

確率化法によるエイジアン・オプションの価格評価

北海道大学・経済学研究科 木村 俊一 (Toshikazu Kimura)

Graduate School of Economics and Business Administration

Hokkaido University

北海道大学・経済学部 菊地 一哲 (Kazuaki Kikuchi)

Faculty of Economics, Hokkaido University

1 はじめに

エイジアン・オプションとは、そのペイオフ関数がある期間に渡る原資産価格の平均に依存する経路依存型オプションの1つである。エイジアン・オプションには実に多彩な種類が存在する。一般的な区分としては、バニラ・オプションの場合と同様にコールとプット、満期時点でのみ権利行使が認められるヨーロッパ型と期前行使を認めるアメリカ型がある。また、観測時点には連続サンプリングと離散サンプリングの2通りがあり、平均の取り方にも算術平均と幾何平均の2種類がある。さらに、バニラ・オプションのペイオフ関数における原資産価格をその平均で置き換える固定ストライクと、原資産価格ではなく行使価格を置き換える変動ストライクの区別がある。これらの中で、本論文では連続サンプリングによる算術平均ヨーロッパ型固定ストライク・エイジアン・オプションを対象としている。

算術平均に従うヨーロッパ型エイジアン・オプションに対するアプローチは以下のようなものが知られている。第1のアプローチとしては、本論文でも用いている偏微分方程式アプローチがある。このアプローチは、オプション価格に対するブラック・ショールズ偏微分方程式を解析的または数値的に解くものである。Rogers and Shi [8] はブラウン運動の尺度変換不変性を利用した新しい状態変数を導入することで、ヨーロッパ型エイジアンオプションに対する簡略化された偏微分方程式を導き、直接有限差分法で解くことを提案した。また、Lipton [7] は、ラプラス変換を用いて、ヨーロッパ型固定ストライク・エイジアンオプションの価格をオプション価格を導出した。Geman and Yor [3] は、この解のラプラス逆変換がベッセル2乗過程を用いて導出したこのオプションの擬似解析解と同値であることに言及している。第2のアプローチとしてはモンテ・カルロ法が知られている。Kemna and Vorst [4] は、ヨーロッパ型幾何平均エイジアン・オプションの価格を制御変量とするモンテ・カルロ法を用いて価格評価を行い、大幅に標準誤差が減少することを示した。さらに、第3のアプローチとしては、ヨーロッパ型エイジアン・オプション価格の上下限値を評価し、それらを内挿して近似値とする方法がある。Rogers and Shi [8] は、原資産価格のリスク中立的な確率密度関数を利用した条件付き期待値を取ることで、ヨーロッパ型エイジアン・オプションの価格にほとんど等しい正確な下限値を導いた。Thompson [9] は上限値を導出し、Rogers and Shi の下限値と組合せてこのオプションの価格評価を行っている。原資産価格のボラティリティが低いときはこの上下限はほとんど等しいが、ボラティリティが高くなるにつれて、その上下限の範囲が広がっていくことが知られている。

確率化法は、アメリカン・プット・オプションの価格評価において Carr [2] によって最初に提案されたものである。確率化法の手順としては、まず満期を平均が元の満期に等しい指数分布に従う確率変数に置き換える。このとき、オプション価格はラプラス・カールソン変換として与えられ、このオプションをカナディアン・オプションと呼ぶ。次に、確率密度関数を n 次のアーラン分布に拡張し、 $n \rightarrow \infty$ の極限を取ることによって求めるオプション価格を計算できる。指数分布の無記憶性によって、早期行使境界がまるで無期限満期オプションと同様に定数化されることが重要である。ただし、このアルゴリズムには n 次アーラン分布に拡張したオプションの価格が

