

確率解析的くりこみ理論

Fumio Hiroshima (廣島 文生)
九州大学 大学院数理学研究院

1 紫外切断のくりこみ理論

ここで紹介するのは M. Gubinelli, F. Hiroshima, J. Lörinczi [GHL13] のレビューである。場の量子論のスカラ場モデルを考える。それは N -粒子 Nelson 模型と言われるものであるが、物理的な背景の説明は省略して、数学的な構造のみを簡単に述べることにする。Nelson 模型は Edward Nelson により 1964 年 [Nel64a] に厳密に数学的な解析が行われた模型である。Nelson 模型の Hamiltonian は、はじめに紫外切断関数を導入して自己共役作用素として定義され、しかるべき方法で、紫外切断を外して、紫外切断のない自己共役作用素として定義される。もちろん、こういう処方が上手くいくことはほとんどない。簡単に出来るものとしては、著者の知っている限り、ここで述べる Nelson 模型くらいしか知られていないようである。Fock 表現で、その Hamiltonian は

$$H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} H_I(x) dx \quad (1.1)$$

で与えられる。Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}$ 上の自己共役作用素である。Fock 空間とは $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}$ で定義される。ただし $\mathcal{F}^{(n)} = \bigotimes_{\text{sym}}^n L^2(\mathbb{R}^d)$ は n -粒子部分空間を表し、 $\mathcal{F}^{(0)} = \mathbb{C}$ である。 $\mathcal{F}$ 上のノルムは $\|F\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{F}^{(n)}}^2$ で与えられる。Fock 真空を $\mathbb{1}_{\mathcal{F}} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \in \mathcal{F}$ で表し、混乱がないときは簡単に $\mathbb{1}$ と書くことにする。 N -粒子 Schrödinger 作用素は

$$H_p = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_j + V$$

で与えられる。 $a^*(f)$ と $a(f)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, は生成作用素と消滅作用素を表し、正準交換関係 $[a(f), a^*(g)] = (\bar{f}, g)$, $[a(f), a(g)] = 0 = [a^*(f), a^*(g)]$ を満たす。形式的に $a^{\sharp}(f) = \int a^{\sharp}(k) \hat{f}(k) dk$ と書く。 $\omega(k) = |k|$ は dispersion relation を表す。場の自由 Hamiltonian を H_f とかき、これは ω の第 2 量子化作用素で定義される:

$$H_f \prod_{j=1}^n a^*(f_j) \mathbb{1} = \sum_{j=1}^n a^*(f_1) \cdots a^*(\omega f_j) \cdots a^*(f_n) \mathbb{1}, \quad H_f \mathbb{1} = 0.$$

相互作用は

$$H_I(x) = g \sum_{j=1}^N \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \left(\hat{\varphi}(k) e^{ik \cdot x_j} a(k) + \hat{\varphi}(-k) e^{-ik \cdot x_j} a^*(k) \right) dk \quad (1.2)$$

で与えられる. $\mathcal{H} \cong L^2(\mathbb{R}^{3N}; \mathcal{F})$ の同一視をする. この同一視の下で相互作用は $(H_1 F)(x) = H_1(x)F(x)$ と作用する. 関数 φ は Hamiltonian が作用素として well defined になるために必要であり紫外切断関数といわれる. 典型的な例として $\hat{\varphi} = \mathbb{1}_{|k| < \Lambda}$ がある. $g \in \mathbb{R}$ は結合定数である. 仮定 $\hat{\varphi}/\omega^{1/2}, \hat{\varphi}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k)$ の下で H は $D(H_p \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes H_f)$ 上で下から有界な自己共役作用素になる. さらに赤外切断が

$$\hat{\varphi}/\omega^{3/2} \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (1.3)$$

