

Brauer の "selection of p -regular classes" の応用

熊本大 理 渡辺アツミ

G を有限群, p を素数, K を G の任意の部分群に対し 2 分解体となつてゐる有限次代数数体とする. K における (p) の素イデアル因子の一つを $\mathfrak{p}$ とし, K の $\mathfrak{p}$ -整数の全体を $\mathcal{O}$ とする. また $\mathcal{O}$ の極大イデアルを $\mathfrak{p}$ で表すことにし, 剰余体 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ を F と置く.

$C_1, C_2, \dots, C_r$ を G の p -regular class の全体とし, その代表元を $x_1, x_2, \dots, x_r$ とする. 予め, p -regular class C_ν に対し, 群環 $\mathcal{O}G, FG$ における元を C_ν で表わす. また C_ν の defect group, defect とそれぞれ $D(C_\nu), d_\nu$ で表わす. $x_1, x_2, \dots, x_r$ を G の通常既約指標の全体, $BL(G)$ を G の p -block の全体とする, $BL(G) = \{B_1, B_2, \dots, B_t\}$. p -block B_τ に対し, B_τ の通常既約指標の個数を k_τ 又は $k(B_\tau)$, B_τ の modular 既約指標の個数を l_τ 又は $l(B_\tau)$ で表わす. $E_\tau, \bar{E}_\tau$ とそれぞれ $\mathcal{O}G, FG$ の B_τ に対応する中心原素中等元とする.

R. Brauer は [2] で 次の事実を announce した。

$C_1, C_2, \dots, C_k$ を 次の 1), 2) を満たすように $B_1, B_2, \dots, B_t$ に associate させることが出来る。

1) 各 p -regular class C_ν は one and only one B_τ に associate される。

2) 各 B_τ には l_τ 個の p -regular class を associate され、それらを $C_{\tau_1}, C_{\tau_2}, \dots, C_{\tau_{l_\tau}}$ ($1 \leq \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{l_\tau} \leq k$) とするとき、
 $(\chi_i(x_{\tau_\nu}))_{\substack{\chi_i \in B_\tau \\ 1 \leq \nu \leq l_\tau}}$ の p -rank は l_τ に等しい。

このことを selection of p -regular classes といい、Brauer は [4] で上の事実の証明を与えているが、さらにそのとき、 B_τ に対する Cartan matrix の単因子が p^{d_ν} ($\nu = 1, 2, \dots, l_\tau$) に等しいことを示している。上の 2) について、M. Osima は [12] において、2) は次の 2') で置きかえてよいことを示した。

2') 各 B_τ には l_τ 個の p -regular class を associate され、それらを $C_{\tau_1}, C_{\tau_2}, \dots, C_{\tau_{l_\tau}}$ ($1 \leq \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{l_\tau} \leq k$) とするとき、 $C_{\tau_\nu} E_\tau$ ($\nu = 1, 2, \dots, l_\tau$) は一次独立である。

一般の conjugacy class と block に associate させることについて、Brauer は [3] で言及し、[5] で証明をしている。このことに関して K. Iizuka [7], [8], K. Iizuka - Y. Ito [9], M. Broué [6], J. B. Olsson [11] 等で取り扱われて

いる。いづれも, M. Osima [12] の方法及びそれを一般の conjugacy class へ拡張した K. Iizuka の方法によって研究されていると言える。

