

Boltzmann 方程式の外部定常流解の存在と安定性

阪市大工 鶴飼正二

京大教養 浅野 潔

物体の周りの気体の流れを Boltzmann 方程式により考察する。従来この問題は専ら(圧縮性) Euler 方程式により考察されて来た [2], [5]。また流れが非圧縮性ならば同知のように Navier-Stokes 方程式に関する多くの結果がある。ここでは無限遠方での流速が一様でかつ小さい時, Boltzmann 方程式の定常解が存在しかつ安定であることを示す。存在証明には Nash-Moser の陰関数定理が必要となる。

物体の占める領域を $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ として次を仮定する。

[仮定 1] Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界凸領域で境界 $\partial\Omega$ は区分的に C^1 級。

$\Omega_c = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ を外部領域とする。 $\partial\Omega_c = \partial\Omega$ である。無限遠の流速を $c \in \mathbb{R}^n$ とする。 Boltzmann 方程式の未知関数は時刻 t に位置 $x \in \Omega$, 速度 $\xi \in \mathbb{R}^n$ を持つ気体粒子(分子)の(確率)密度 $f = f(t, x, \xi)$ であり, 今の場合次の初期-境界値問題を考へる となる。

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\xi \cdot \nabla_x f + Q[f, f], \quad (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

$$(2) \quad f^+ = Cf^-, \quad (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times S^+,$$

$$(3) \quad f \rightarrow g_c(\xi) \equiv e^{-\frac{1}{2}|\xi - c|^2}, \quad (x \rightarrow \infty), \quad (t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,$$

$$(4) \quad f|_{t=0} = f_0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

(1) は Boltzmann 方程式で, $\cdot$ は $\mathbb{R}^n$ の内積, Q は気体粒子の 2 体衝突を記述する 2 次非線形作用素で

$$Q[f, f] = \iint_{\mathbb{R}^n \times S^{m-1}} g(|\xi - \xi'|, \theta) \{f(\eta)f(\eta') - f(\xi)f(\xi')\} d\xi' d\omega,$$

$$f(\eta) = f(t, x, \xi) \text{ etc, } \eta = \xi - ((\xi - \xi') \cdot \omega)\omega, \quad \eta' = \xi' + ((\xi - \xi') \cdot \omega)\omega,$$

$$\cos \theta = (\xi - \xi') \cdot \omega / |\xi - \xi'|, \quad \omega \in S^{m-1}.$$

g は粒子の相互作用ポテンシアルにより定まり, 次を仮定する.

[仮定 2] ポテンシアルは Grad の cutoff hard potential [3].

大雑把に言う $0 < \exists q_0 \leq g(v, \theta) / (v^\delta |\cos \theta|) \leq q_1$ なる定数 q_0, q_1 ,

$\delta \geq 0$ が存在すればよい. $v = |\xi - \xi'|$ である. g はもちろん可測と

する. 具体的な例としては

$$\text{hard ball model: } g(v, \theta) = g_0 |(\xi - \xi') \cdot \omega| = g_0 v |\cos \theta|$$

inverse power law potential ($\propto r^{-s}$; $s > 2$, $r =$ 粒子間距離);

$$g(v, \theta) = g_0(\theta) v^\delta, \quad \delta = (s-5)/(s-2).$$

後者は $s \geq 5$ かつ $g_0(\theta) > 0$ が $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ の近傍で 0 となればよい.

(2) は $\partial\Omega$ での境界条件. $S^\pm = \{(x, \xi) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^n; n(x) \cdot \xi \gtrless 0\}$, $n(x)$ は

$\partial\Omega$ の単位法線ベクトルで Ω に向く内向き, $f^\pm = f|_{S^\pm}$ は f の trace

で壁 $\partial\Omega = \partial\Omega$ による反射粒子(+), 壁への入射粒子(-), の密度

で, C は壁と粒子との相互作用により定まる境界作用素で, 例

えば完全吸収壁ならば $C=0$, また反射壁であれば $C(x, \xi)$;

$S^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, C(x, \xi)) \in S^-$ ($\forall (x, \xi) \in S^+$) なる函数が存在して

$$Cf^+ = f(t, x, C(x, \xi)), \quad (x, \xi) \in S^+,$$

で $[4], C(x, \xi) = \xi - 2(n(x) \cdot \xi)n(x)$ (完全反射), $C(x, \xi) = -\xi$ (逆反射) を考えられる。また乱反射壁

$$Cf^- = \int_{n(x) \cdot \xi < 0} C(x, \xi, \xi') f(t, x, \xi') d\xi', \quad (x, \xi) \in S^+$$

