

CMPP 予想についての注意

(Remarks on CMPP conjecture)

東京科学大学情報理工学院 土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*

Department of Mathematical and Computing Science, School of Computing, Institute of Science Tokyo

1 はじめに

Rogers-Ramanujan 分割定理 (以下, RR 分割定理) の一般化として, Andrews-Gordon 分割定理

$0 \leq a \leq k$ を固定する (ただし $k \geq 1$). 任意の $n \geq 0$ について, n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ で, 条件 (A) を満たすものは, 条件 (B) を満たすものと同数存在する.

(A) $f_1(\lambda) \leq a$ かつ $1 \leq \forall i \leq \ell - k, \lambda_i - \lambda_{i+k} \geq 2$.

(B) $1 \leq \forall i \leq \ell, \lambda_i \not\equiv 0, \pm(a+1) \pmod{2k+3}$.

を思い出す [17, §3.2] ($k=1$ が RR 分割定理である). ここで $f_i(\lambda) = |\{j \mid \lambda_j = i\}|$ は λ 中の i の個数である. 条件 (A) は「 $f_1(\lambda) \leq a$ かつ $\forall i \geq 1, f_i(\lambda) + f_{i+1}(\lambda) \leq k$ 」とも言いかえられることを注意する. この一般化として Capparelli-Meurman-Primc-Primc 予想 (以下, CMPP 予想) があり, 2024 年 10 月の RIMS 研究集会「組合せ論的表現論の発展」で, 共著論文 [6] について発表させていただいた.

2 CMPP 予想

CMPP 予想 [2, 12] は 3 つの命題からなる. まず, 適当な $\ell+1$ 色分割からなる集合 $\text{CMPP}_1(k_0, \dots, k_\ell)$ を定義しよう (ここで $\ell \geq 1$ で, $k_0, \dots, k_\ell \geq 0$ である). 例で説明したほうが分かりやすいと思われるので, $\ell=3$ で説明する. 与えられた $k_0, \dots, k_3$ について, 以下のような配列を考える.

k_3	f_1	f_3	f_5	f_7	
	0	f_2	f_4	f_6	f_8
k_2	f_1	f_3	f_5	f_7	
	0	f_2	f_4	f_6	$f_8 \dots$
k_1	f_1	f_3	f_5	f_7	
	0	f_2	f_4	f_6	f_8
k_0	f_1	f_3	f_5	f_7	

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University, JSPS Kakenhi Grant 23K03051, JST CREST Grant Number JPMJCR2113, Japan.

ここで、下の一段目が 0 色目の色がついた奇数分割 $\lambda^{(0)}$ の $f_1(\lambda^{(0)}), f_3(\lambda^{(0)}), \dots$ を意味しており、下から 2 段目と 3 段目が 1 色目の色がついた分割 $\lambda^{(1)}$ の $f_1(\lambda^{(1)}), f_2(\lambda^{(1)}), \dots$ を意味している。この調子で、上の 1 段目と 2 段目が ℓ 色目の色がついた分割 $\lambda^{(\ell)}$ の $f_1(\lambda^{(\ell)}), f_2(\lambda^{(\ell)}), \dots$ を意味している。 $\ell+1$ 色分割 $\lambda = (\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(\ell)})$ (ただし $\lambda^{(0)}$ は奇数分割である) が、 $\lambda \in \text{CMPP}_1(k_0, \dots, k_\ell)$ とは、任意の downward path P について、 P 上の数の合計が $k := k_0 + \dots + k_\ell$ 以下であることと定義する。downward path とは、配列を左下または右下に進む道のことである。

さらに $n \geq 0$ について

$$\text{CMPP}_1(k_0, \dots, k_\ell)(n) = \{\lambda \in \text{CMPP}_1(k_0, \dots, k_\ell) \mid n = |\lambda| (:= |\lambda^{(0)}| + \dots + |\lambda^{(\ell)}|)\}$$

とする。CMPP 予想の 1 つ目の命題は

$\sum_{n \geq 0} |\text{CMPP}_1(k_0, \dots, k_\ell)(n)| q^n$ は、 $C_\ell^{(1)}$ 型アフィン・リー環の標準加群 $V_{C_\ell^{(1)}}(k_0\Lambda_0 + \dots + k_\ell\Lambda_\ell)$ の指標 (の主特殊化、すなわち $e^{-\alpha_i} \mapsto q$) $\text{ch } V_{C_\ell^{(1)}}(k_0\Lambda_0 + \dots + k_\ell\Lambda_\ell)$ と一致するだろう。