ここでは selection of p -regular classes 及びその応用について述べる。

Q を G の p -部分群とし, $m(B_T, Q)$ を一つの selection of p -regular classes において B_T に associate される p -regular class のうち defect group が Q であるものの個数とする。 $m(B_T, Q)$ は selection に無関係に一意的に決まる。実際 $X(Q)$ を $\{C_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq r, D(C_\alpha) \cong Q\}$ で張られる HG の中心 $Z(HG)$ の部分空間とし,

$$V(Q) = \sum_{P \leq Q} X(P), \quad \tilde{V}(Q) = \sum_{S \not\leq Q} X(S)$$

とおくとき,

$$(1) \quad m(B_T, Q) = \dim_P (V(Q)\bar{E}_T / \tilde{V}(Q)\bar{E}_T).$$

特に $Q \triangleleft G$ のとき

$$(2) \quad m(B_T, Q) = \dim_P (X(Q)\bar{E}_T)$$

$Bl(N(Q), B_T)$ を Brauer homomorphism で B_T に associate される $N(Q)$ の p -block の全体とすると,

$$(3) \quad m(B_T, Q) = \sum_{B \in Bl(N(Q), B_T)} m(B, Q).$$

$P_1, P_2, \dots, P_s$ を G の p -部分群の共役類の代表系とする。

$$(4) \quad l_{\pi} = \sum_{j=1}^n m(B, P_j) .$$

命題 π を G の p -element とする. $J_j = \{ P_j^x \cap C(\pi) \mid P_j^x \ni \pi, x \in G \}$ とおき, J_j の maximal member の全体を $J_j^{(0)}$ で表す. B を G の p -block, B の defect group を D とする. $C_G(\pi) = C(\pi)$ の p -subgroup Q に対して次の不等式が成立する.

$$(5) \quad \sum_{\substack{j \\ J_j^{(0)} \ni Q}} m(B, P_j) \leq \sum_{b \in \text{Bl}(C(\pi), B)} m(b, Q) ,$$

$$(6) \quad \sum_{\substack{j \\ J_j^{(0)} \ni Q \\ P_j \not\subseteq Q}} m(B, P_j) \leq \sum_{\substack{b \in \text{Bl}(C(\pi), B) \\ D(b) \not\supseteq Q \\ C(\pi)}} m(b, Q) ,$$

但し $\text{Bl}(C(\pi), B)$ は $\Sigma(HG)$ から $\Sigma(HC(\pi))$ への Brauer homomorphism により B に associate される $C(\pi)$ の p -block の全体と, $D(b)$ は b の defect group を表す.

証明 $\pi \in Q$ としてよい. 従って $QC_G(Q) \subset C(\pi) \cap N_G(Q) \subset N_G(Q)$. $H = C(\pi) \cap N_G(Q)$ とおき, γ を $\Sigma(HG)$ から $\Sigma(HH)$ への Brauer homomorphism とする. E を B に対応する $\Sigma(HG)$ の原始中等元とし, $\gamma(E) = e_1 + e_2 + \dots$ と $\gamma(E)$ の $\Sigma(HH)$ における原始中等元分解とする. また e_i に対応する H の p -block を B_i とする. (5) を証明する. $V = \sum_{J_j^{(0)} \ni Q} V(P_j)$ とおく.

$$\dim_F(\mathcal{G}(V\bar{E})) = \sum_{\substack{j \\ j_j^{(0)} \ni Q}} m(B, P_j)$$

が成立することになる。また j_j 及び $j_j^{(0)}$ の定義より, $\mathcal{G}(V)$ は defect group が Q であるような H の p -regular class の class sum の H -一次結合の全体 $\tilde{X}(Q)$ に含まれることになる。従って

$$\mathcal{G}(V\bar{E}) \subset \sum_r \mathcal{G}(V) e_r \subset \sum_r \tilde{X}(Q) e_r. \quad (2) \text{ より}$$

$$\sum_{\substack{j \\ j_j^{(0)} \ni Q}} m(B, P_j) \leq \sum_r m(b_r, Q).$$

$(b_r^{C(\pi)})^G = b_r^G = B$ であることに注意し, $C(\pi)$ と $b_r^{C(\pi)}$ に (3) を適用することにより (5) が得られる。(6) を証明する。 $V' = \sum_{\substack{j \\ j_j^{(0)} \ni Q \\ P_j \subseteq D}} V(P_j)$

