

ある 1:1 共鳴振動子の摂動系とその Maslov 量子化条件

上野嘉夫

京都大学 工学部 数理工学教室

1. はじめに 1:1 共鳴振動子の解はすべてが同一周期の周期解だが、この系に‘弱い’摂動が加わるとほとんどの周期解は壊れ、わずかの周期解のみが‘生き残る’([K],[M])。特に摂動項がいくつかパラメータを含めば、周期解はパラメータの変化に伴い分岐することがある。Hénon-Heiles 系は、その典型例である ([AS])。

摂動系の、原点近傍での‘生き残り’周期解の研究には、ハミルトニアン H の Birkhoff-Gustavson (B.-G.) 標準形が用いられる。Kummer は、1:1 共鳴振動子の摂動系のハミルトニアン H の B.-G. 標準形級数を 4 次で打ち切って得た関数をハミルトニアンとするハミルトン系（‘打ち切り系’）を考え、打ち切り系の周期解分布が、原点近傍においても元の摂動系の周期解分布をよく近似することを示した ([K])。この近似の利点は、打ち切り系の周期解分布が、系の $U(1)$ -対称性による簡約化法を用いて幾何的に求められる事で、Hénon-Heiles 系の周期解分岐について成功をおさめた ([CR],[K])。

典型例の Hénon-Heiles 系に目を転じると、軸対称銀河モデルに端を発するこの系は、量子化学の関心を集めている ([BJ])。Hénon-Heiles 系の打ち切り系を量子論の観点から調べると、古典系で周期解分岐が生じたパラメータ値においてエネルギー固有値の縮退が起こり、固有関数の密度関数に顕著な変化が見いだされた ([U])。この結果から、より一般の 1:1 共鳴振動子の摂動系の打ち切り系の周期解分岐と、量子論における打ち切り系のエネルギー固有値分布の関係に興味をもたれる。

本稿では、1:1 共鳴振動子の摂動系の打ち切り系のなかで 3-パラメータを持つものの量子論を考え、エネルギー固有値の挙動について報告する。但し、はじめに B.-G. 標準形ありきの立場をとり、もとの摂動系の形は問わない。量子化の手法として行列要素を用いた、エネルギー固有値の数値計算から得た興味深い挙動を紹介する。次に、量子化のスキームとしては異なるが、行列要素から得られた固有値の挙動が、系の Maslov 量子化条件により定性的に説明可能なことを示す。古典系における周期解分岐と Maslov 量子化条件の双方と、古典系の‘エネルギー運動量多様体’の葉層構造との密接な関係は、固有値の挙動と周期解分岐との間の、葉層構造を介した関連を示唆しているといえる。

2. 摂動系の古典論（周期解分岐） 本節では、対象とする摂動系を導入し、古典論における周期解分岐を Kummer([K]) に従って調べる。本稿では、以下、必要に応じて微分幾何学の用語や記法を用いる。摂動系をシンプレクティック多様体（相空間）、 $(R^2 \times R^2, d\Theta_c)$ 、上で考える。ここで Θ_c は正準 1 形式で、デカルト座標、 $(p, q) \in R^2 \times R^2$ 、によって

$$(2.1) \quad \Theta_c = \sum_{j=1}^2 p_j dq_j$$

と表される。複素変数 (z_j) を $z_j = (1/\sqrt{2})(q_j - ip_j)$, $j = 1, 2$ で導入し、 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}^2$ とを同一視する。

本稿では、3-パラメータ、 $(\alpha_j)_{j=1,2,3}$, $\alpha_j \geq 0$ 、を含むハミルトニアン、

$$(2.2) \quad H_\alpha = J + \alpha_1 J M_3 + \alpha_2 J M_1 + \frac{\alpha_3}{2} M_3^2,$$

を持つ 1 : 1 共鳴振動子の摂動系を考える。但し、 J, M_j ($j = 1, 2, 3$) は、それぞれ

$$(2.3) \quad \begin{aligned} J &= |z_1|^2 + |z_2|^2, & M_1 &= 2 \Re z_1 \bar{z}_2, \\ M_2 &= 2 \Im z_1 \bar{z}_2, & M_3 &= |z_1|^2 - |z_2|^2 \end{aligned}$$