というものである [2, Conjecture 3.3]。ただし $\ell = 1$ のとき、 $C_1^{(1)} = A_1^{(1)}$ とする。

$\text{ch } V_{C_\ell^{(1)}}(k_0\Lambda_0 + \dots + k_\ell\Lambda_\ell)$ は、Weyl-Kac 指標公式から求めることが可能で (Lepowsky 分子公式)、具体形は省略するが、 $\text{ch } V_{C_1^{(1)}}(\Lambda_0 + \Lambda_1) = (q^2; q^4)_\infty / (q, q, q^3, q^3; q^4)_\infty$ といった具合である。

この予想は、 $\ell = 1$ のときは Meurman-Primc による定理である [10]。さらに講演では、[10] の簡単な解説を行うことによって、この予想の affine VOA の観点からの出自 [13, 14] を説明した。なお $k = 1$ のときも示されている [3, 5, 16]。最近 $k_1 = \dots = k_\ell = 0$ の場合も示された [15]。

次に、 ℓ 色分割の部分集合 $\text{CMPP}_2(k_0, \dots, k_\ell)$ (および $\text{CMPP}_2(k_0, \dots, k_\ell)(n)$) を、以下の配列 (ただしこれは $\ell = 3$ の例である) から CMPP_1 と同様に定義する ($\ell \geq 1, k_0, \dots, k_\ell \geq 0$)。

$$\begin{array}{cccccc} & k_3 & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 \\ & & 0 & & f_2 & & f_4 & & f_6 & & f_8 \\ k_2 & & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 \\ & & 0 & & f_2 & & f_4 & & f_6 & & f_8 \quad \dots \\ k_1 & & & f_1 & & f_3 & & f_5 & & f_7 \\ & k_0 & & f_2 & & f_4 & & f_6 & & f_8 \end{array}$$

$\ell = 1$ のとき $\text{CMPP}_2(k_0, k_1)$ は、Andrews-Gordon 分割定理で $k = k_0 + k_1, a = k_1$ とした分割の集合である。[2, Conjecture 4.1] では、 $\sum_{n \geq 0} |\text{CMPP}_2(k_0, \dots, k_\ell)(n)| q^n$ の無限積表示を具体的に予想している。[6, (1.5), Appendix A] では、この無限積が $A_{2\ell}^{(2)}$ 型アフィン・リー環の標準加群の非標準的な特殊化で得られることを示した。これによって、CMPP 予想の 2 つ目の命題は

$\sum_{n \geq 0} |\text{CMPP}_2(k_0, \dots, k_\ell)(n)| q^n$ は、 $A_{2\ell}^{(2)}$ 型アフィン・リー環の標準加群 $V_{A_{2\ell}^{(2)}}(2k_0\Lambda_0 + k_1\Lambda_1 + \dots + k_\ell\Lambda_\ell)$ の指標の特殊化 $e^{-\alpha_0} \mapsto -1, e^{-\alpha_1} \mapsto q, \dots, e^{-\alpha_\ell} \mapsto q$ と一致するだろう。

と、(無限積側が) 表現論的に言いかえられたことになる。

残った $\text{CMPP}_3(k_0, \dots, k_\ell)$ の定義 [12] はここでは行わないが、 $\text{CMPP}_1, \text{CMPP}_2$ と同様に、適当な ℓ 色分割として定義される。[6, (2.5), Appendix A] において、[12, Conjecture 2.1] で予想された $\sum_{n \geq 0} |\text{CMPP}_3(k_0, \dots, k_\ell)(n)| q^n$ の無限積表示は、 $D_{\ell+1}^{(2)}$ 型アフィン・リー環の標準加群 $V_{D_{\ell+1}^{(2)}}(2k_0\Lambda_0 + k_1\Lambda_1 + \dots + k_{\ell-1}\Lambda_{\ell-1} + 2k_\ell\Lambda_\ell)$ の指標の (非標準的な) 特殊化 $e^{-\alpha_0} \mapsto -1, e^{-\alpha_1} \mapsto q, \dots, e^{-\alpha_{\ell-1}} \mapsto q, q^{-\alpha_\ell} = -1$ と一致することを示した。以上により CMPP 予想の 3 つの命題は、 $C_\ell^{(1)}, A_{2\ell}^{(2)}, D_{\ell+1}^{(2)}$ 型アフィン・リー環と関係していることが分かったことになる。なお $\text{CMPP}_2, \text{CMPP}_3$ に関しても、 $k_0 + \dots + k_\ell = 1$ のときは示されている [5, 16]。