と置く。 $\dim_F(\mathcal{G}(V'\bar{E})) = \sum_{\substack{j \\ j_j^{(0)} \ni Q \\ P_j \subseteq D}} m(B, P_j)$ を示すことができる。

$D(b_r) = Q$ であれば, $\tilde{X}(Q) e_r = H e_r$. $V'\bar{E}$ の, したがって $\mathcal{G}(V'\bar{E})$ の各元

は nilpotent であるから $\mathcal{G}(V') e_r = \{0\}$. 故に $\mathcal{G}(V'\bar{E}) \subset \sum_r \mathcal{G}(V') e_r \subset \sum_r \tilde{X}(Q) e_r$. $D(b_r) \neq Q$ ならば, $D(b_r^{C(\pi)}) \not\subseteq Q$ であるから, $D(b_r) \neq Q$

(5) と同様に (2) (6) を得る。

以下系4まで命題の記号の下に述べる。命題から 1 に至るに次の系1が得られる。

系 1 $\pi \in Q$ のとき

$$(7) \quad m(B, Q) \cong \sum_{b \in BL(C(\pi), B)} m(b, Q).$$

さらに $Q \subseteq \frac{D}{G}$ のときは

$$(8) \quad m(B, Q) \cong \sum_{\substack{b \in BL(C(\pi), B) \\ D(b) \not\subseteq Q \\ C(\pi)}} m(b, Q).$$

注意 (7) は M. Fujii に証明されている。(8) は M. Fujii [10],

Theorem 9 - 一般化である。

系 2 n_j と $f_j^{(0)}$ は $C(\pi)$ の元を共役により作用させたときの orbit の個数とする。このとき

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n m(B, P_j) n_j \cong \sum_{b \in BL(C(\pi), B)} l(b),$$

$$(10) \quad \sum_{\substack{j \\ P_j \subseteq D \\ \frac{D}{G}}} m(B, P_j) n_j \cong \sum_{b \in BL(C(\pi), B)} (l(b) - 1).$$

証明 $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n'}$ は $C(\pi)$ の p -subgroup の共役類の代表系とする。(5) 及び (4) より

$$\sum_{k=1}^{n'} \sum_{\substack{j \\ f_j^{(0)} \supseteq Q_k}} m(B, P_j) \cong \sum_{k=1}^{n'} \sum_{b \in BL(C(\pi), B)} m(b, Q_k) = \sum_{b \in BL(C(\pi), B)} l(b).$$

左辺は $\sum_{j=1}^n m(B, P_j) n_j$ に一致する。故に (9) が得られる。

$m(b, D(b)) = 1$ と (6) 及び (4) より

$$\sum_{k=1}^{s'} \sum_{\substack{j: j^{(0)} \supset Q_k \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) \leq \sum_{k=1}^{s'} \sum_{\substack{b \in \text{Brl}(\langle \pi \rangle, B) \\ D(b) \not\subseteq Q_k \\ (\pi)}} m(b, Q_k) = \sum_{b \in \text{Brl}(\langle \pi \rangle, B)} (\ell(b) - 1).$$

左辺は $\sum_{\substack{j \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) n_j$ に一致する。故に (10) が得られる。

系3 D は abelian と仮定する。 m_j と P_j の元の $N_G(P_j)$ -共役類の個数, Δ_B と B に associate される subsection の共役類の個数とする。このとき

$$(11) \quad k(B) \geq \sum_{\substack{j \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) m_j + \Delta_B.$$

証明 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \dots$ を G の p -element の conjugacy class の代表系とする。命題における π として π_k を取ったときの $j_j, j_j^{(0)}, n_j$ をそれぞれ $j_{jk}, j_{jk}^{(0)}, n_{jk}$ と書く。系2より

$$(12) \quad \sum_k \sum_{\substack{j \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) n_{jk} \leq \sum_k \sum_{b \in \text{Brl}(\langle \pi \rangle, B)} (\ell(b) - 1) = k(B) - \Delta_B.$$