である。 J は 1 : 1 共鳴振動子のハミルトニアンに他ならない。さらに、 H_α の J 以外の項は J と Poisson 可換なので H_α は既に B.-G. 標準形になっている。

注意: 一般の (α_j) に対し、(2.2) の H_α を考えても、正準変換で $\alpha_j \geq 0$ ($j = 1, 2, 3$) の場合に帰着する。

以下、摂動系の周期解分岐を、 $U(1)$ -対称性による簡約化法を用いて調べる。 $\mathbb{C}^2$ 上のシンプレクティック ($d\Theta_\alpha$ を変えない) $U(1)$ -作用、

$$(2.4) \quad \Phi_t : z \in \mathbb{C}^2 \longrightarrow \exp(it)z \in \mathbb{C}^2, \quad (t \in [0, 2\pi])$$

は、 H_α を不変に保つので、 $U(1)$ -作用による系の簡約化 (変数低減) ができる ([AM])。すなわち、 $U(1)$ -作用 (2.4) に随伴した運動量写像 (第 1 積分) として (2.3) の J が得られ、次の図式で 2 次元シンプレクティック多様体、 $(S^2(h), \omega_h)$ が得られる。

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xleftarrow{i_h} & J^{-1}(h) \quad (h > 0) \\ & & \downarrow \pi_h \\ & & S^2(h) \cong J^{-1}(h)/U(1) \end{array}$$

$S^2(h)$ は半径 h の球面、 i_h は包含写像、射影 π_h は $z \in J^{-1}(h)$ に対して Hopf 写像

$$(2.6) \quad \pi_h(z) = (2\Re z_1 \bar{z}_2, 2\Im z_1 \bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{R}^3$$

で与えられる。シンプレクティック形式 ω_h は、 $S^2(h)$ の標準極座標 (θ, ϕ) を用いて、

$$(2.7) \quad \omega_h = -\frac{h}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi,$$

となる。摂動系のハミルトニアン H_α は $U(1)$ -不変なので、図式 (2.5) に従い、 $(S^2(h), \omega_h)$ 上のハミルトン系 (簡約系) に帰着する。簡約系のハミルトニアン K_α^h は、

$$(2.8) \quad K_\alpha^h \circ \pi_h = H_\alpha \circ i_h.$$

から得られる。周期解分岐を調べる上で、次の結果が重要である。

定理1 ([CR],[K]). レベル集合 $J^{-1}(h)$ 上を流れる、摂動系の安定/不安定な '生き残り' 周期解には、簡約系のハミルトニアン K_a^h の安定/不安定な平衡点が 1 : 1 に対応する。

この定理を踏まえ、摂動系 (2.2) の周期解分岐に代わりに、簡約系のハミルトニアン K_a^h の平衡点分岐に関する結果をのべて本節を終わる。

命題2. 簡約系のハミルトニアン K_a^h の臨界点は次の表のとおり分類される。

(2.9)

	$\alpha_1 \neq 0$ $\alpha_2 \neq 0$	$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 \neq 0$	$\alpha_1 \neq 0$ $\alpha_2 = 0$	$\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0$
$0 \leq \alpha_3^{2/3} < \alpha_1^{2/3} + \alpha_2^{2/3}$	I	I	I	
$\alpha_3^{2/3} = \alpha_1^{2/3} + \alpha_2^{2/3}$	II	I	I	V
$\alpha_3^{2/3} > \alpha_1^{2/3} + \alpha_2^{2/3}$	III	III	IV	IV

但し、項目 (I)-(V) はそれぞれ

- (I) 楕円型臨界点 2 個、
 - (II) 楕円型臨界点 2 個と退化臨界点 1 個、
 - (III) 楕円型臨界点 3 個と双曲型臨界点 1 個、
 - (IV) 楕円型臨界点 2 個と、放物型臨界点のなす円、
 - (V) $S^2(h)$ 上の全ての点が臨界点、
- を意味する。