によって導入されれば, スペクトルの下限に対応する固有状態 $\Psi \in \mathcal{H}$ が存在する. つまり基底状態が存在する. また条件 (1.3) は基底状態存在の必要条件にもなっている. H の 1 点極限を考える. つまり $\varphi(x) \rightarrow (2\pi)^{3/2}\delta(x)$ または $\hat{\varphi}(k) \rightarrow \mathbb{1}$. この極限の存在は [Nel64a] で作用素論的な手法で示されているが, これを汎関数積分で証明するというのが我々の主定理である. Nelson 自身も [Nel64b] で汎関数積分によるくりこみを考えていたようであるが, 成功には至らなかったようである. 汎関数積分を使うことの利点は, 模型の形に依らずにくりこみ理論が展開できるところにある. 例えば H_p を相対論的な Schrödinger 作用素 $\sqrt{-\Delta + m^2} + V$ に換えた模型に対しても, 我々の方法でくりこみが可能であると信じている.

さて, この極限を考えるために紫外切断 (UV) 関数として $\hat{\varphi}_\varepsilon(k) = -\varepsilon|k|^2/2$ をとる. この紫外切断によって Hamiltonian H_ε を定義し $\varepsilon > 0$ を UV パラメータとみなす. そして $H_\varepsilon - E_\varepsilon$ の $\varepsilon \downarrow 0$ 極限を考える. ここで $E_\varepsilon \in \mathbb{R}$ はくりこみ項である. これは具体的に後で与える. 主定理は以下である. (1) 汎関数積分をつかって E_ε を自然に導きだす. (2) $H_{\text{ren}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (H_\varepsilon - E_\varepsilon)$ を半群の意味で示す. (3) H_{ren} のポテンシャルを導く.

2 正則化された Hamiltonian の汎関数積分表示

$\mathbb{1}_\lambda(k) = \begin{cases} 1, & \omega(k) < \lambda \\ 0, & \omega(k) \geq \lambda \end{cases}$ とし $\mathbb{1}_\lambda^\perp(k) = 1 - \mathbb{1}_\lambda(k)$ とおく. 赤外切断 $\lambda > 0$ を仮定する. 簡単のために $V = 0$ とする. 正則化された Hamiltonian を

$$H_\varepsilon = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + g \int_{\mathbb{R}^{3N}}^\oplus \overline{H_1^\varepsilon(x)} dx, \quad \varepsilon > 0,$$

で定義する. $H_1^\varepsilon(x) = g \sum_{j=1}^N \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} (\hat{\varphi}_\varepsilon(k) e^{-ik \cdot x_j} a(k) + \hat{\varphi}_\varepsilon(-k) e^{ik \cdot x_j} a^*(k)) dk$ である. 主目的は H_ε で $\varepsilon \downarrow 0$ の極限を考えることである.

$$E_\varepsilon = -\frac{g^2}{2} N \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\lambda^\perp dk$$

としよう. ここで $\beta(k) = \frac{1}{\omega(k) + |k|^2/2}$. $E_\varepsilon \rightarrow -\infty$ ($\varepsilon \downarrow 0$) に注意せよ. 主定理は以下である.

定理 2.1 次のを満たす下から有界な自己共役作用素 H_{ren} が存在する.

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon - E_\varepsilon)} = e^{-tH_{\text{ren}}}, \quad t \geq 0.$$

$(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ は $3N$ 次元のブラウン運動を表すとする. 次の命題はよく知られている [LHB12, Chapter 6].

命題 2.2 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう. このとき

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_\epsilon} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_\epsilon} \right].$$

ここで $S_\epsilon = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T dt W_\epsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$ はペア相互作用でペアポテンシャルは

$$W_\epsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-\epsilon|k|^2} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\lambda^\perp dk \quad (2.1)$$

で与えられる.

次の関数を考えよう.

$$E_\epsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\epsilon|k|^2} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\lambda^\perp dk, \quad \epsilon \geq 0.$$

命題 2.3 関数 S_0^{ren} で次を満たすものが存在する.