3 Hall-Littlewood 関数および Griffin-Ono-Warnaar 恒等式

RR 分割定理は, $A_1^{(1)}$ 型レベル 3 の標準加群を用いた principal picture の頂点作用素の解釈を持つ [7]. homogeneous picture における RR 型分割定理の研究も [8] 以来さかんである. CMPP 予想もその一例と考えられる. 一方で, RR 分割定理には Hall-Littlewood 関数 $P_\mu(t)$ を用いた研究も [18] 以来なされており (教科書の解説に [1] もある), GOW 恒等式 [4] は有名である (著者の 1 人の自伝風の本 [11] で経緯が簡単にふれられている). 講演では $\text{CMPP}_i(k, 0, \dots, 0)$ ($i = 1, 2, 3$) と $\text{CMPP}_2(0, \dots, 0, k)$ に対するアプローチとして, GOW 恒等式との関連についての予想を述べた.

まず $\sum_{\mu_1 \leq m} q^{a|\mu|} P_{2\mu}(1, q, q^2, \dots; q^{2n+b})$ が具体的な無限積表示を持つ場合として, [4, Theorem 1.1, Theorem 1.2, Theorem 1.3] がある. この無限積表示は $\text{CMPP}_2(0, \dots, 0, k)$, $\text{CMPP}_2(k, 0, \dots, 0)$, $\text{CMPP}_1(k, 0, \dots, 0)$, $\text{CMPP}_3(k, 0, \dots, 0)$ と同じである, という観察を発展させて, $\text{CMPP}_2(0, \dots, 0, k)$, $\text{CMPP}_2(k, 0, \dots, 0)$ に関して, 次の予想を提出した [6, Conjecture 1.4].

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{\lambda \in \text{CMPP}_2(0, \dots, 0, k)} z^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{\mu_1 \leq k} (zq)^{|\mu|} P_{2\mu}(1, q, q^2, \dots; q^{2n-1}) \text{ が成り立つだろう. 同様に,} \\ \sum_{\lambda \in \text{CMPP}_2(k, 0, \dots, 0)} z^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{\mu_1 \leq k} (zq^2)^{|\mu|} P_{2\mu}(1, q, q^2, \dots; q^{2n-1}) \text{ が成り立つだろう.} \end{array} \right|$$

ただし $0, \dots, 0$ は, 0 の n 個の繰り返しを意味する. $\text{CMPP}_1(k, 0, \dots, 0)$ と $\text{CMPP}_3(k, 0, \dots, 0)$ に関する, [4, Theorem 1.2, Theorem 1.3] の z -enhancement に関する予想については, [6, Conjecture 4.7] を参照されたい. これらが示されれば, $z = 1$ とすることで, [4] から $\text{CMPP}_2(0, \dots, 0, k)$, $\text{CMPP}_2(k, 0, \dots, 0)$, $\text{CMPP}_1(k, 0, \dots, 0)$, $\text{CMPP}_3(k, 0, \dots, 0)$ についての CMPP 予想が示されることになる (前節で述べたように, $\text{CMPP}_1(k, 0, \dots, 0)$ については [15] で示されている).

さて [9, p.213] にあるように r を分割 μ の共役とすると

$$(zq)^{|\mu|} P_{2\mu}(1, q, q^2, \dots; q) = \prod_{i \geq 1} \frac{z^{r_i} q^{r_i^2}}{(q; q)_{r_i - r_{i+1}}}$$

が成り立つ. よって $n = 1$ のとき

$$\sum_{\mu_1 \leq k} (zq)^{|\mu|} P_{2\mu}(1, q, q^2, \dots; q) = \sum_{r_1, \dots, r_k \geq 0} \prod_{i=1}^k \frac{z^{r_i} q^{r_i^2}}{(q; q)_{r_i - r_{i+1}}}$$

である. 右辺は Andrews-Gordon 分割定理の ($a = k$ の場合の) 分割集合の母関数の表示として有名である ($k = 1$ が RR 恒等式であった). これに動機付けられて, [6, Conjecture 2.2] では

$$\left| \begin{array}{l} k \geq 1 \text{ について, } \sum_{\mu_1 \leq k} (zq)^{|\mu|} P_{2\mu}(1, q, q^2, \dots; q^2) = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \geq 0 \\ s_1, \dots, s_k \geq 0}} \prod_{i=1}^k \frac{z^{r_i + s_i} q^{(r_i + s_i)^2 + s_i^2 + s_i}}{(q; q)_{r_i - r_{i+1}} (q^2; q^2)_{s_i - s_{i-1}}} \text{ が} \\ \text{成り立つだろう. ただし } r_{k+1} = 0 = s_0 \text{ とする.} \end{array} \right|$$