表 (2.9) より、 $\alpha = (\alpha_j)$ 間の等式

$$(2.10) \quad \alpha_3^{2/3} = \alpha_1^{2/3} + \alpha_2^{2/3}$$

を境界として周期解分岐が生じることがわかる。

注意: 分岐が K_a^h の等エネルギー集合の葉層構造の変化とともに生じるのは次図 1 から明らかである。 $S^2(h)$ 上の K_a^h の等エネルギー線のある種の立体射影を用いて描いた (共通データ: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$)。

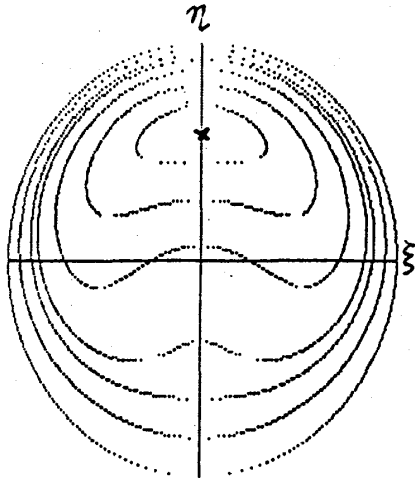


図 1.1 $\alpha_3 = 0.8$ の場合

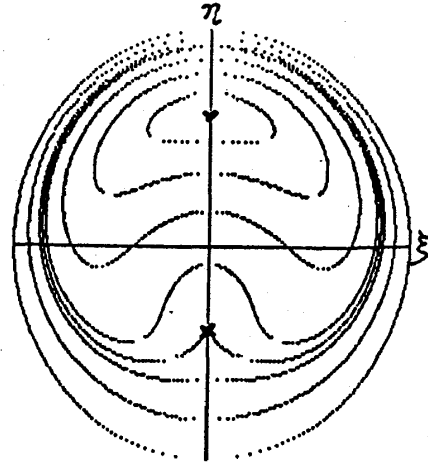


図 1.2 $\alpha_3 = 1.0$ の場合

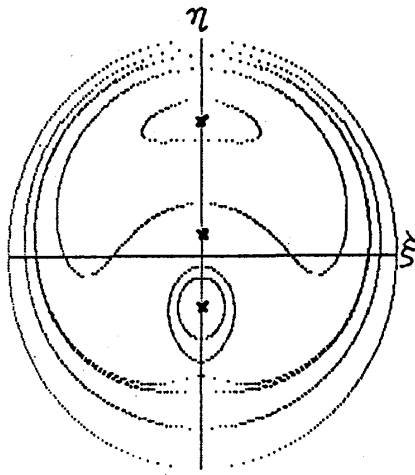


図 1.3 $\alpha_3 = 1.2$ の場合

$$\begin{array}{ccc} S^2(h) \setminus \text{南極} & \rightarrow & D(\text{単位円板}) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ \gamma & \xrightarrow{\quad} & (\xi, \eta) \end{array}$$

$$\begin{cases} \xi = \frac{\gamma_1}{\sqrt{2h(h+\gamma_3)}} \\ \eta = \frac{\gamma_2}{\sqrt{2h(h+\gamma_3)}} \end{cases}$$

3. 摂動系の量子論：行列要素からの固有値 摂動系、 $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, d\Theta_c, H_\alpha)$ 、を量子化するスキームは一意ではない。本節では、摂動系の量子論として、(2.2)において、 J 、 M_1 、 M_3 を素朴に量子化して得られる

$$(3.1) \quad \hat{H}_\alpha = \hat{J} + \alpha_1 \hat{J} \hat{M}_3 + \alpha_2 \hat{J} \hat{M}_1 + \frac{\alpha_3}{2} \hat{M}_3^2$$