単純な形で与えられず、複雑な3重和として表現されるという問題が存在している。この問題点を解決するために、Kimura [6] は n 次アーラン分布の代わりにある順序統計量に基づいた確率密度関数を利用した。この確率密度関数の持つ再帰的性質によって、このアルゴリズムは Carr のそれよりも単純・高速である。この方法は、精度を上げようとすると計算結果が不安定になることがあるという問題点を抱えてはいるが、カナディアン・オプションの価格が得られていれば適用できるという点で、Carr の方法よりも汎用性が高いものといえる。本論文の目的は、Kimura によって提唱された確率化法を用いて、未だに解析解が存在していない連続サンプリングによるヨーロッパ型算術平均エイジアン・オプションの価格評価を行うことにある。

2 ヨーロッパ型エイジアン・オプションの価格評価

2.1 定式化

本論文を通して、市場は完備で無裁定であると仮定する。また、 $(W_t)_{t \geq 0}$ をフィルター付き確率空間 $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 上の標準ウィーナー過程とし、原資産価格過程 $(S_t)_{t \geq 0}$ は確率微分方程式

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

に従うリスク中立化された幾何ブラウン運動であると仮定する。ここで、 $r > 0$ は安全利子率、 $\sigma > 0$ は原資産収益率のボラティリティであり、共に定数であると仮定する。本節では、ヨーロッパ型の連続サンプリングによる算術平均固定ストライク・エイジアン・オプションを考察する。したがって、以下では特に断わらない限り、エイジアン・オプションというときは上記の意味で使うことにする。

$c(t, S_t, I_t)$ を時刻 $t \in [0, T]$ のヨーロッパ型エイジアン・コール・オプションの価格と定義する。このオプションの行使価格 K 、満期 T でのペイオフ関数は

$$\left(\frac{I_T}{T} - K\right)^+ \quad (2.2)$$

で与えられる。ここで、 $I_t = \int_0^t S_u du$, $(x)^+ = \max\{0, x\}$ と定義する。リスク中立化法によって、時刻 t でのオプション価格は

$$c(t, S_t, I_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[\left(\frac{I_T}{T} - K\right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (2.3)$$

で与えられる。ファインマン・カクの公式 (例えば Kijima [5] 参照) より、 $c(t, S_t, I_t)$ はブラック・ショールズ偏微分方程式

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 c_{SS} + r S c_S + S c_I - r c + c_t = 0 \quad (2.4)$$

と終端条件

$$c(T, S, I) = \left(\frac{I}{T} - K\right)^+ \quad (2.5)$$

を満たす。

このように、バニラ・オプションの場合と異なり、エイジアン・オプションの価格が満たす偏微分方程式 (2.4) には、原資産価格の時間積分 I に関する項が拡散項として現れることが特徴である。この次元数の増加がエイジアン・オプションの価格評価を困難にしている原因の1つとなっている。しかし、Rogers and Shi [8] によって、(2.4) はウィーナー過程の尺度変換不変性により

2 変数まで階数低下できることが知られている。まず、 $c(t, S_t, I_t)$ を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} c(t, S_t, I_t) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[\left(\frac{I_T}{T} - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} S_t \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du + X_t \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= S_t \phi(t, X_t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、 $X_t = (I_t/T - K)/S_t$,

$$\phi(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du + x \right)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

である。

次に時間の向きを逆にとったオプション価格を考える。 $\tau = T - t$ に対して、 $\hat{c}(\tau, \hat{S}_\tau, \hat{I}_\tau) \equiv c(T - \tau, S_{T-\tau}, I_{T-\tau}) = c(t, S_t, I_t)$ と定義するとき、(2.6) に対応する表現は次のように書き換えられる。

$$\hat{c}(\hat{S}_\tau, \hat{I}_\tau) = \hat{S}_\tau \hat{\phi}(\tau, \hat{X}_\tau) \quad (2.7)$$

したがって、エイジアン・オプションの価格評価問題は 3 次元の関数 $c(t, S_t, I_t)$ から $\hat{\phi}(\tau, \hat{X}_\tau)$ を解くことに帰着させられた。

ここで、関数 $\hat{\phi}$ は偏微分方程式

$$\frac{\sigma^2}{2} X^2 \hat{\phi}_{XX} - \left[rX - \frac{1}{T} \right] \hat{\phi}_X - \hat{\phi}_\tau = 0, \quad X \in \mathbb{R}, \quad (2.8)$$