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^x \left[e^{\frac{g^2}{2} (S_\epsilon - 4NTE_\epsilon(0,0))} \right] = \mathbb{E}_W^x \left[e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}} \right].$$

$W_\epsilon(x, t)$ は滑らかで, $W_\epsilon(x, t) \rightarrow W_0(x, t)$ ($\epsilon \downarrow 0$) が $(x, t) \neq (0, 0)$ で成り立つ. ここで

$$W_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\lambda^\perp dk.$$

しかし $W_\epsilon(0, 0) \rightarrow \infty$ ($\epsilon \downarrow 0$) で, $W_0(x, t)$ は $(x, t) = (0, 0)$ で特異性をもつ. 命題 2.3 を証明しよう. $T > 0$ を固定する. $\epsilon \downarrow 0$ のとき相互作用の対角成分だけが特異な項である. また $0 < \tau \leq T$ を固定し,

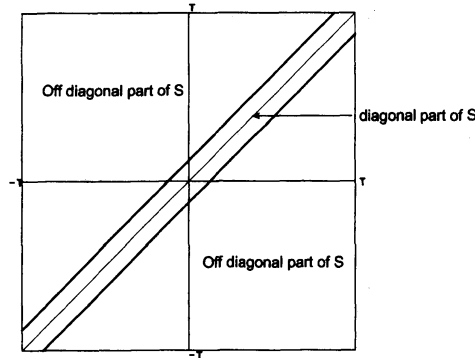


図 1: S_ϵ の対角成分と非対角成分

$[t]_T = -T \vee t \wedge T$ としよう. 正則化された相互作用を対角成分と非対角成分にわけると: $S_\epsilon = S_\epsilon^d + S_\epsilon^{\text{od}}$. ここで $S_\epsilon^d = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} dt W_\epsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$, $S_\epsilon^{\text{od}} = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{[s+\tau]_T}^T dt W_\epsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$. である. S_ϵ^d は S_ϵ を対角成分の近傍 $\{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |t| \leq T\}$ で積分したもの, そして S_ϵ^{od} はそれ以外の部分を表す. $\tau = T$ のときは $S_\epsilon^{\text{od}} = 0$ となる. 次の補題はすぐにわかる.

補題 2.4 パスごとに $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} S_\varepsilon^{\text{od}} = S_0^{\text{od}}$. ここで S_0^{od} は $S_\varepsilon^{\text{od}}|_{\varepsilon=0}$ である.

確率積分をつかえば解析が困難な項 S_ε^{d} を評価できる. くりこまれた作用を次のように定義する:

$$S_\varepsilon^{\text{ren}} = S_\varepsilon - 4NTE_\varepsilon(0, 0), \quad \varepsilon > 0.$$

これは $S_\varepsilon^{\text{ren}} = S_\varepsilon^{\text{od}} + X_\varepsilon + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon$ のように表せる. ここで

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T E_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) ds, \quad Y_\varepsilon = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla E_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) \cdot dB_t, \\ Z_\varepsilon &= -2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T E_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s) ds. \end{aligned}$$

X_ε , $S_\varepsilon^{\text{od}}$ と Z_ε は簡単に評価できる.

補題 2.5 (1) ある定数 c_z と c_s が存在して $|Z_\varepsilon| \leq c_z T$ と $|S_\varepsilon^{\text{od}}| \leq c_s(T+1)$ がパスと $\varepsilon \geq 0$ に一様に成立する.

(2) 全ての $\alpha > 0, \varepsilon \geq 0, T > 0$ に対して $\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x[e^{\alpha|X_\varepsilon|}] \leq e^{c_X \alpha T}$ を満たす定数 c_X が存在する.

Y_ε について考えよう. $\varepsilon > 0$ のときは Fubini の定理より確率積分とルベグ積分を交換してもいい. よって $Y_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \Phi_{\varepsilon,t}^i dB_t^i$. ここで $\Phi_{\varepsilon,t} = (\Phi_{\varepsilon,t}^1, \dots, \Phi_{\varepsilon,t}^N)$ は $\mathbb{R}^{3N}$ に値をとる確率過程:

$$\Phi_{\varepsilon,t}^i = 2 \sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t \nabla E_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s) ds.$$

Y_0 を $Y_0 = \sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \Phi_{0,t}^i dB_t^i$ で定義する.

