2 \left[2\phi^{-1} - \sum_{k=1}^{2n-2} \phi^{-2k} - (\phi^{-4n+2} + \phi^{-4n+1}) \right] \\
 &= c^2 [2\phi^{-1} - (\phi^{-1} - \phi^{-4n+3}) - \phi^{-4n+3}] \\
 &= c^2 (2\phi^{-1} - \phi^{-1}) \\
 &= \phi^{-1}c^2
 \end{aligned}$$

より成り立つ。

参考文献

- [1] E.F. Beckenbach and R.E. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Ergebnisse **30**, 1961.
- [2] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).
- [3] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming I, II, III, J. Math. Anal. Appl. **58**(1977), 113–134, 247–279, 439–448.
- [4] S. Iwamoto, Dynamic programming approach to inequalities, J. Math. Anal. Appl. **58**(1977), 687–704.
- [5] Iwamoto, S., “Golden optimal policy in calculus of variation and dynamic programming,” *Advances in Mathematical Economics* Vol.10, 2007, pp.65–89.
- [6] 岩本 誠一, 「動学的最適化における黄金最適政策、小特集：経済分析と最適化の数理」, 三田学会雑誌 (慶應義塾経済学会), 第 99 巻 4 号, 2007 年, pp.101–125.

- [7] S. Iwamoto, On Bellman's allocation processes, *J. Math. Anal. Appl.* **111**(1985), no. 1, 65–89.
- [8] S. Iwamoto, R.J. Tomkins and C.-L. Wang, Inequalities and mathematical programming III, Proceedings of the 5th International Conference on General Inequalities, Oberwolfach, West Germany, May 1986, *General Inequalities V*, Ed. W. Walter, Birkhauser Verlag, Basel and Stuttgart, ISNM (1987), 419–432.
- [9] 岩本誠一、動的計画論、九大出版会、1987.
- [10] 岩本誠一、最適経路 — フィボナッチから黄金へ —、「不確実性下における意思決定問題」、京大数理研講究録 1734、2011年3月、pp. 196–204.
- [11] S. Iwamoto, On Fibonacci identities, *preprint*.
- [12] 岩本 誠一、最適化の数理II ベルマン方程式 (Mathematics for Optimization II Bellman Equation)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書5」、知泉書館、2013年11月、pp.451.
- [13] 岩本 誠一、吉良 知文、植野 貴之、ダ・ヴィンチ・コード、経済学研究 (九大経済学会)、第76巻(2009年10月) 23号, pp.1–22.
- [14] S. Iwamoto and M. Yasuda, “Dynamic programming creates the Golden Ratio, too,” *Proc. of the Sixth Intl Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2004)*, Ballarat, Australia, December, 2004.
- [15] S. Iwamoto and M. Yasuda, Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes, Ed. S. Elaydi, K. Nishimura, M. Shishikura and N. Tose, *Advanced Studies in Pure Mathematics 53*, June 2009, *Advances in Discrete Dynamic Systems*, pp.77–86. Proceedings of The International Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA2006), Kyoto University, Kyoto, Japan, July, 2006.
- [16] A. Kira and S. Iwamoto, Golden complementary dual in quadratic optimization, Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Proceedings of the Fifth International Confernece (MDAI 2008), Sabadell (Barcelona), Catalonia, Spain, October 30-31, 2008, Eds. V. Torra and Y. Narukawa, Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.