をハミルトン作用素とする系を、 $L^2(\mathbb{R}^2)$ で考える。作用素、 $\hat{J}$ 、 $(\hat{M}_j)_{j=1,2,3}$ は、(2.3)において $\{z_j, \bar{z}_k\}_{j,k=1,2}$ を、 $L^2(\mathbb{R}^2)$ の調和振動子基底の生成消滅演算子、 $\{a_j^\dagger, a_k\}_{j,k=1,2}$ にそれぞれ置き換えて得られる：

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \hat{J} &= a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1, & \hat{M}_1 &= a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger, \\ \hat{M}_2 &= (-i)(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger), & \hat{M}_3 &= a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2. \end{aligned}$$

Hénon-Heiles 系の打ち切り系の量子論 ([U]) と同様に、ハミルトン作用素 $\hat{H}_\alpha$ のパラメータ α を変化させながら、 $\hat{H}_\alpha$ の固有値 (エネルギー固有値) を数値計算で求めた。調和振動子基底を、 $\{|j, k\rangle\}_{j,k=0,1,\dots}$ と書くとき $L^2(\mathbb{R}^2)$ は、部分空間

$$(3.3) \quad V_n = \text{span}\{|j, k\rangle : j + k = n\} \quad (n : \text{非負整数})$$

の直和に分解する。 V_n は、固有値 $\hbar(n+1)$ に対応する $\hat{J}$ の固有空間である ($\hbar$ は、Planck 定数 $/ 2\pi$)。 $[\hat{J}, \hat{H}_\alpha] = 0$ より、 $\hat{H}_\alpha$ が各 V_n に作用することがわかるので、その固有値は $\hat{H}_\alpha$ を各 V_n に制限することで容易に数値計算できる。 $\hat{H}_\alpha$ の各 V_n への制限は、概念的には、2 節における摂動系の簡約化の際に相空間をレベル集合 $J^{-1}(\hbar)$ に制限したことに対応する。

以下に、 V_{10} における一例を示す。 α_1, α_2 を固定し、 α_3 を動かしたときの固有値のグラフである。縦軸は α_3 ($0 \sim 20$)、横軸は固有値 (適当にスケーリングしてある) である。

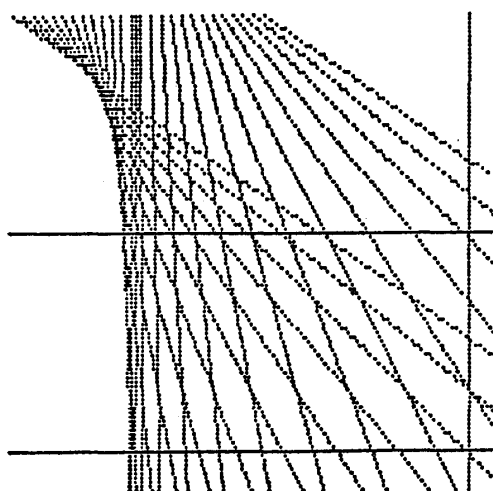


図 2.1 $\alpha_2 = 0$ の場合

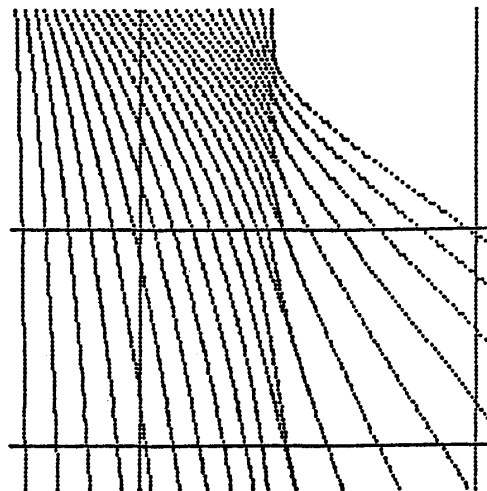


図 2.2 $\alpha_1 = 0$ の場合

数値計算の結果からパラメータの変化に伴って生じる固有値の縮退には、規則性がみとれる。すなわち、図 2.1 では、縮退はとびとびの α_3 の値でしか許されていない。図 2.2 では、エネルギーがあるしきい値を越えると固有値は 2 重縮退し縮退は解けない。