も考えられる。C に対する仮定は後で述べる。

(3) は無限遠での境界条件で g_c は平均速度 c の Maxwell (Gauss) 分布で、逆で無限遠で分布は平衡状態にあると考えられる。なる。C が何であって $Q[g_c, g_c] \equiv 0$ であるので、 g_c は (1) の定常解である。但し一般に (3) は満たない、 u は (1) ~ (4) の解で g_c の近傍で求めよう。その為に $f(t, x, \xi) = g_c(\xi) + g_c^{1/2}(\xi) u(t, x, \xi)$ とおき、更に

$$L_c u = 2g_c^{-1/2} Q[g_c, g_c^{1/2} u], \quad \Gamma_c[u, v] = g_c^{-1/2} Q[g_c^{1/2} u, g_c^{1/2} v],$$

$$Mu^- = g_c^{-1/2} C g_c^{1/2} u^-, \quad R_c = g_c^{-1/2} (C g_c^- - g_c^+).$$

とすると、 $Q[\cdot, \cdot]$ は対称双一次作用素と考えられる。よって (1) ~ (4) は

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\xi \cdot \nabla_x u + L_c u + \Gamma_c[u, u], & (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \\ u^+ = Cu^- + R_c, & (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times S^+, \\ u \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), & (t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0, & (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

となる。対応する定常問題は未知関数 $w = w(x, \xi)$ と C

$$(6) \quad \begin{cases} 0 = -\xi \cdot \nabla_x w + L_c w + \Gamma_c[w, w], & (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \\ w^+ = Mw^- + R_c, & (x, \xi) \in S^+ \end{cases}$$

$$L w \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

この定常解 w の安定性は $v = u - w$ とおき (5) (6) から得られる

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -\xi \nabla_x v + L_c v + 2 \Gamma_0[w, v] + \Gamma_0[v, v], & (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \\ v^+ = M v^-, & (t, x, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times S^+, \\ v \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), & (t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases}$$

の零解の安定性を調べればよい。

これらの問題を空間

$$X_p = \{u(x, \xi) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n); \|u\|_p = \sup_{\xi} (1+|\xi|)^\beta \|u(\cdot, \xi)\|_{L^p \cap L^\infty(\Omega)} < +\infty\}$$

で解く。 $1 \leq p \leq \infty$, $\beta > n+1$ とある。 β は以下で固定する。

更に $\Sigma^\pm(\xi) = \{x \in \partial\Omega; m(x) \cdot \xi \geq 0\}$, $\rho(x, \xi) = |m(x) \cdot \xi|$, $Y_p^\pm(\xi) = L^p \cap L^\infty(\Sigma^\pm(\xi); \rho d\sigma)$ ($d\sigma$ は $\partial\Omega$ 上の測度), とおき

$$X_p^\pm = \{u(x, \xi) \in L^\infty_{\text{loc}}(S^\pm); \sup_{\xi} (1+|\xi|)^\beta \|u(\cdot, \xi)\|_{Y_p^\pm(\xi)} < +\infty\}$$

と定義する。 話は前後する $p' = \infty$ で M , 即ち境界作用素 C に関する仮定を述べておく。

[仮定 3] (i) $M; L^2(S^-; \rho d\sigma d\xi) \rightarrow L^2(S^+; \rho d\sigma d\xi)$ は線型縮小 ($\|M\| \leq 1$).

(ii) $M; X_p^- \rightarrow X_p^+$ は線型有界 ($2 \leq p \leq \infty$).

$$(iii) M g_0^{1/2} = g_0^{1/2}$$

先に挙げた反射壁, 全反射壁は適当な条件下でこの仮定を満す. 特に完全反射と逆反射については成り立つ. 完全吸収壁 $C=0$ は (iii) を満さない. 一般に $C \neq 0$ ならば $C g_0 \neq g_0$ とある.

次の結果を得る.

定理 1. $n \geq 3$ とする. 仮定 1~3 の下で定数 $c_0 > 0$ と $p \geq 2$ が存在し, 任意の $c \in \mathbb{R}^n$, $|c| \leq c_0$ に対して (6) は X_p で唯一つの解 $w = w_c$ を持ち, $w_c \rightarrow 0$ ($|c| \rightarrow 0$) $\underbrace{\text{in } X_p}$ である.