補題 2.6 ある定数 c_Y が存在して, 任意の $\alpha > 0$ に対して $\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x[e^{\alpha Y_\varepsilon}] \leq e^{c_Y(\alpha^2 T + \alpha)}$ ($\varepsilon \geq 0$). また

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^x[|Y_\varepsilon - Y_0|^2] = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^{3N}).$$

証明: $\Phi_{\varepsilon,t}^i$ はフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq -T}$ に adapted なマルチンゲールである.

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt &\leq 4 \sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \left[\sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t |\nabla E_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)| ds \right]^2 dt \\ &\leq 4c^2 N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-\theta} |t-s|^{-(1-\theta)} ds \right]^2 dt \end{aligned}$$

となる. ここで Jensen の不等式 と $|\nabla E_\varepsilon(x, t)| \leq c|x|^{-\theta}|t|^{-(1-\theta)}, \theta \in [0, 1]$ を使った. この評価は $\varepsilon \in [0, 1]$

に一樣である。適当な $\frac{1}{2} < \theta < 1$ に対して, Schwartz の不等式を使えば

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt &\leq 4c^2 N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds \right] \left(\int_{[t-\tau]_T}^t |t-s|^{-2(1-\theta)} ds \right) dt \\ &\leq 4c^2 \tau^{2\theta-1} N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds \right] dt \leq 4c^2 \tau^{2\theta-1} N Q. \end{aligned}$$

ここで c は定数で ε に依らない。また $Q = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} dt$. Girsanov の定理から

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}_W^x [e^{\alpha Y_\varepsilon}])^2 &\leq \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha \int_{-T}^T \Phi_{\varepsilon,t} \cdot dB_t - \frac{1}{2} (2\alpha)^2 \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt} \right] \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha^2 \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt} \right] \\ &= \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha^2 \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt} \right] \leq \mathbb{E}_W^x [e^{\gamma Q}]. \end{aligned}$$

ここで $\gamma = 8c\sqrt{N}\alpha^2\tau^{2\theta-1}$. Jensen の不等式をもう一度つかって

$$\mathbb{E}_W^x [e^{\gamma Q}] \leq \int_{-T}^T \frac{ds}{2T} \mathbb{E}_W^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_s^{s+\tau} |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} dt} \right].$$

ここで $[s+\tau]_T \leq s+\tau$ を使った。条件付き期待値をとってマルコフ性を使えば

$$\mathbb{E}_W^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_{s+t}^i - B_s^j|^{-2\theta} dt} \right] = \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{E}^{B_s} \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i - B_0^j|^{-2\theta} dt} \right] \right].$$

関数 $|x|^{-2\theta}$ は Kato クラスなので

$$\sup_{x,z \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x [e^{\beta \int_0^\tau |B_s^i + z|^{-2\theta} ds}] = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x [e^{\beta \int_0^\tau |B_s^i|^{-2\theta} ds}] \leq e^{c\tau\beta}$$

が適当な $c > 0$ と全ての $\beta > 0$ で成り立つ。これから

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x [e^{\gamma Q}] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \int_{-T}^T \frac{ds}{2T} \mathbb{E}_W^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_{s+t}^i - B_s^j|^{-2\theta} dt} \right] \leq e^{c\alpha^2 T}.$$

よって $\sup_{\varepsilon \in (0,1]} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x [e^{2\alpha Y_\varepsilon}] \leq e^{c(\alpha^2 T + \alpha)}$ が全ての $\alpha \in \mathbb{R}$ で成り立つ。同様に全ての $0 < \varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t} - \Phi_{0,t}|^2 dt &\leq 4c_\varepsilon^2 N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds \right] \left(\int_{[t-\tau]_T}^t |t-s|^{-2(1-\theta)} ds \right) dt \\ &\leq 4c_\varepsilon^2 \tau^{2\theta-1} N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds \right] dt \leq 4c_\varepsilon^2 \tau^{2\theta-1} N Q. \end{aligned}$$