図 2.1 では、行列要素ははじめから対角形ゆえ説明が容易なので割愛するが、図 2.2 の挙動の原因は、行列要素から容易には読み取れない。そこで次節以降、 $\alpha_1 = 0$ の場合について、量子化のスキームとしては異なるが、摂動系の Maslov 量子化条件から固有値の挙動を検討する。

4. Maslov 量子化条件による固有値の評価 (1) Maslov 量子化条件とは束縛状態のエネルギー固有値が満たすべき条件である。与えられている古典系の情報から構成されるという意味では古典論の性質を抽出しやすいスキームといえる。Maslov 量子化条件を、次の手順で求める。

- (I) 摂動系の不変 Lagrange 部分多様体を求める。 J (2.3 参照) が摂動系の第

一積分であることから、不変 Lagrange 部分多様体はレベル多様体、

$$(4.1) \quad L_{h,E} = \{z \in \mathbb{C}^2 : J(z) = h(>0), H_\alpha(z) = E\}$$

によって与えられる（詳しくは、[MSS]等を参照されたい）。 $L_{h,E}$ はコンパクトなので Liouville-Arnold の定理 ([AM]) より、 $L_{h,E}$ の各連結成分は2次元トーラス、 T^2 、と微分同相になる。

注意: $L_{h,E}$ は、運動量写像 J とハミルトニアン（エネルギー関数） H_α それぞれのレベル集合の積集合なので、エネルギー運動量多様体とも呼ばれる。

(II) $T^2 \subset L_{h,E}$ の1次元サイクルの基底を求める。基底は、 $L_{h,E}$ が含まれているレベル集合 $J^{-1}(h)$ の主 $U(1)$ 束構造をフルに利用して得られる。

(III) (II)で求めた1次元サイクルの基底、 c_j ($j=1,2$)、に対して

$$(4.2) \quad \frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{c_j} \Theta_c - \frac{1}{4} \langle m_L, c_j \rangle \in \mathbb{Z} \quad (j=1,2)$$

が成立するような、 h と E とを求める。 m_L は Maslov 形式で、 $\langle, \rangle$ はペアリング。こうして得た E が、Maslov 量子化条件から定まる固有値である。本節では、手順 (I)、(II)を $\alpha_1 = 0$ の場合について実行する。

(I) では既に、不変 Lagrange 部分多様体が (4.1) で与えてあるが E の値によっては、多様体でなかったり、空集合であったりすることもある。そこで、 $L_{h,E}$ のトポロジーを E の値に応じて分類する。(4.1) から $L_{h,E}$ は $U(1)$ -作用 (2.4) に関し不変である。 $L_{h,E}$ を含む $J^{-1}(h)$ が主 $U(1)$ 束構造、 $\pi_h : J^{-1}(h) \rightarrow S^2(h)$ 、((2.5))を持つことから

$$(4.3) \quad L_{h,E} \cong S^1 \times \pi_h(L_{h,E}) = S^1 \times \{K_\alpha^h = E\}$$

を得る。すなわち、 $L_{h,E}$ のトポロジーの問題は簡約系の等エネルギー曲線 $\{K_\alpha^h = E\}$ のトポロジーの問題に帰着する。結果は、次のとおり。

命題2. $L_{h,E}$ のトポロジーは、次の表のとおり分類される。

	$(E-h)/h^2$	$-\alpha_2$	...	α_2	...	$\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_3} + \frac{\alpha_3}{2}$
(4.4)	$0 \leq \alpha_3 \leq \alpha_2$	S^1	T^2	S^1	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\alpha_3 > \alpha_2$	S^1	T^2	$(S^1 \vee S^1) \times S^1$	$T^2 + T^2$	S^1