従って $g_c + g_c^{1/2} w_c$ は (1)~(4) の定常解である.

定理 2. 同じ仮定の下で定数 $a_0, a_1, c_0 > 0$ が存在し $|c| \leq c_0$, $v_0 \in X_1$, $\|v_0\|_1 \leq a_0$ ならば (7) は唯一つの解 $u = v_c(t) \in C^0([0, \infty); X_2)$ を持ち, かつ $t \geq 0$ に対し

$$\|v_c(t)\|_2 \leq a_1(1+t)^{-n/4} \|v_0\|_1$$

が成り立つ.

従って (5), よって (1)~(4), は大域解を持ち, 最後の不等式は定常解が $t \rightarrow \infty$ で漸近安定であることを示している.

定理 1 の証明. 線型作用素 B_c を (形式的に)

$$B_c u = -\xi \cdot \nabla_x u + L_c u, \quad u^+ = M u^-,$$

で定義する. 又 φ_c を

$$-\xi \cdot \nabla_x \varphi_c + L_c \varphi_c = 0, \quad \varphi_c^+ = M \varphi_c^- + h_c$$

の解とすれば, (6) は (形式的に) 次の方程式と同値.

$$(8) \quad G(w, c) \equiv w + B_c^{-1} \Gamma_c[w, w] + \varphi_c = 0.$$

次の命題が証明出来る.

命題 1. $|c|$ が小ならば B_c^{-1} が存在し,

$$\|B_c^{-1}I_0[u, v]\|_p \leq C_0 \|u\|_r \|v\|_s$$

かつ $p, r, s \geq 2$, $r^{-1} + s^{-1} - p^{-1} > n^{-1}$, $r^{-1} + s^{-1} > 2^{-1}$ であり立つ。

命題 2. $|c|$ が小さければ φ_c が存在し, $\varphi_c \in X_p$, $p \geq 2$, $p > n/(n-2)$,

$|c| \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi_c \rightarrow 0$ ($|c| \rightarrow 0$) in X_p .

従って $n=4$ ならば $2 < p < 4$, $n \geq 5$ ならば $2 \leq p < 4$ に対し

$$G(\cdot, c) : X_p \rightarrow X_p$$

は C^∞ 写像で, 更に $G(0, 0) = 0$, $|c| \rightarrow 0$

$$G_w(0, 0) = I$$

である. G_w は w に関する Fréchet 微分であり $|c| \rightarrow 0$

$$G_w(w, c) = I + 2B_c^{-1}I_0[w, \cdot]$$

である. よって $n \geq 4$ ならば通常の高関数定理により (8) が解ける定理 1 を得る.

$n=3$ の場合は命題 1, 2 より

$$G(\cdot, c) : X_p \rightarrow X_q \quad 2 \leq p < 3, \quad q > 3$$

であり, $X_p \subsetneq X_q$ ($p < q$) を考慮すると $G_w(0, 0) = I$ は ∞ の時, 有界な逆を持たない. これは Nash-Moser の謂う *derivative loss*

に対応する現象で, 従って通常の高関数定理では (8) は解ける. しかし次に命題に依って Nash-Moser 型の高関数定理 [6] が応用可能となる.

命題 3. $n=3$ とする. 次に存在する φ_c^1, φ_c^2 が存在する.

$$\varphi_c = \varphi_c^1 + \varphi_c^2.$$

$$\varphi_c^1 \in X_2 \quad \varphi_c^1 \rightarrow 0 \ (|c| \rightarrow 0) \text{ in } X_2.$$

$$\varphi_c^2 \in X_p \ (p > 3), \quad \varphi_c^2 \rightarrow 0 \ (|c| \rightarrow 0) \text{ in } X_p.$$

$$(1+|x|)^\alpha \varphi_c^2 \in X_\infty \ (\exists \alpha > 0), \quad (1+|x|)^\alpha \varphi_c^2 \rightarrow 0 \ (|c| \rightarrow 0) \text{ in } X_\infty.$$

smoothing operator χ_c は今の場合は単なる cutoff 関数.

