

GAUSSIAN MEASURES AND OPERATORS ON HILBERT SPACES

東工大理 明石重男 (Shigeo Akashi)

§ 1. 緒論

このノートでは、信号解析も函数解析の分野で議論することも目的とする。ここで扱う信号は実数の閉区間 $[a, b]$ を信号の測定時間間隔とし、この上で有限のエネルギーを持つ信号全体のなす集団を議論の対象とする。すなわち、数学的には区間 $[a, b]$ 上で2乗可積分な Lebesgue 可測関数の全体のなす Hilbert 空間が、我々の議論の対象となる。信号の工学的論議を目的とする訳ではないので、直ちに数学的な信号解析に入ることにする。信号解析固有の用語などは既知として話しを進めたい。(例えば、文献 [1~3, 7] などを参照されたい。)

§ 2. 本論

いま, $\mathcal{H} \triangleq L^2[a, b]$ として, 入力信号空間 $\mathcal{H}$ から出力信号空間 $\mathcal{H}$ への信号の伝送が, 恒等作用素 I によって成される場合を考える. しかし, $a \in \mathcal{H}$ を入力した時, 出力側では受信信号が $Ia = a$ として受け取られることは少なく, 一般に雑音 $x \in \mathcal{H}$ が加わり, $a + x$ として受信される. ここで我々は, x の分布が $\mathcal{H}$ 上の確率測度 μ によって決定される場合を取り扱う. この時, 次の問題を考える. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の状態ベクトルの集合を $S(\mathcal{H}) \triangleq \{\varphi \in \mathcal{H} : \|\varphi\| = 1\}$ とする. いま, $\varphi \in S(\mathcal{H})$ を 1 つ固定する. 信号を入力する側は, $\mathbb{C}\varphi \triangleq \{c\varphi : c \in \mathbb{C}\}$ の中から信号を選んで送ることにする. 入力された信号が $c\varphi$ である時, 出力信号には雑音 x が加わり $c\varphi + x$ となる. ここで信号を受信する側は, 出力信号 $c\varphi + x$ の φ 方向への射影成分を入力信号と解釈するものとする. すなわち,

$$\begin{array}{ll}
 c\varphi \text{ ----- 入力信号} & c\varphi + x \text{ ----- 出力信号} \\
 c\varphi + \underbrace{\langle \varphi \otimes \varphi \rangle x}_{!!} \text{ ----- 受信側が入力されたと} \\
 c\varphi + \langle x, \varphi \rangle \varphi & \text{判断する信号}
 \end{array}$$

のようになる. 以上が, 状態ベクトル φ を用いた場合の, 信号のシンプルな伝送システムであるが, この伝送方法は, $S(\mathcal{H})$ からの φ の選び方に依りて定まるものである. 従って, こ

では、雑音による影響を受け易い伝送システムを与える φ 、影響を受けにくい伝送システムを与える φ は、どのようなものかについて調べてみる。但し、ここで伝送システムが、雑音による影響を受け易い場合とは、 $|\langle x, \varphi \rangle|$ の値を大きくする x が高頻度に出る場合も、受けにくい場合とは、 $|\langle x, \varphi \rangle|$ の値を小さくする様な x しか出現しない場合をいう。

この問題に対して、次の様に考えることができる。まず R も、 $\mathcal{H}$ 上の作用素で、 $R^* = R \geq 0$, $\overline{\text{range}[R]} = \mathcal{H}$ を満たすものとする。 $S(\mathcal{H})$ から φ も1個取り出して固定する。この時、 $\mathcal{H}$ 上の確率測度 μ の φ 方向への射影を

$$\mu_\varphi(C) \triangleq \mu\{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, \varphi \rangle \in C\}$$

(但し、 C は $\mathbb{R}$ のBorel集合)で定める。これは雑音の φ 方向への分布を表わしていると解釈できる。なお我々が取り扱う確率測度 μ は、次の条件(1)~(4)を満足するとする：

$$(1) \quad \int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$$

$$(2) \quad \mu_\varphi \ll m_0, \quad m_0 \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上の Lebesgue 測度}$$

$$(3) \quad d\mu_\varphi / dm_0 \in L^2(\mathbb{R})$$

$$(4) \quad \mu \text{ の共分散作用素 } = R$$

条件(2)は m_0 に依存し、(4)は作用素 R に依存するので、

(1)~(4)を満たす $\mathcal{H}$ 上の確率測度の全体を $\mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)$

で表わす。そして状態ベクトル φ を用いた場合の伝送システムに対する雑音の影響も、 μ_φ の微分エントロピーを用いて、

$$S(\mu_\varphi) \triangleq \int_{\mathbb{R}} - \frac{d\mu_\varphi}{dm_0} \log \frac{d\mu_\varphi}{dm_0} dm_0.$$

で評価することにする。以下、我々は次の命題を示す。

命題. $S(\mathcal{H})$ から φ を1つ取り出し固定する。この時、

$$\begin{aligned} N_\varphi &\triangleq \sup \{ S(\mu_\varphi) : \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R) \} \\ &= \frac{1}{2} \log \{ (2\pi e) \langle R\varphi, \varphi \rangle \} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、共分散作用素 R のスペクトル分解を