を予想として提出した. [6, Conjecture 2.2, Conjecture 4.7] と [4, Theorem 1.2] は

$$\left| \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \geq 0 \\ s_1, \dots, s_k \geq 0}} \prod_{i=1}^k \frac{q^{(r_i + s_i)^2 + s_i^2 + s_i}}{(q; q)_{r_i - r_{i+1}} (q^2; q^2)_{s_i - s_{i-1}}} = \frac{(q, q^{k+1}, q^{k+2}; q^{k+2})_\infty}{(q; q^2)_\infty (q; q)_\infty} \text{ が成り立つだろう.} \right|$$

といった新しい RR 型恒等式 (現状は予想である) をもたらし, 興味深い. ここで右辺は $\text{ch } V_{C_1^{(1)}}(k\Lambda_0)$ である. [6, Conjecture 2.2, Conjecture 4.7] と [4, Theorem 1.3] から得られる, RR 型恒等式の予想については [6, Conjecture 4.9] の下の式を参照されたい.

4 まとめ

CMPP₁ は $C_n^{(1)}$ 型アフィン VOA に出自を持つが、その組合せ論的類似である CMPP₂, CMPP₃ は指標の非標準的な特殊化を通して $A_{2n}^{(2)}, D_{n+1}^{(2)}$ 型アフィン・リー環とも関連することが分かった。頂点作用素だけではなく Hall-Littlewood 関数との関係も予想される。

講演の機会を与えてくださった小寺諒介さんに感謝いたします。ありがとうございました。

参考文献

- [1] H-C. Chan, *An Invitation to q-series, From Jacobi's Triple Product Identity to Ramanujan's "most beautiful identity"*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2011.
- [2] S. Capparelli, A. Meurman, A. Primc and M. Primc, *New partition identities from $C_\ell^{(1)}$ -modules*, Glas.Mat.Ser.III **57(77)** (2022), no.2, 161–184.
- [3] J. Dousse and I. Konan, *Characters of level 1 standard modules of $C_n^{(1)}$ as generating functions for generalised partitions*, arXiv:2212.12728
- [4] J.M. Griffin, K. Ono and S.O. Warnaar, *A framework of Rogers-Ramanujan identities and their arithmetic properties*, Duke Math.J. **165** (2016), no.8, 1475–1527.
- [5] N. Jing, K. Misra and C.D. Savage, *On multi-color partitions and the generalized Rogers-Ramanujan identities*, Commun.Contemp.Math.**3** (2001), no.4, 533–548.
- [6] S. Kanade, M.C. Russell, S. Tsuchioka and S.O. Warnaar, *Remarks on the conjectures of Capparelli, Meurman, Primc and Primc* arXiv:2404.03851
- [7] J. Lepowsky and R. Wilson, *The structure of standard modules. I. Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities*, Invent.Math. **77** (1984), 199–290.
- [8] J. Lepowsky and M. Primc, *Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$* , Contemp.Math. **46** AMS (1985).
- [9] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.
- [10] A. Meurman and M. Primc, *Annihilating fields of standard modules of $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^\sim$ and combinatorial identities*, Mem.Amer.Math.Soc.**137** (1999), no.652, viii+89pp.
- [11] K. Ono and A.D. Aczel, *My Search for Ramanujan. How I Learned to Count*, Springer, Cham, 2016.
- [12] M. Primc, *New partition identities for odd W odd*, Rad Hrvat.Akad.Znan.Umjet.Mat.Znan. **28(558)** (2024), 49–56.
- [13] M. Primc and T. Šikić, *Combinatorial bases of basic modules for affine Lie algebras $C_n^{(1)}$* , J.Math.Phys.**57** (2016), no.9, 19 pp.
- [14] M. Primc and T. Šikić, *Leading terms of relations for standard modules of the affine Lie algebras $C_n^{(1)}$* , Ramanujan J.**48** (2019), no.3, 509–543.
- [15] M. Primc and G. Trupčević, *Linear independence for $C_\ell^{(1)}$ by using $C_{2\ell}^{(1)}$* , J.Algebra **661** (2025), 341–356.
- [16] M.C. Russell, *Companions to the Andrews-Gordon and Andrews-Bressoud identities, and recent conjectures of Capparelli, Meurman, Primc, and Primc*, arXiv:2306.16251
- [17] A.V. Sills, *An Invitation to the Rogers-Ramanujan Identities. With a Foreword by George E. Andrews*, CRC Press, (2018).
- [18] J.R. Stembridge, *Hall-Littlewood functions, plane partitions, and the Rogers-Ramanujan identities*, Trans.Amer.Math.Soc.**319** (1990), no.2, 469–498.