$$\chi_R = \chi_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R \\ 0, & |x| > R \end{cases} \quad \text{ただし} \quad \text{実際, 上の命題 3 より } \exists \delta > 0, \quad \forall |c| > R > 0, \quad (1+|x|)^\alpha \chi_R(x) \rightarrow 0 \ (|c| \rightarrow 0) \text{ in } X_\infty.$$

$$\|\varphi_c^1\|_2 \leq \frac{1}{2}\delta, \quad \|\varphi_c^2\|_q \leq \frac{1}{2}\delta$$

$$\|\chi_R \varphi_c^2\|_p \leq \delta R^\alpha, \quad \|(1-\chi_R) \varphi_c^2\|_q \leq \delta R^{-\alpha}$$

が成り立つ. 但し $\alpha, \delta, \gamma > 0$ は定数, $2 \leq p < 3$, $q > 3$, $\delta = \delta(c) \rightarrow 0 \ (|c| \rightarrow 0)$.

2 $F(w, c) = w + B_c^{-1} \Gamma_c[w, w]$ とおく. $G = F + \varphi_c = F + \varphi_c^1 + \varphi_c^2$ とする. 命題 1 より $n=3$ に對して

$$F(\cdot, c) : X_p \rightarrow X_p, \quad 2 \leq p < 3.$$

$$w \in X_r \ (2 \leq r < 3) \Rightarrow F_w(w, c) : X_p \rightarrow X_p \ (2 \leq p < 6) \text{ は有界.}$$

$$\|w\|_r \leq 1/4C_0 \ (2 \leq r < 3) \Rightarrow F_w(w, c)^{-1} : X_p \rightarrow X_p \ (2 \leq p < 6) \text{ は存在して有界.}$$

この最後は $F_w(w, c)^{-1} = G_w(w, c)^{-1} = (I + 2B_c^{-1} \Gamma_c[w, \cdot])^{-1}$ が Neumann 級数により得られるからである. この時 $\|F_w(w, c)^{-1}\| \leq 2$ である.

Nash-Moser [6] に従って次の列 $\{w_k\}$ を定義する.

$$w_0 = 0, \quad w_{k+1} = w_k + p_k, \quad k \geq 0,$$

$$p_k = -G_w(w_k, c)^{-1} \{G(w_k, c) - (1-\chi_{R_k})\varphi_c^2\}$$

$$= -F_w(w_k, c)^{-1} \{F(w_k, c) + \varphi_c^1 + \chi_{R_k} \varphi_c^2\},$$

である. $\{R_k\}$ を適当に選ぶと w_k は (8) の解に収束する; 即ち

補題. $C_0, \alpha, \gamma, \delta$ は "これまじ" と同じ定数とする. すべて k
 ≥ 0 に対し, 以下が成り立つ.

$$(i) \quad \|p_{k-1}\|_q \leq 4\delta K^{-\mu(s^{k-1}-1)},$$

$$(ii) \quad \|p_{k-1}\|_p \leq 4\delta K^{s^k},$$

$$(iii) \quad \|w_k\|_r \leq 1/4C_0,$$

$$(iv) \quad \|G(w_k, c)\|_q \leq \delta K^{-\mu(s^k-1)},$$

が成り立つような, 定数 $K > 1, s > 1, \mu > 0, 2 \leq p < r < 3 < q$, 及び
 R_k が存在する (これは c に依存しない).

証明. 帰納法による. $k=0$ は明らか. k が成り立つと仮定
 $k+1$ に対し (i) ~ (iv) を示す.

(i) $k+1$ の証明.

$$\begin{aligned} \|p_k\|_q &\leq \|G_w(w_k, c)^{-1}\| \left\{ \|G(w_k, c)\| + \|(1-X_{R_k})\varphi_c^2\| \right\} \\ &\leq 2 \left\{ \delta K^{-\mu(s^k-1)} + \delta R_k^{-\alpha} \right\} \end{aligned}$$

よって $R_k = K^{\mu(s^{k+1}-1)/\alpha}$ と選べば (i) が成り立つ.