他のエネルギー値では、 $L_{h,E}$ は空集合。但し、記号 $\vee$ と $+$ は、それぞれ、一点合併と直和 ($[Su]$)を表す。 T^2 は2次元トーラスを表し、 $S^1 \times S^1$ と微分同相。

注意: $\alpha_3 > \alpha_2$ の場合の、 $L_{h,h+\alpha_2 h^2}$ は多様体ではないが、手順 (III) (次節) の実行に有効である。

つぎに手順(II)に移って、 $L_{h,E}$ の連結成分($\cong T^2$)のサイクルの基底を求める。 $L_{h,E} \cong T^2$ の場合を考えよう。(4.3)、(4.4)より $\pi_h(L_{h,E}) = \{K_\alpha^h = E\} \cong S^1$ である。 $J^{-1}(h)$ の $U(1)(\cong S^1)$ 束構造より、基底をなすサイクルのひとつは S^1 ファイバー、すなわち、一点 $m \in \{K_\alpha^h = E\} \subset S^2(h)$ を選びその π_h による逆像、 $\pi_h^{-1}(m)$ 、で与えられる。もうひとつのサイクルは、等エネルギー曲線、 $\{K_\alpha^h = E\}$ を $L_{h,E}$ 上に引き戻して得られる。引き戻しには、 $U(1)$ 束、 $\pi_h: J^{-1}(h) \rightarrow S^2(h)$ 、の局所断面([St])を用いる。具体的には、 $S^2(h)$ の領域、 $U = \{y \in S^2(h): y_1 \neq -h\}$ 、から $\pi_h^{-1}(U)$ への写像

$$(4.5) \quad \sigma_h(y) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{h+y_1} + \frac{y_2 - iy_3}{\sqrt{h+y_1}}, i\sqrt{h+y_1} - i\frac{y_2 - iy_3}{\sqrt{h+y_1}} \right) \in L_{h,E}$$

で与えられる。断面は $(\pi_h \circ \sigma_h)(y) = y$ を満たすことを注意しておく。こうして、サイクル、 $\sigma_h(\pi_h(T^2))$ 、が得られた。

補題3. 不変 Lagrange 部分多様体 $L_{h,E}$ の、連結成分 (T^2 と書く) のサイクルの基底 $\{c_1, c_2\}$ は、

$$(4.6) \quad \begin{aligned} c_1 &= \pi_h^{-1}(m) \quad (m \in \pi_h(T^2) \subset S^2(h)), \\ c_2 &= \sigma_h(\pi_h(T^2)) \end{aligned}$$

で与えられる。但し、 σ_h は局所断面(4.5)である。

注意: (4.6)において c_1 を決定する $m \in \pi_h(T^2)$ の選択に自由度があるが、次節の手順(III)での(4.2)の計算には影響がない。つまり計算が楽なように $m \in \pi_h(T^2)$ を選べばよい。

5. Maslov 量子化条件による固有値の評価(2) 本節では、Maslov 量子化の手順(III)(4節参照)を検討する。原理的には、補題3で得たトーラス T^2 のサイクルの基底、 c_1, c_2 に対して量子化条件(4.2)を計算すればよい。実際、われわれの場合には(4.2)左辺の積分を種数1のリーマン面上の楕円積分([WW])に帰着できるが、その積分は h, E に関し非常に複雑なので(4.2)を h, E について解くことは難しい。しかし、2節で示した固有値(行列要素による)の定性的挙動は、不変 Lagrange 部分多様体の葉層構造と深く関わることは以下のとおり説明できる。

まず、補題3で得たトーラスのサイクル基底 $\{c_1, c_2\}$ を、パラメータ α とエネルギー E の大小に応じて異なる記号を用いてあらわそう。これは、 $L_{h,E}$ のトポロジーがパラメータ α とエネルギー E の大小に応じて変化すること(命題2)による。