を境界条件

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \hat{\phi}(\tau, X) = 0 \quad (2.9)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \hat{\phi}_X(\tau, X) = e^{r\tau}, \quad (2.10)$$

および初期条件

$$\hat{\phi}(0, X) = (X)^+ \quad (2.11)$$

の下で解くことによって与えられる。

2.2 ヨーロッパ型カナディアン・エイジアン・オプション

本節では 2.1 節で得られた偏微分方程式 (2.8) を常微分方程式に変換するために、Carr [2] や Kimura [6] で用いられているカナディアン・オプションの概念をこのオプションに応用する。まず、 $\lambda > 0$ 、 $S_t = S$ と $I_t = I$ に対して、 $c^*(\lambda, S, I)$ を時刻 $t \in [0, \tilde{T}]$ でのヨーロッパ型カナディアン・エイジアン・オプションの価格と定義する。このとき、(2.3) 式から

$$\begin{aligned} c^*(\lambda, S, I) &= \mathbb{E} \left[e^{-r(\tilde{T}-t)} \left(\frac{I_{\tilde{T}}}{\tilde{T}} - K \right)^+ \mid S_t = S \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{-r\tilde{\tau}} \left(\frac{\hat{I}_0}{\tilde{T}} - K \right)^+ \mid \hat{S}_{\tilde{\tau}} = S, \tilde{\tau} = \tau \right] \right] \\ &= \mathbb{E} [\hat{c}(\tilde{\tau}, S, I)] \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau} \hat{c}(\tau, S, I) d\tau \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる。すなわち、 $c^*(\lambda, S, I)$ は $\hat{c}(\tau, S, I)$ のラプラス・カールソン変換として与えられる。ここで、次のように関数を定義する。

$$\hat{\Phi}(\lambda, X) \equiv \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau} \hat{\phi}(\tau, X) d\tau \quad (2.13)$$

さらに、 $\hat{\Phi}_\pm(\lambda, X)$ と $\hat{\phi}_\pm(\tau, X)$ を、それぞれ、 $X \geq 0$ と $X \leq 0$ に対する $\hat{\Phi}(\lambda, X)$ と $\hat{\phi}(\tau, X)$ の価格と定義する。

X の定義から、 $X \geq 0$ に対してこのオプションは既にイン・ザ・マネーになっているので、簡単な計算から

$$\hat{\phi}_+(\tau, X) = e^{-r\tau} X + \frac{1 - e^{r\tau}}{rT} \quad (2.14)$$

となり、そのラプラス・カールソン変換は以下で与えられる。

$$\hat{\Phi}_+(\lambda, X) = \frac{\lambda}{\lambda + r} X + \frac{1}{(\lambda + r)T} \quad (2.15)$$

$X < 0$ に対しては、(2.8) 式の両辺をラプラス・カールソン変換して、以下の常微分方程式を得る。

$$\frac{\sigma^2}{2} X^2 \hat{\Phi}_{-,XX} - \left[rX - \frac{1}{T} \right] \hat{\Phi}_{-,X} - \lambda \hat{\Phi}_- = 0, \quad -\infty < X < 0 \quad (2.16)$$

ただし、境界条件

$$\lim_{X \rightarrow -\infty} \hat{\Phi}_-(\tau, X) = 0 \quad (2.17)$$

$$\hat{\Phi}_-(\tau, 0) = \frac{1}{(\lambda + r)T} \quad (2.18)$$

を満たすものとする。

この常微分方程式は $X = 0$, $X = -\infty$ に確定特異点を持つ合流型超幾何微分方程式である。したがって、その正則解は

$$\hat{\Phi}_-(\lambda, X) = \frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{(\lambda + r)T\Gamma(\beta)} \left(\frac{-2}{\sigma^2 T X} \right)^\alpha M \left(\alpha, \beta, \frac{2}{\sigma^2 T X} \right) \quad (2.19)$$