$P_j \not\subseteq D$ なる P_j に対して P_j は abelian であるから 任意の k に対して $j_{jk}^{(0)} = j_{jk} = \{P_j^x \mid P_j^x \supset \pi_k, x \in G\} = \{P_j^x \mid P_j \supset \pi_k^{x^{-1}}, x \in G\}$ とする。明らかに n_{jk} と $\{\pi_k^{x^{-1}} \mid \pi_k^{x^{-1}} \in P_j, x \in G\}$ の元の $N_G(P_j)$ -共役類の個数は一致する。従って (12) の左辺は $\sum_{\substack{j \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) m_j$ と一致する。ゆえより系3が得られる。

G_p を G の p -element の全体とする。 G_p の二元 x, y はそれらにより生成される群 $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ が G の元で共役であるとき,

同値であるとする。そのとき同値類の代表系を $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_w$ とし、命題及び系2の π として π_k を取ったとき n_j と n_{jk} で表わすことにする。

系4 B の通常既約指標の p -conjugate character の family の個数を f_B とする。このとき

$$(13) \quad f_B \geq \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^w n_{jk} m(B, P_j).$$

特に p^e と D の exponent, p^{e_j} と P_j の exponent とおけば

$$(14) \quad f_B \geq l(B) + \sum_{j=1}^A e_j m(B, P_j) \geq l(B) + e.$$

証明 (7) より 各 k ($k = 1, 2, \dots, w$) に対して

$$\sum_{j=1}^A m(B, P_j) n_{jk} \leq \sum_{\theta \in \text{Bl}(C(\pi_k), B)} l(\theta).$$

一般分解定数の行列に permutation lemma ([1, §6]) を適用することにより、 π_k の取り方から、少なくとも $\sum_{k=1}^w \sum_{\theta \in \text{Bl}(C(\pi_k), B)} l(\theta)$ 個の p -conjugate character の family がある。故に (13) が得られる。

明らかに $\sum_{k=1}^w n_{jk} \geq e_j + 1$ である。故に (4) 及び (13) より

$$f_B \geq \sum_{j=1}^A (e_j + 1) m(B, P_j) = l(B) + \sum_{j=1}^A e_j m(B, P_j).$$

$m(B, D) = 1$ であるから (14) が得られる。

注意 (14) は R. Brauer [1, Theorem 8] の一般化である。

文 献

- [1] R. Brauer: On the connection between the ordinary and modular characters of groups of finite order, *Ann. of Math.*, 42(1941), 926-935.
- [2] ———: On the arithmetic in^a group ring, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 30(1944), 109-114.
- [3] ———: On blocks of characters of groups of finite order, I, *Proc. Nat. Acad.*, 32(1946), 182-186.
- [4] ———: Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, *Math. Zeit.*, 63(1956), 406-444.
- [5] ———: Defect groups in the theory of representations of finite groups, *Illinois J. Math.*, 13(1968), 53-73.
- [6] M. Broué: Brauer coefficients of p-subgroups associated with a p-block of a finite group, *J. of Alg.*, 56(1979), 365- 383.
- [7] K. Iizuka: Note on blocks of group characters, *Kumamoto J. of Sci. Ser. A*, 2(1956), 309-321.
- [8] ———: A note on blocks of characters of a finite group, *J. of Alg.*, 20(1972), 196-201.
- [9] K. Iizuka - Y. Ito: A note on blocks and defect groups of a finite group, *Kumamoto J. Sci.(Math.)*, 9(1972), 25-32.
- [10] M. Fujii: On determinants of Cartan matrices of p-blocks, *Proc. Japan Acad.*, 56(1980), 401-404.
- [11] J. B. Olsson: Lower defect groups, *Com. in Alg.*, 8(3)(1980), 261- 288.
- [12] M. Osima: Notes on blocks of group characters, *Math. J. Okayama Univ.*, 4(1955), 175-188.