定義4. 補題3に従って得た、不変 Lagrange 部分多様体 $L_{h,E}$ の連結成分 ($\cong T^2$) の1次元サイクルの基底をパラメータ α とエネルギー E の大小に応じて次の記号で表す。補題3の (c_j) ($j=1, 2$)を

$$(5.1) \quad c_j = \begin{cases} \gamma_j^E & -\alpha_2 < \frac{E-h}{h^2} < \alpha_2 \\ \Gamma_j^{E(k)} & (k=+,-) \quad \alpha_3 > \alpha_2 \text{ かつ } \alpha_2 < \frac{E-h}{h^2} < \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2\alpha_3}, \\ C_j^{(k)} & (k=+,-) \quad \alpha_3 > \alpha_2 \text{ かつ } \frac{E-h}{h^2} = \alpha_2, \end{cases}$$

とあらわす。但し、 $\Gamma_j^{E(\pm)}$ 、 $C_j^{(\pm)}$ は、 $L_{h,E}$ をなす2個のラベリングされたトーラス、

$$(5.2) \quad \begin{aligned} T_{(+)}^2 &= L_{h,E} \cap \pi_h^{-1}(\{y \in S^2(h) : y_3 \geq 0\}), \\ T_{(-)}^2 &= L_{h,E} \cap \pi_h^{-1}(\{y \in S^2(h) : y_3 \leq 0\}), \end{aligned}$$

の1次元サイクルの基底である。 $L_{h,h+\alpha_2 h^2}$ は多様体ではないが、(5.2)の $T_{(\pm)}^2$ はトーラスと同相（微分同相ではない）である。

サイクル、 c_1 に対する量子化条件(4.2)は容易に計算できて、

$$(5.3) \quad \frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{c_1} \Theta_c - \frac{1}{4} \langle m_L, c_1 \rangle = \frac{h}{\hbar} - 1 \in \mathbb{Z},$$

となる。これは、1 : 1 共鳴振動子のエネルギー h が、

$$(5.4) \quad h = \hbar(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と量子化されることを意味する。Maslov 指数 $\langle m_L, c_1 \rangle$ の計算は割愛する。

サイクル c_2 に対しては(4.2)の陽な計算が困難なのは上で述べたが、以下のように評価式が得られる。そのアイデアを説明する。 c_2 はその定義(4.6)より、 $S^2(h)$ 上の S^1 曲線に射影できる。この S^1 曲線をうまく向き付けしておくことで(4.2)の評価が S^1 曲線の囲む領域の面積評価に帰着されるのである。向きづけは、つぎのとおり。

要請5. トーラスのサイクル c_2 (補題3、定義4) の向きを、 $S^2(h)$ 上の S^1 曲線 $\pi_h(c_2)$ が $S^2(h)$ の外向き法線に関し右手系の向きを持つように定める。

Differential calculus([AM]) を用いて次を得る。

補題6.

$$(5.5) \quad \oint_{c_2} \Theta_c = -\frac{1}{2h} \text{Area}(c_2)$$

但し、 $\text{Area}(c_2)$ は $S^2(h)$ 上の S^1 曲線 $\pi_h(c_2)$ が要請5の向きづけに従って囲む $S^2(h)$ の領域の面積をあらわす。

補題6 と、 $S^2(h)$ 上に誘導された摂動系の簡約系 (2節参照) の y_3 -軸対称性より、

$$(5.6) \quad \oint_{\Gamma_2^{E(+)}} \Theta_c = \oint_{\Gamma_2^{E(-)}} \Theta_c, \quad h + \alpha_2 h^2 < E < h + \alpha_2 \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2\alpha_3}$$

を得る。式(4.2)と(5.6)より、Maslov 量子化条件が、 $h + \alpha_2 h^2 < E < h + \alpha_2 \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2\alpha_3}$ を満たすエネルギー固有値 E を許容するならば、それに対応する状態は2個ある ($T_{(\pm)}^2$)。つまり、 $h + \alpha_2 h^2$ より大きいエネルギー固有値は必ず2重縮退すると結論できる。こう