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \otimes e_k, \quad 0 < \lambda_k \downarrow 0, \quad \{e_k\}: \mathcal{H} \text{ の基底}$$

と表わした時、数列 $\{\lambda_k\}$ は単調減少となる。

以下、準備として補題も述べる。

補題1. μ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度で、 $\mu \ll m_0$, 平均 = 0, 分散 = σ^2 , かつ $d\mu/dm_0 \in L^2(\mathbb{R})$ を満たすものとする。この時、常に次の不等式が成立する:

$$S(\mu) = \int_{\mathbb{R}} - \frac{d\mu}{dm_0} \log \frac{d\mu}{dm_0} dm_0 \leq \frac{1}{2} \log (2\pi e \sigma^2)$$

なお，等号を成立させる確率測度 μ は，平均 $= 0$ ，分散 $= \sigma^2$ である Gauss 測度であり，かつそれに限られる．つまり，

$$\frac{d\mu_G}{d\mu_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}$$

を満たす μ_G ．

証明． μ ， ν を 2 つの確率測度とした時，

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{d\mu_0} \log \frac{d\mu}{d\mu_0} d\mu_0 \geq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{d\mu_0} \log \frac{d\nu}{d\mu_0} d\mu_0$$

が成り立ち，等号が成立するのは $\mu = \nu$ の場合に限られることを用いる．

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} -\frac{d\mu}{d\mu_0} \log \frac{d\mu}{d\mu_0} d\mu_0 &\leq \int_{\mathbb{R}} -\frac{d\mu}{d\mu_0} \log \frac{d\mu_G}{d\mu_0} d\mu_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}} -\frac{d\mu}{d\mu_0} \left\{ -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{t^2}{\sigma^2} \right\} d\mu_0 \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) + \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{2\sigma^2} \frac{d\mu}{d\mu_0} d\mu_0 \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2) \end{aligned}$$

補題 2. 状態ベクトル $\varphi \in S(\mathcal{H})$ と確率測度

$\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)$ を与えよ。この時、次のことがいえる：

μ の φ 方向への射影 μ_φ の平均 $= 0$, 分散 $= \langle \varphi, R\varphi \rangle$

証明. μ_φ の平均は,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t \mu_\varphi(dt) &= \int_{\mathbb{R}} \langle t\varphi, \varphi \rangle \mu_\varphi(dt) = \int_{\mathbb{R}} \langle t\varphi, \varphi \rangle \mu((dt)\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}\varphi} \langle x, \varphi \rangle \mu(dx) = \int_{\mathcal{H}} \langle x, \varphi \rangle \mu(dx) = 0 \end{aligned}$$

μ_φ の分散は,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} t^2 \mu_\varphi(dt) &= \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi, t\varphi \rangle \langle \varphi, t\varphi \rangle \mu_\varphi(dt) = \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi, t\varphi \rangle^2 \mu((dt)\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}\varphi} \langle \varphi, x \rangle \langle \varphi, x \rangle \mu(dx) = \int_{\mathcal{H}} \langle \varphi, x \rangle^2 \mu(dx) \\ &= \langle \varphi, R\varphi \rangle \end{aligned}$$

以上の補題をもとに命題の証明を行なう。

命題の証明. いま, 平均ベクトル $= 0$, 共分散作用素 $= R$ をもつ $\mathcal{H}$ 上の Gauss 測度を μ_G とする. この時, 明らかに, $\mu_G \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)$, また, μ_G の φ 方向への射影

$(\mu_G)_\varphi$ は, 平均 = 0, 分散 = $\langle \varphi, R\varphi \rangle$ を持つ R 上の Gauss 測度であるから, 補題 1 より,

$$S(\mu_\varphi) \leq S(\{\mu_G\}_\varphi) = \frac{1}{2} \log(2\pi e \langle \varphi, R\varphi \rangle^2)$$

が成り立つことがわかる. 上述の式に共分散作用素 R のスペクトル分解の式を代入すると,

$$S(\mu_\varphi) = \frac{1}{2} \log(2\pi e \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \varphi, e_k \rangle^2)$$

故に, $\varphi = e_k$ とすると上の式より, $Ne_k = \frac{1}{2} \log(2\pi e \lambda_k)$ となり, $\{Ne_k\}$ は単調減少数列である.

References

- [1] Baker, C. R., Joint measures and cross-covariance operators, Trans. Amer. Math. Soc. 186(1973), 273-289.
- [2] Baker, C. R., Calculation of the Shannon information, J. Math. Anal. Appl. 69(1979), 115-123.
- [3] Kuo, Hui-Hsing, Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 463(1975), Springer-Verlag.
- [4] Schatten, R., Norm ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, 1970.
- [5] Shannon, C. E., A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. 27(1948), 379-423 and 623-656.
- [6] Umegaki, H., Absolute continuity of information channels, J. Math. Anal. Appl. 88(1982) 364-377.
- [7] 梅垣壽春, 大矢雅則; 量子論的エントロピー, 情報理論の函数解析的基礎II, 共立出版, (近刊).