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} M(a, b, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{z^n}{n!} \\ (x)_n &= \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \\ \alpha &= \sqrt{(1/2 + r/\sigma^2)^2 + 2\lambda/\sigma^2} - (1/2 + r/\sigma^2) \\ \beta &= 2\sqrt{(1/2 + r/\sigma^2)^2 + 2\lambda/\sigma^2} + 1 \end{aligned}$$

である。以上より次の定理を得る。

定理 1 連続サンプリングによる算術平均ヨーロツパ型固定ストライク・カナディアン・エイジアン・コール・オプションの価格 $c^*(\lambda, S, I)$ は

$$c^*(\lambda, S, I) = \begin{cases} S \left\{ \frac{\lambda}{\lambda + r} X + \frac{1}{(\lambda + r)T} \right\}, & X \geq 0 \\ S \frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{(\lambda + r)T\Gamma(\beta)} \left(\frac{-2}{\sigma^2 T X} \right)^\alpha M \left(\alpha, \beta, \frac{2}{\sigma^2 T X} \right), & X < 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

で与えられる。したがって、時間を逆向きにとったこのオプションの価格 $\hat{c}(\tau, S, I)$ は

$$\hat{c}(\tau, S, I) = \begin{cases} S \left\{ e^{-r\tau} X + \frac{1 - e^{-rT}}{rT} \right\}, & X \geq 0 \\ S \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\hat{\Phi}_-}{\lambda} \right], & X \leq 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

で与えられる。ここで、 $\mathcal{L}^{-1}$ はラプラス逆変換の演算子を表す。

Lipton [7] によると、(2.21) における $S \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\hat{\Phi}_-}{\lambda} \right]$ という表現は Geman and Yor [3] の擬似解析解と同値であり、このカナディアン・オプションの価格はラプラス変換を通して、彼らの解と密接に関係していることがわかる。

2.3 数値実験

この節では Kimura [6] の確率化法アルゴリズムを用いて、前節で導出されたカナディアン・エイジアン・オプションの価格から真の価格を計算する。次に、その結果と既存の評価手法との数値比較を行う。プログラムは Mathematica (Version 4.1) で実装し、Pentium III (650 MHz) の PC 上で行った。ここで、表 1 から表 4 における LB は Rogers and Shi [8] の下限値、GY は Geman and Yor [3] で導出された擬似解析解のプロムウィッチ積分によるラプラス逆変換、OS は Kimura [6] のアルゴリズムによって計算された値、MC は Kemna and Vorst [4] で用いられた対応する幾何平均ヨーロッパ型エイジアン・オプションの解析解を制御変量にするモンテ・カルロ法で得られた値、そして、UB は Thompson [9] の上限値をそれぞれ表している。また、括弧の中の数字は秒単位での計算時間を表している。この数値比較実験では MC の値をベンチマークとし、GY の値と OS の値の比較を行う。

表 1、表 2 は最頻値マッチングを採用した場合のボラティリティが低いときと高いときの計算結果をそれぞれ表している。表 1 のパラメータは $N = 13$, $S = 100$, $I = 0$, $t = 0$, $T = 1$, $r = 0.04$ である。OS は計算時間は短いものの、他の計算手法に比べて GY の値をかなり過大評価していることがわかる。特に、イン・ザ・マネーからアウト・オブ・ザ・マネーにかけてその傾向が強い。また、GY は非常に長い計算時間がかかることが見て取れるが、GY の計算で用いられているラプラス逆変換の一種である OS も時間がかかっていることがわかる。表 2 のパラメータは $N = 13$, $S = 100$, $I = 0$, $t = 0$, $T = 1$, $r = 0.04$ である。表 2 から、表 1 に比べて GY に対する過大評価は改善され、ほとんど値に等しくなっていることがわかる。計算時間も GY よりも速く、この場合は OS の方に優位性があるといえる。

