

li 2 の計算について

防衛大 伊関 昌
岡山大 鹿野 健

いわゆる積分対数 (logarithmic integral)

$$(1) \quad \text{li } x = P \int_0^x \frac{dt}{\log t} \quad (x > 0)$$

は素数定理

$$(2) \quad \pi(x) \sim \text{li } x \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$(3) \quad \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

に現われるのが解析数論においては「なじみの」積分であるが、素数定理は普通は(2)の形よりも (主値積分を避けて)

$$(4) \quad \pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \rightarrow +\infty)$$

と書かれる。初等函数 $x / \log x$ を使った分り易い形の (3) よりも、(2) あるいは (4) の形の方が本質的であることは、例えば Riemann zeta 函数に対するいわゆる Riemann 予想が

$$(5) \quad \pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

($\forall \epsilon > 0$)

と同等である (von Koch), という事実からも明かである。

さて, 多くの解析数論の本では, この $\text{li } x$ と $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ との『違い』

$$(6) \quad \text{li } 2 = \int_0^2 \frac{dt}{\log t}$$

について, この値が $1.04 \dots$ (あるいは $1.045 \dots$) である, と ~~書いて~~ 書いてありながら, その計算法あるいは数表等について言及していない事を, 講演者の一人 (鹿野) は前から気にしていた。専門書ならばともかく, 入門的な教科書ならば当然 $\text{li } 2$ の値の根拠ぐらひは述べて当然と思われろのに, 気が付いて種々の本を探しても, 『どこにも』載っていないのである!

$\text{li } 2$ の値が詳しく分らないと困る, という誤では決して無いが, $\text{li } 2 > 1$ という事は, 素数定理との関係と言えば素数 1 個分を数え落すことも意味するともなり, 少々はおもしろそうである。実際にやってみると, この

$$(7) \quad \text{li } 2 > 1$$

の『証明』は見掛け程は容易でないらしりと気付いた次第。~~書いて~~

$$\begin{aligned} \text{li } 2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^2 \right) \frac{dt}{\log t} \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\log(1-x)} + \frac{1}{\log(1+x)} \right\} dx \end{aligned}$$

となるので,

$$(8) \quad f(x) \equiv \frac{1}{\log(1-x)} + \frac{1}{\log(1+x)}$$

と置くと, 実は $[0, 1]$ で $f(x)$ は連続で, $x=0$ のとき
最小値 1 を取りことが分り, 従って $\text{li } 2 > 1$ となる.

しかし, この方法では $\text{li } 2 = 1.045 \dots$ は出て来ない.
一般に $\text{li } x$ ($x > 1$) の近似値を求めるために, いまゆ
る積分指数 (exponential integral) $\text{Ei } x$ と関連させて,

$$(9) \quad \text{li } x = -P \int_{-\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \text{Ei}(\log x)$$

を利用すると, $x > 1$ のとき,

$$(10) \quad \text{li } x = \log \log x + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n! n}$$

を得る. 従って, 特に $x=2$ のときは,

$$(11) \quad \text{li } 2 = \log \log 2 + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log 2)^n}{n! n}$$

(γ は Euler の定数)

となるので, $\log \log 2 = -0.36674 \dots$, $\gamma = 0.57722 \dots$

(6位以下を四捨五入)より, (11) の右辺の級数を $n=4$ 程度まで加えれば,

$$Li\ 2 = 1.045 \dots$$

を得る。

公式 (10) は, 伊関氏から鹿野へ教えられたものであったが, その後, これは Bessel によるものでありことも分った。この公式の利点は右辺の級数の収束が早い点であるが, 一欠点(?)は第1項の $\log \log x$ の項である。 $\log \log$ の数表でもあれば一番手取り早いから, そのような数表はあるのか? また, まだ現物は見ていないが, 積分対数の数表として(恐らく唯一のもの?), ロシア語の本ではあるが, Капроб-Пазымовский (Acad. Sci. Moscow, 1956) によるものがあることもわかった。

[編集者注] $\text{li } x$ の数値計算には, $\text{Ei}(\log x)$ に直して (10) を利用するのがもっとも簡便らしい. Euler 定数

$$\gamma = 0.57721 \ 56649 \ 01532 \ 86060 \dots$$

の値が既知とすれば, 電卓でも容易に求められる. また $\text{li } x = 0$ である x を求めるのには, この導函数が初等函数であることを利用して, Newton 法によれば, やはり容易である. 十進十桁以下の精度でよければ, いまでは $\log \log x$ の値は数表をさがすよりも, 電卓の $\log$ (正しくは $\ln$) のキーを2度押すほうが早くて確実に存った.

$\text{li } 2$ を (8) の数値積分によって求めることは, 区間 $[0, 1]$ の両端に特異点があるため, 普通の積分公式を機械的にあてはめてもよい値はえられない. しかしその種の函数のために考えられた「森の二重指数公式」(たとえば講究録 No. 172, p. 94 など) によると, 非常によい結果がえられる (TOSBAC-3400 の倍長演算で, 少なくとも18桁正しい値がでている). ただし (8) の函数値計算において, たとえば $x < 10^{-4}$ といった0にごく近い所では, (8) のままでなく, その Maclaurin 展開式

$$1 + \frac{1}{12} x^2 + \frac{403}{720} x^4 + \dots$$

による, といった配慮は不可欠である.