して、固有値の定性的挙動が説明される。本節の結びとして、固有値縮退とパラメータ α との関係述べる。

縮退が新たに生じるパラメータ値は、サイクル $C_2^{(\pm)}$ に対し (5.5) を計算することで求められる。実際、

$$(5.7a) \quad \oint_{C_2^{(\pm)}} \Theta_c = (2\phi_0 - \pi) - \sin 2\phi_0$$

但し

$$(5.7b) \quad \sin^2 \phi_0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \quad (\phi_0 \in (0, \pi/2)).$$

である。さらに、 $\alpha_3 > \alpha_2$ の条件下で、

$$(5.8a) \quad h - \alpha_2 h^2 < E_1 < E_2 < h + \alpha_2 h^2 < E_3 < E_4 < h + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2\alpha_3}$$

を満たす任意の $E_1, \dots, E_4$ に対し $\pi_h(c_2)$ の囲む面積、 $Area(c_2)$ 、に関する不等式、

$$(5.8b) \quad Area(\gamma_2^{E_1}) < Area(\gamma_2^{E_2}) < Area(C_2^{(\pm)}) < Area(\Gamma_2^{E_3(\pm)}) < Area(\Gamma_2^{E_4(\pm)}),$$

が成立するので次の結果を得る。

定理 7. (5.4) に従って、1 : 1 共鳴振動子のエネルギーが、 $h = \hbar(n+1)$ と量子化されているとする。(5.7b) のもとで

$$(5.9) \quad \frac{1}{2\pi} \hbar \oint_{C_2^{(\pm)}} \Theta_c - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\pi \hbar} (2\phi_0 - \pi) - \sin 2\phi_0 - \frac{\pi}{4} \\ = m \quad (m = 1, 2, \dots, [n/2])$$

を α_3 について解いた解を、 $\alpha_3^{(m,n)}$ と書く。また、 $\alpha_3^{(0,n)} = 0$, $\alpha_3^{([n/2]+1,n)} = \infty$ と約束する。パラメータ α_3 が、

$$(5.10) \quad \alpha_3^{(m,n)} \leq \alpha_3 < \alpha_3^{(m+1,n)} \quad (m = 0, 1, \dots, [n/2])$$

にあるとき、摂動系は m 組の 2 重縮退したエネルギー固有値を許容する。

6. おわりに 以上、摂動系、(2.2)、のエネルギー固有値の定性的挙動を、 $\alpha_1 = 0$ の場合について Maslov 量子化の観点から説明した。Maslov 量子化条件は、固有値の挙動と、もとの古典力学系のトポロジカルな性質との結びつきとを理解しやすいスキームといえそうである。今後の課題は、ひとつは、一般係数の H_α にたいし本稿の議論を拡張することである。もうひとつは、定理 7 の情報を反映させて行列要素を修正し、固有値、固有関数を計算して固有関数の密度関数を調べることである。

REFERENCES

- [AM] R.Abraham and J.E.Marsden, "Foundations of Mechanics, 2nd ed.," Benjamin, Reading, Mass., 1978.
- [AS] Y.Aizawa and N.Saito, J.Phys.Soc.Japan **32** (1972), 1636–1640.
- [BJ] M.Bixon and J.Jortner, J.Chem.Phys. **77** (1982), 4175–4187.
- [CR] R.Cushman and D.L.Rod Physica D **6** (1982), 105–112.
- [K] M.Kummer, Commun.Math.Phys. **48** (1976), 53–79.
- [M] J.Moser, *Lectures on Hamiltonian systems*, in "Mem. A.M.S. No.81," A.M.S., Providence, R.I.
- [MSS] A.S.Mishchenko, V.E.Shatalov and B.Yu.Sternin, "Lagrangian Manifolds and the Maslov Operator," Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [S] N.Steenrod, "The Topology of Fibre Bundles," Princeton U.P., Princeton N.J., 1951.
- [Su] 日本数学会編, "数学辞典第3版," 岩波書店, 1985.
- [U] Y.Uwano, Physica D **35** (1989), 1–33.
- [WW] E.T.Whittaker and G.N.Watson, "A Course of Modern Analysis," Cambridge U.P., London, 1965.