ここで $|\nabla E_\varepsilon(x, t) - \nabla \varphi_0(x, t)| \leq c_\varepsilon |x|^{-\theta} |t|^{-(1-\theta)}$, $\theta \in [0, 1]$ をつけた。 $c_\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$) に注意せよ。 Φ_ε の収束は Y_ε が Y_0 に収束することも意味する。 $\square$

補題 2.7 全ての $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, と $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x [f(B_{-T}) h(B_T) e^{\alpha S_\varepsilon^{\text{ren}}}] \leq \|f\| \|h\| e^{c_{\text{ren}}(\alpha^2 T + \alpha T + \alpha)}$$

を満たす定数 c_{ren} が存在する。

証明: 補題 2.5 と 2.6 から従う。 $\square$

3 主定理

補題 3.1 $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W \left[|e^{\alpha U_\varepsilon(x)} - e^{\alpha U_0(x)}| \right] = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{3N}, \quad U = \text{od}, X, Y, Z. \quad (3.1)$$

証明: $U = X$ としよう. $V_C(x) = C \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{|x^i - x^j|}$ とする. このとき

$$\begin{aligned} |X_\varepsilon(x)| &\leq \int_{-T}^T V_C(B_s^1 + x^1, \dots, B_s^N + x^N) ds, \\ \mathbb{E}_W \left[|e^{\alpha X_\varepsilon(x)} - e^{\alpha X_0(x)}| \right] &\leq 2\mathbb{E}_W \left[|e^{\alpha \int_{-T}^T V_C(B_s^1 + x^1, \dots, B_s^N + x^N) ds}| \right] < \infty \end{aligned}$$

がわかる. $X_\varepsilon(x) \rightarrow X_0(x)$ a.s. なのでルベークの優収束定理より (3.1) がわかる. $U = Y$ としよう. $\mathbb{E}_W^x [e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)} - 1] \rightarrow 0$ を示せば十分. $\mathbb{E}_W^x [(e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)} - 1)^2] = \mathbb{E}_W^x [e^{2\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}] + 1 - 2\mathbb{E}_W^x [e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}]$ だから $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^x [e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}] = 1$ を示す. 確率変数 $\delta\Phi_t = \Phi_{\varepsilon,t} - \Phi_{0,t}$ を $Y_\varepsilon - Y_0 = \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t$ となるように定義する. Girsanov の定理から $1 = \mathbb{E}_W^x [e^{\alpha \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t - \frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt}]$. 故に

$$\left(\mathbb{E}_W^x [e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}] - 1 \right)^2 \leq \mathbb{E}_W^x [e^{2\alpha \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t}] \mathbb{E}_W^x \left[\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt} \right)^2 \right]. \quad (3.2)$$

また

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x [e^{2\alpha \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t}] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \left(\mathbb{E}_W^x [e^{4\alpha^2 \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt}] \right)^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$\mathbb{E}_W^x \left[\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt} \right)^2 \right] \leq \mathbb{E}_W^x \left[\left| \frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt \right|^2 \right] \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0). \quad (3.4)$$

(3.4) は補題 2.6 で示されている. (3.3) の右辺は ε に一様に有界. 故に (3.2) の右辺はゼロに収束するところがわかる. $U = Z$ としよう. $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x [e^{\alpha(Z_\varepsilon - Z_0)} - 1] \rightarrow 0$ を示せばいい.

$$Z_\varepsilon(x) - Z_0(x) = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} \left(e^{-ik \cdot (B_{[s+\tau]T-s}^i + x^i - B_{[s+\tau]T-s}^j - x^j)} e^{-([s+\tau]T-s)\omega(k)} \right) \frac{\beta(k)}{\omega(k)} \mathbb{1}_\lambda^\perp(1 - e^{-\varepsilon|k|^2}) dk$$