(ii) $k+1$ の証明. $K > 1$ を充分大に選べば

$$\|w_k\|_p \leq \|w_0\|_p + \sum_{j=1}^k \|p_{j-1}\|_p \leq 4\delta \sum_{j=1}^k K^{s^j} \leq 8\delta K^{s^k}.$$

よって $\|F(w_k, c)\|_p \leq \|w_k\|_p + C_0 \|w_k\|_r \|w_k\|_p \leq 10\delta K^{s^k}$. 故に

$$\begin{aligned} \|p_k\|_p &\leq \|F_w(w_k, c)^{-1}\| \left\{ \|F(w_k, c)\|_p + \|\varphi_c^1\|_p + \|X_{R_k}\varphi_c^2\|_p \right\} \\ &\leq 2 \left\{ 10\delta K^{s^k} + \delta + \delta R_k^\gamma \right\} \\ &= 2\delta K^{s^{k+1}} \left\{ 10K^{-s^k(s-1)} + K^{-s^{k+1}} + K^{-s^{k+1}(1-\gamma\mu/\alpha) - \gamma\mu/\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

$\gamma = 2$ K が充分大で, かつ

$$(*) \quad s > 1, \quad 0 < \mu < \alpha/\delta$$

よらば (ii) が成り立つ。

$$(iii)_{k+1} \rightarrow \text{証明.} \quad r^{-1} = (1-\theta)p^{-1} + \theta q^{-1} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \text{とすれば}$$

$$\|u\|_r \leq \|u\|_p^{1-\theta} \|u\|_q^\theta$$

$$(4) \quad p < r < 3 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < (p^{-1} - 3^{-1}) / (p^{-1} - q^{-1})$$

故に (i)_{k+1}, (ii)_{k+1} が

$$\|f_j\|_r \leq 4\delta K^{-s_j(\theta\mu - (1-\theta)s) + \theta\mu}, \quad 0 \leq j \leq k,$$

$$\|w_{k+1}\|_r \leq \sum_{j=0}^k \|f_j\|_r \leq 4\delta K^{\theta\mu} \sum_{j=0}^k K^{-s_j(\theta\mu - (1-\theta)s)}.$$

故に K が充分大で, $\delta - \theta\mu - (1-\theta)s > 0$, 則ち

$$(**) \quad \theta > s/(s+\mu)$$

よらば $\sum_{j=0}^{\infty} K^{-s_j(\theta\mu - (1-\theta)s)} \leq 1/16C_0$ とできる。この時, $|c|$ が小さく
すれば $\delta \leq K^{\theta\mu}$ が成り立つ。($\delta \rightarrow 0$ ($|c| \rightarrow 0$) を仮定). 故に $\|w_{k+1}\|_r \leq 1/4C_0$.

$$(iv)_{k+1} \rightarrow \text{証明.} \quad G(w_{k+1}, c) = G(w_k + f_k, c) = G(w_k, c) +$$

$$G_w(w_k, c)f_k + B_c^{-1} \Gamma_c[f_k, f_k] = (1 - \chi_{R_k})\varphi_c^2 + B_c^{-1} \Gamma_c[f_k, f_k] \quad \text{である.}$$

$$\begin{aligned} \|G(w_{k+1}, c)\|_q &\leq \|(1 - \chi_{R_k})\varphi_c^2\|_q + C_0 \|f_k\|_r \|f_k\|_q \\ &\leq \delta R_k^{-\alpha} + 16C_0 \delta K^{-s_k(\theta\mu - (1-\theta)s) + \theta\mu - \mu(s^k - 1)} \\ &\leq \delta K^{-\mu(s^{k+1} - 1)} \{1 + 16C_0 \delta K^{-s^k(\theta\mu - (1-\theta)s + \mu - \mu s) + \theta\mu}\} \end{aligned}$$

$\delta \leq K^{-\theta\mu}$ に注意すれば $\theta\mu - (1-\theta)s + \mu(1-s) > 0$, 則ち

$$(***) \quad (1-s) < 1 + \frac{1+\mu}{1+\mu-\theta} \left(\theta - \frac{1}{1+\mu} \right)$$

よらば (iv)_{k+1} が成り立つ。 $\chi = 2$ $\mu \in (*)$ と定め, 次に $\theta \in (1+\mu)^{-1} < \theta < 1$ とする。そうすると $(**), (***)$ が

満す $s > 1$ が存在する。他方 $2 \leq p < 3 < q$ かつ q は 3 に非常に近ければ (†) も成り立つ。以上で補題を示せる。

従って $w = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$ は X_r で収束し、 $G(w, c) = 0$ in X_q かつ (iv) から従うから定理 1 の $n=3$ に対しても示せる。