一方、表 3、表 4 は平均値マッチングを採用した場合のボラティリティが低いときと高いときの計算結果をそれぞれ表している。表 3 のパラメータは $N = 14$, $S = 100$, $I = 0$, $t = 0$, $T = 1$, $r = 0.04$ である。この表から表 1 の OS の値よりも GY の値に対する過大評価が若干改善されていることがわかるが、イン・ザ・マネーからアウト・オブ・ザ・マネーにかけて過大評価をしていることは共通している。表 4 のパラメータは $N = 14$, $S = 100$, $I = 0$, $t = 0$, $T = 1$, $r = 0.04$ である。表 4 から GY の値に対して過小評価をしていることがわかり、その値は LB の値でさえ下回っている。それゆえ、平均値マッチングではボラティリティが大きくなるにつれて、値が不安定になることがあると予想される。全ての表からわかることは、アメリカ型バニラ・オプションの場合、リチャードソン外挿法において Carr [2] は $N = 3$ 、Kimura [6] は $N = 8$ を採用していたのに対して、OS によって計算される真の値は $N = 13, 14$ とかなり大きな値を選ばないと収束しないといった性質がある。この理由の 1 つは導出したカナディアン・エイジアン・オプションの価格がクンマー関数を含んでいることにあると考えられる。

図1は最頻値マッチングを採用した場合の原資産価格のボラティリティを、横軸にエイジアン・オプションの価格を縦軸に取ったグラフである。破線はOSで、実線はGYで計算されたこのオプションの値を表している。ここで、パラメータは $N = 13, S = 100, K = 95, I = 0, t = 0, T = 1, r = 0.04$ である。ボラティリティが低いところでは過大評価をしていることが見て取れる。ボラティリティがゼロに近づく程、この過大評価は大きくなり、計算時間が現実的なものでなくなる。そのため、このグラフの横軸は $\sigma \geq 0.1$ としている。ボラティリティのゼロ近傍にいわゆる特異性が存在していることがわかる。図2は平均値マッチングを採用した場合の原資産価格のボラティリティを、横軸にエイジアン・オプションの価格を縦軸に取ったグラフである。点線はOSで、実線はGYで計算されたこのオプションの値を表している。ここで、パラメータは $N = 14, S = 100, K = 95, I = 0, t = 0, T = 1, r = 0.04$ である。最頻値マッチングを選択した場合と同様に、ボラティリティの低いところで過大評価をしていることが見て取れるが、それは最頻値マッチングの場合よりも小さいことがわかる。GYの値に対してボラティリティの上昇につれて波打ちながら収束していつていることがわかるので、表4から予想された平均値マッチングによるOSの不安定性が認められる。この不安定性は最頻値マッチングの場合には見て取れないものである。図1、図2を通して、ボラティリティの上昇につれて、OSによって計算されたエイジアン・オプションの価格がGYに収束していく様子も見られる。

図3は最頻値マッチングを採用した場合の原資産価格を、横軸にエイジアン・オプションの価格を縦軸に取ったグラフである。破線はOSで、実線はGYで計算されたこのオプションの値を表している。ここで、パラメータは $N = 13, K = 100, I = 0, t = 0, T = 1, r = 0.04, \sigma = 0.2$ である。表1で見られたイン・ザ・マネーからアウト・オブ・ザ・マネー周辺の過大評価が見て取れる。図4は平均値マッチングを選択した場合の原資産価格を、横軸にエイジアン・オプションの価格を縦軸に取ったグラフである。点線はOSで、実線はGYで計算されたこのオプションの値を表している。ここで、パラメータは $N = 14, K = 100, I = 0, t = 0, T = 1, r = 0.04, \sigma = 0.2$ である。この図から、図3と同様に過大評価をしていることがわかるが、その値は最頻値マッチングのそれより小さい。図3と図4から判断すると、平均値マッチングの方が最頻値マッチングよりもGYの近似値として精度が良いといえる。

(1) 最頻値マッチング

表1: $c(t, S, I)$ の近似に対する数値比較

σ	K	LB	GY	OS	MC	UB
0.2	95	8.529	8.530(143.5)	8.653(2.5)	8.530	8.532
	100	5.520	5.521(132.6)	5.747(2.2)	5.524	5.522
	105	3.324	3.325(129.2)	3.539(2.0)	3.326	3.326
0.3	95	10.433	10.435(50.0)	10.462(0.9)	10.433	10.440
	100	7.729	7.730(47.3)	7.786(0.8)	7.732	7.735
	105	5.575	5.576(45.0)	5.640(0.8)	5.576	5.581