がわかる. $\eta_\varepsilon(x) = \alpha(Z_\varepsilon(x) - Z_0(x))$ としよう. 直接 $|\eta_\varepsilon(x)|^n \leq c^n \alpha^n T^n \varepsilon^n$ が x に依らない適当な定数 c で成り立つことがわかる. よって $\mathbb{E}_W[e^{\eta_\varepsilon(x)}] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \mathbb{E}_W[\eta_\varepsilon(x)^n]$. そして $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \mathbb{E}_W[|\eta_\varepsilon(x)|^n] \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} c^n T^n \varepsilon^n \rightarrow 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$) が x に一様に成り立つ. よって $U = Z$ のとき成り立つ. $U = S^{\text{od}}$ のときも同様にわかる. □

補題 3.2 $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう. このとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x [f(B_{-T}) h(B_T) e^{\alpha S_\varepsilon^{\text{ren}}}] = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x [f(B_{-T}) h(B_T) e^{\alpha S_0^{\text{ren}}}]$$

証明: $S_\varepsilon = S_\varepsilon^{\text{od},T} + X_\varepsilon + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon$ と telescoping によつて

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x [f(B_{-T})h(B_T) (e^{\alpha S_\varepsilon^{\text{ren}}} - e^{\alpha S_0^{\text{ren}}})] \right| \leq \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx |f(x)| (\mathbb{E}_W^x [|h(B_T)|^2])^{1/2} E_\varepsilon(x).$$

ここで $E_\varepsilon(x) = (\mathbb{E}_W^x [(e^{\alpha S_\varepsilon} - e^{\alpha S_0})^2])^{1/2}$. また $\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} E_\varepsilon(x) < \infty$ かつ $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_\varepsilon(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^{3N}$) なのでルベーグの収束定理より補題が従う. $\square$

補題 3.3 次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}} \right]. \quad (3.5)$$

ここで

$$\begin{aligned} S_0^{\text{ren}} = & 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T E_0(B_s^i - B_s^j, 0) ds + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{-T}^t \nabla E_0(B_t^i - B_s^j, t-s) ds \right) \cdot dB_t \\ & - 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T E_0(B_T^i - B_s^j, T-s) ds. \end{aligned} \quad (3.6)$$

そして S_0^{ren} の被積分関数は

$$E_0(X, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ikX} e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\lambda^\perp dk, \quad \nabla E_0(X, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-ik e^{-ikX} e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\lambda^\perp dk.$$

証明: Feynman-Kac 型積分表示より

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\text{ren}}} \right] dx$$

である. 右辺は $\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x [\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}}] dx$ ($\varepsilon \downarrow 0$) に収束する. よつて (3.5) がわかる. また $\tau = T$ とすれば (3.6) がわかる. $\square$

さて $f \otimes \mathbb{1}$ からもっと一般的なベクトル $f \otimes F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) \mathbb{1} \in \mathcal{H}$ へ拡張する. ここで $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ を次で定義しよう.

$$\mathcal{D} = \{f \otimes F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) \mathbb{1} \mid F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}, f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})\}.$$

補題 3.4 $\Phi = f \otimes F(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n)) \mathbb{1}$, $\Psi = h \otimes G(\phi(v_1), \dots, \phi(v_m)) \mathbb{1} \in \mathcal{D}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\Phi, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N E_\varepsilon(0,0))} \Psi) = & (2\pi)^{-(n+m)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} dK_1 dK_2 \widehat{F}(K_1) \widehat{G}(K_2) \\ & \times \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}} + \frac{1}{4} \xi(K_1, K_2)} \right]. \end{aligned}$$