定理 2 の証明. 先に定義した B_c は X_2 で C_0 -半群の生成作用素であることが示せる。この半群 e^{tB_c} を用いると (7) は次の積分方程式に帰着される。

$$(9) \quad v(t) = e^{tB_c} v_0 + \int_0^t e^{(t-s)B_c} \{ 2 \Gamma_0[w_c, v(s)] + \Gamma_0[v(s), v(s)] \} ds.$$

w_c は定理 1 の定常解である。

命題 3. $n \geq 2$ に対し、 $|c|$ が充分小ならば

$$\|e^{tB_c} u\|_2 \leq C_1 (1+t)^{-n/4} \|u\|_1,$$

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)B_c} \Gamma_0[u(\tau), v(\tau)] d\tau \right\|_2$$

$$\leq C_1 \left\{ (1+t)^{-n/4} \sup_{t \geq 0} (1+t)^{n/4} \|u(t)\|_r \|v(t)\|_s \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} (1+t-\tau)^{-\alpha} \|u(\tau)\|_r \|v(\tau)\|_s d\tau \right\}.$$

が成り立つ。但し $r, s \geq 1$, $2^{-1} \leq r^{-1} + s^{-1} \leq 1$, $\alpha = \frac{n}{2}(r^{-1} + s^{-1} - 2^{-1}) + 2^{-1}$ 。

(9) の右辺を Hv と書くと $H; C^0([0, \infty); X_2) \rightarrow C^0([0, \infty); X_2)$ 上

上の命題より、 $\|v\| = \sup_t (1+t)^{n/4} \|v(t)\|_2$ とおけば

$$\|Hv(t)\|_2 \leq C_2 (1+t)^{-n/4} (\|v_0\|_1 + 2\|w_c\|_p \|v\| + \|v\|^2), \quad 2 \leq p < 3$$

を得る。即ち

$$\|Hv\| \leq C_2 (\|v_0\|_1 + 2\|w_c\|_p \|v\| + \|v\|^2).$$

同様に

$$\|Hv - Hv'\| \leq C_2 (2\|w_c\|_p + \|v\| + \|v'\|) \|v - v'\|.$$

定理 1 に より $\|w_c\|_p \rightarrow 0$ ($|c| \rightarrow 0$) から, $|c|$ が充分小ならば

$$\|w_c\|_p \leq 1/2C_2 \quad \text{と} \quad \varepsilon^0 \text{ が 3, } \varepsilon = \varepsilon^0 a_0 \text{ を}$$

$$0 < a_0 < \left(\frac{1}{2C_2} - \|w_c\|_p \right)^2$$

なるように選ぶ $\|v_0\|_1 \leq a_0$ を仮定する.

$$\mu = 1 - 2\|w_c\|_p C_2 - \sqrt{(1 - 2C_2\|w_c\|_p)^2 - 4C_2^2\|v_0\|_1}$$

$$a_1 = \mu / (2C_2\|v_0\|_1)$$

とあくと $0 < \mu < 1$ であるとき, $\|v\|, \|v'\| \leq a_1\|v_0\|_1$ ならば

$$\|Hv\| \leq a_1\|v_0\|_1, \quad \|Hv - Hv'\| \leq \mu \|v - v'\|$$

となる. よって H は不動点 v を持つ. これは (9) の解 v , $\|v\| \leq a_1\|v_0\|_1$ である. 故に定理 2 が示された.

命題 1~4 の証明には $c=0$ の場合の [1], [7] と同様の議論が必要となるがここには割愛する.

References

- [1] Asano,K.; On the initial boundary value problem of the nonlinear Boltzmann equation in an exterior domain. (to appear).
- [2] Brezis,H. and Stampachia,J; The hodograph method in fluid dynamics in the light of variational inequalities. Arch. Rat. Mech. Anal., 61(1976),1-18.
- [3] Grad,H.; Asymptotic theory of the Boltzmann equation. Rarefied Gas Dynamics. Vol.1(ed. by Lermann,J.A.),Academic Press, New York,(1963).
- [4] Kaniel,S. and Shinbrot,M.; The Boltzmann equation I. Commun. Math. Phys., 57(1978),1-20.
- [5] Morawetz,C.S.; Mixed equations and Transonic flows. Rend. Math., 25(1966),482-509.
- [6] Moser,J.; A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations I. Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa, 20(1966),226-315.
- [7] Ukai,S. and Asano,K.; On the initial boundary value problem of the linearized Boltzmann equation in an exterior domain. Proc. Japan Acad., 56(1980),12-17.