表2: ボラティリティが高いケース

σ	K	LB	GY	OS	MC	UB
0.4	95	12.453	12.456 (26.6)	12.452 (0.6)	12.462	12.471
	100	9.939	9.942 (25.3)	9.948 (0.6)	9.945	9.956
	105	7.838	7.841 (24.9)	7.855 (0.5)	7.846	7.856
0.5	95	14.512	14.519 (14.7)	14.514 (0.5)	14.534	14.552
	100	12.139	12.145 (14.7)	12.144 (0.5)	12.149	12.178
	105	10.097	10.103 (2.6)	10.103 (0.3)	10.108	10.137

(2) 平均値マッチング

表 3: $c(t, S, I)$ の近似に対する数値比較

σ	K	LB	GY	OS	MC	UB
0.2	95	8.529	8.530 (143.5)	8.579 (10.1)	8.530	8.532
	100	5.520	5.521 (132.6)	5.683 (9.5)	5.524	5.522
	105	3.324	3.325 (129.2)	3.513 (9.0)	3.326	3.326
0.3	95	10.433	10.435 (50.0)	10.434 (3.1)	10.433	10.440
	100	7.729	7.730 (47.3)	7.757 (3.0)	7.732	7.735
	105	5.575	5.576 (45.0)	5.620 (3.0)	5.576	5.581

表 4: ボラティリティが高いケース

σ	K	LB	GY	OS	MC	UB
0.4	95	12.453	12.456 (26.6)	12.422 (1.8)	12.462	12.471
	100	9.939	9.942 (25.3)	9.922 (1.8)	9.945	9.956
	105	7.838	7.841 (24.9)	7.835 (1.7)	7.846	7.856
0.5	95	14.512	14.519 (14.7)	14.510 (1.4)	14.534	14.552
	100	12.139	12.145 (14.7)	12.138 (1.4)	12.149	12.178
	105	10.097	10.103 (2.6)	10.099 (0.4)	10.108	10.137

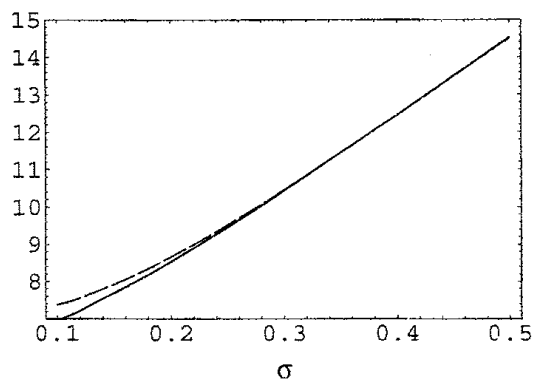


図 1: OS と GY の比較 (最頻値マッチング)

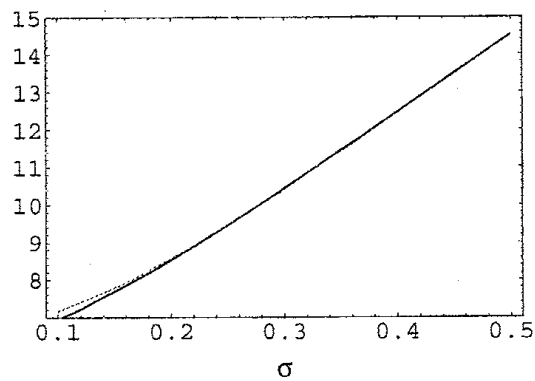


図 2: OS と GY の比較 (平均値マッチング)

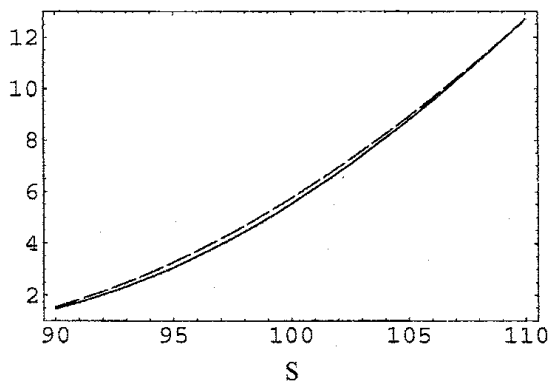


図 3: OS と GY の比較 (最頻値マッチング)