ここで $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$ として

$$\begin{aligned} \xi(K_1, K_2) = & -\|K_1 \cdot u/\sqrt{\omega}\|^2 - \|K_2 \cdot v/\sqrt{\omega}\|^2 - 2(K_1 \cdot u/\sqrt{\omega}, e^{-2T\omega} K_2 \cdot v/\sqrt{\omega}) \\ & - 2ig \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{K_1 \cdot \hat{u}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_{\lambda}^{\perp} e^{-|s-T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j} \\ & + 2ig \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{K_2 \cdot \hat{v}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_{\lambda}^{\perp} e^{-|s+T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j}. \end{aligned}$$

証明: $F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n))\mathbb{1} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{F}(K) e^{i\phi(K \cdot f)} \mathbb{1} dK$ に気をつければ

$$\begin{aligned} & (\Phi, e^{-2T(H_{\varepsilon} + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0))} \Psi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2}} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} dK_1 dK_2 \widehat{F}(K_1) \widehat{G}(K_2) (f \otimes e^{-i\phi(K_1 \cdot f)} \mathbb{1}, e^{-2T(H_{\varepsilon} + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0))} h \otimes e^{-i\phi(K_2 \cdot h)} \mathbb{1}). \end{aligned}$$

あとは簡単な考察から主張が従う. $\square$

Nelson Hamiltonian の紫外切断のくりこみ理論で最も本質的な部分が $H_{\varepsilon} + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある.

補題 3.5 定数 $C \in \mathbb{R}$ があって $H_{\varepsilon} + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0) > C$ が $\varepsilon > 0$ に一様に成り立つ.

証明: 補題 2.5 と 2.6 から, 定数 a_5 と b_5 が存在して $\left(\mathbb{E}_W \left[e^{2(S_{\varepsilon}^{\text{od},T}(x) + X_{\varepsilon}(x) + Y_{\varepsilon}(x) + Z_{\varepsilon}(x))} \right] \right)^{1/2} \leq a_5 e^{b_5 T}$ が全ての $T > 0$ で成立することがわかる. 関数 $W_{\text{har}}(x^1, \dots, x^N) = \sum_{j=1}^N |x^j|^2$ を考えよう. H_{ε} に δW_{har} を加えたものを $H_{\varepsilon}(\delta)$ と表す. もちろん $\delta \geq 0$. そうすれば $H_{\varepsilon}(\delta)$ ($\delta > 0$) は, 一意的な至るところ正の基底状態 $\Psi_{\varepsilon}(\delta)$ をもつことは示せる. $\Psi_{\varepsilon}(\delta) > 0$ であり, 特に $(f \otimes \mathbb{1}, \Psi_{\varepsilon}(\delta)) \neq 0$ が任意の $0 \leq f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. ここで $f \neq 0$. その結果

$$\inf \sigma(H_{\varepsilon}(\delta) + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0)) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log(f \otimes \mathbb{1}, e^{-T(H_{\varepsilon}(\delta) + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0))} f \otimes \mathbb{1}) \quad (3.7)$$

が $0 \leq f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ.

$$\begin{aligned} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_{\varepsilon}(\delta) + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0))} f \otimes \mathbb{1}) &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [f(B_{-T}) f(B_T) e^{-\int_{-T}^T \delta W_{\text{har}}(B_s) ds} e^{S_{\varepsilon}^{\text{ren}}}] \\ &\leq \|f\|^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W \left(\left[e^{2(S_{\varepsilon}^{\text{od},T}(x) + X_{\varepsilon}(x) + Y_{\varepsilon}(x) + Z_{\varepsilon}(x))} \right] \right)^{1/2} \leq \|f\|^2 a_5 e^{b_5 T}. \end{aligned}$$

これは (3.7) から $\inf \sigma(H_{\varepsilon}(\delta) + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0)) + \frac{b_5}{2} \geq 0$, $\delta > 0$, を意味する. 大事なことは b_5 が δ に依っていないことである. よって $|(F, e^{-2T(H_{\varepsilon}(\delta) + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0))} G)| \leq \|F\| \|G\| e^{b_5 T}$ が従う. $F, G \in \mathcal{H}$ としよう. Feynman-Kac 型積分表示から

$$(F, e^{-2TH_{\varepsilon}(\delta)} G) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_{-T}^T \delta W_{\text{har}}(B_s) ds} (\mathbb{1}_{-T} F(B_{-T}), e^{-\phi_{\mathbb{B}}(\int_{-T}^T \sum_{j=1}^N \tilde{\varphi}_s(\cdot - B_s^j) ds)} \mathbb{1}_T G(B_T)) \right].$$

ルベーク優収束定理から $\lim_{\delta \downarrow 0} (F, e^{-2T(H_{\varepsilon}(\delta) + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0))} G) = (F, e^{-2T(H_{\varepsilon}(0) + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0))} G)$ なので

$$|(F, e^{-2T(H_{\varepsilon}(0) + g^2 NE_{\varepsilon}(0,0))} G)| \leq \|F\| \|G\| e^{b_5 T}.$$

$H_\varepsilon = H_\varepsilon(0)$ なので

$$\inf \sigma(H_\varepsilon + g^2 NE_\varepsilon(0,0)) + \frac{b_5}{2} \geq 0.$$

$C = -\frac{b_5}{2}$ とおけば系が従う. □

定理 2.1 の証明:

$F, G \in \mathcal{H}, C_\varepsilon(F, G) = (F, e^{-t(H_\varepsilon + g^2 NE_\varepsilon(0,0))} G)$ としよう. $F, G \in \mathcal{D}$ に対して $C_\varepsilon(F, G)$ が $\varepsilon \downarrow 0$ で収束することがわかる. 一様な不等式

$$\|e^{-t(H_\varepsilon + g^2 NE_\varepsilon(0,0))}\| < e^{-tC}$$

と $\mathcal{D}$ が $\mathcal{H}$ で稠密ということから $\{C_\varepsilon(F, G)\}_\varepsilon$ がコーシー列となる. $C_0(F, G) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} C_\varepsilon(F, G)$ とする. そうすれば $|C_0(F, G)| \leq e^{-tC} \|F\| \|G\|$. Riesz の定理より有界作用素 T_t で $C_0(F, G) = (F, T_t G)$, $F, G \in \mathcal{H}$, となるものが存在する. よって $s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon + g^2 NE_\varepsilon(0,0))} = T_t$. さらに

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon + g^2 NE_\varepsilon(0,0))} e^{-s(H_\varepsilon + g^2 NE_\varepsilon(0,0))} = s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-(t+s)(H_\varepsilon + g^2 NE_\varepsilon(0,0))} = T_{t+s}.$$

左辺は $T_t T_s$ なので T_t の半群性が従う. $e^{-t(H_\varepsilon + g^2 NE_\varepsilon(0,0))}$ は対称なので, T_t も対称. また $(F, T_t G)$ は $t = 0$ で $F, G \in \mathcal{D}$ に対して連続になることもわかる. $\mathcal{D}$ は $\mathcal{H}$ で稠密, $\|T_t\|$ は $t = 0$ の近傍で一様に有界なので, T_t は $t = 0$ で強連続になる. 故に下から有界な自己共役作用素 H_{ren} で $T_t = e^{-tH_{\text{ren}}}$, $t \geq 0$, となるものが存在することがわかる. $E_\varepsilon = -g^2 NE_\varepsilon(0,0)$ と置けば証明完了. □

系 3.6 H_{ren} のペアポテンシャルは $\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}$ である.

証明: 補題 3.3 によって $(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_{\text{ren}}} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}} \right]$ なので系が示される. □

参考文献

- [GHL13] M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lorinczi, Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration, preprint 2013.
- [LHB12] J. Lörinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space. With Applications into Rigorous Quantum Field Theory*, Studies in Mathematics **34**. de Gruyter 2012.
- [Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1990–1997.
- [Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, In *Proc. Conference on Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal (eds.), page 87. MIT Press, 1964.