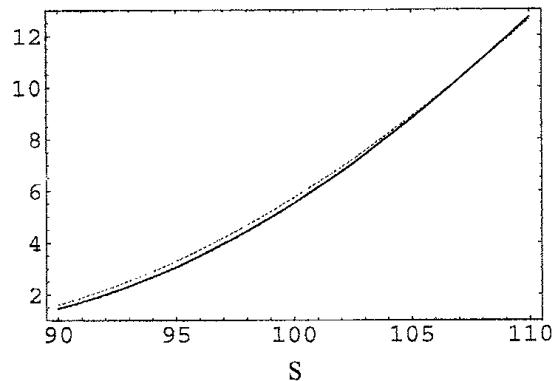


図 4: OS と GY の比較 (平均値マッチング)

3 おわりに

本論文では、Kimura [6] の確率化法を用いて、未だに解析解が得られていない連続サンプリングによる算術平均ヨーロッパ型固定ストライク・エイジアン・オプションの価格評価を行った。その際、このオプションの価格のラプラス・カールソン変換に対応するカナディアン・エイジアン・オプションの価格を導出した。その解は Geman and Yor [3] の擬似解析解と同値な表現であり、既存の研究手法を含めて、Geman and Yor の擬似解析解のプロムウィッチ積分によるラプラス逆変換と Kimura の確率化法によるカナディアン・エイジアン・オプションのラプラス逆変換の数値比較実験を行った。その結果、原資産のボラティリティが低いときは近似精度があまり良くなく、とりわけイン・ザ・マネーからアウト・オブ・ザ・マネーにかけて誤差が大きいことが示された。しかし、ボラティリティが高くなるにつれて、本論文での方法の精度は高くなり、計算時間も短くなった。特に、最頻値マッチングを用いる場合にそれが顕著に現れていた。平均値マッチングはボラティリティが低いとき、最頻値マッチングの値よりも若干精度は良かった。一方、ボラティリティが高くなるにつれてその値が不安定になることが示された。このような性質は最頻値マッチングによって計算した値からは見られなかった。

今後の研究の方向性としては、数値比較実験の際に明らかになった (i) 原資産価格のボラティリティのゼロ近傍での特異性を取り除くこと、(ii) イン・ザ・マネーからアウト・オブ・ザ・マネーにかけての過大評価を改善すること、さらには (iii) ボラティリティが高くなるにつれて現れる平均値マッチングの持つ不安定性の除去が挙げられる。

参考文献

- [1] Black, F. and M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, **81** (1973) 637-654.
- [2] Carr, P., "Randomization and the American put," *Review of Financial Studies*, **11** (1998) 597-626.
- [3] Geman, H. and M. Yor, "Bessel processes, Asian options, and perpetuities," *Mathematical Finance*, **3** (1993) 207-216.
- [4] Kemna, A.G.Z. and A.C.F. Vorst, "A pricing method for options based on average asset values," *Journal of Banking and Finance*, **14** (1990) 113-129.
- [5] Kijima, M., *Stochastic Processes with Applications to Finance*, Chapman and Hall, New York, 2003.
- [6] Kimura, T., "Alternative randomization for valuing American options," 2004 Daiwa International Workshop on Financial Engineering, Kyoto, Japan, August 30-31, 2004.
- [7] Lipton, A., "Self-similarities and similarities of path-dependent options," *Risk*, **12** (1999) 101-105.
- [8] Rogers, L.C.G. and Z. Shi, "The value of Asian option," *Journal of Applied Probability*, **32** (1995) 1077-1088.
- [9] Thompson, G.W.P., "Fast narrow bounds on the value of Asian options," working paper, Centre for Financial Research, Judge Institute of Management, University of Cambridge.