

Relationship algebra of (partially) balanced block designs with two unequal block sizes

大阪市大 商. 石井 吾郎

v 個の処理の間に m クラスのアソシエーションが定義されてリ
とする。アソシエーション行列を $A_0, A_1, \dots, A_m$ とし $A_i, i=0, \dots, m$
によって生成される実係数上の多元環を $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ とする。

$\mathcal{A}$ を持つ P.B.I.B.D. を 2 つ考え、そのパラメーターを

$$(v, k_1, b_1, r_1, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{1m}) \quad n_1 = k_1 b_1 = v r_1$$

$$(v, k_2, b_2, r_2, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{2m}) \quad n_2 = k_2 b_2 = v r_2, \quad k_1 \neq k_2$$

とする。各計画の生起行列を $N_1 = (n_{jk}^1), N_2 = (n_{jk}^2)$ とし

$$N = (N_1, N_2)$$

とする。 N を生起行列とするブロック計画を考え、それに対する観測ベクトルを X とする。

Φ を処理の生起行列とし、

Ψ をブロックの生起行列とする

$$\mathcal{R} = \{I_m, E_{m,m}, B = \Psi\Psi', T_i = \Phi A_i \Phi', i=1, \dots, m\}$$

をこの計画の relationship algebra と呼ぶ。但し $n = n_1 + n_2$

$E_{a,b}$ は $a \times b$ 行列で要素が全部 1 のもの。

母数模型、変量模型、混合模型を考え $\mathcal{R}$ を用いてそれらに対する統計解析の話をする。記号、定義等一々しないのでそれらは Ogawa-Ishii [1], Ishii-Ogawa [2] と同じ。詳しいことは

石井[3]に書いたのと同じ結果を導く。

最も簡単な場合として $\alpha = \{ A_0 = I_v, A_1 = E_{vv} - I_v \}$ のとき (balanced case) もあつた。Rの構造も明にするために次の形を ~~与え~~ 定義する。

$$I_{b_1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{b_1}, \quad I_{b_2} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}_{b_2}$$

$$B_1 = \Phi I_{b_1} \Phi', \quad B_2 = \Phi I_{b_2} \Phi'$$

$$B_1^* = \frac{1}{k_1} B_1, \quad B_2^* = \frac{1}{k_2} B_2$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} E_{m_1 m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m_1}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2 m_2} \end{bmatrix}, \quad G_1^* = \frac{1}{n_1} G_1$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & E_{m_1 m_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_{m_2 m_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad G_2^* = \frac{1}{n_2} G_2$$

$$T^* = \frac{1}{r} \Phi (I_v - \frac{1}{v} E_{vv}) \Phi', \quad r = r_1 + r_2$$

$$\nu_1 = (r_1 - \lambda_1)/rk_1, \quad \nu_2 = (r_2 - \lambda_2)/rk_2$$

$[\dots]$ で $\dots$ で生成される実係数上の多元環

で $\dots$ が基になっていることも示す。

以上の結果を用いて次の定理を得る。

定理 $b_1 > \nu$, $b_2 > \nu$ のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{ I_n, G_1, B_1, T_1 \} \\ &= [I_n, G_1^*, G_2^*, G_3, G_4, B_1^*, B_2^*, T^*, B_1^* T^*, \\ &\quad T^* B_1^*, B_1^* T^* B_1^*, B_2^* T^*, T^* B_2^*, B_2^* T^* B_2^*, B_1^* T^* B_2^*, \\ &\quad B_2^* T^* B_1^*] \end{aligned}$$

であって、その両側イデアル分解は

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \mathcal{R}_3 \oplus \mathcal{R}_4 \oplus \mathcal{R}_5$$

で与えられる。但し

$$\mathcal{R}_1 = [G_1^*, G_2^*, G_3, G_4]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= [T^*, B_1^* T^*, T^* B_1^*, B_1^* T^* B_1^*, B_2^* T^*, T^* B_2^*, B_2^* T^* B_2^*, \\ &\quad B_1^* T^* B_2^*, B_2^* T^* B_1^*] \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_3 = [B_1^* - G_1^* - \frac{1}{\nu_1} B_1^* T^* B_1^*]$$

$$\mathcal{R}_4 = [B_2^* - G_2^* - \frac{1}{\nu_2} B_2^* T^* B_2^*]$$

$$\mathcal{R}_5 = [I - \frac{1}{1-\nu_1-\nu_2} (I - B_1^* - B_2^*) T^* (I - B_1^* - B_2^*) - B_1^* - B_2^*] .$$

$$b_1 = \nu \text{ のときは } B_1^* - G_1^* - \frac{1}{\nu_1} B_1^* T^* B_1^* = 0 \text{ して } \mathcal{R}_3 = 0 ,$$

$$b_2 = \nu \text{ のときは } B_2^* - G_2^* - \frac{1}{\nu_2} B_2^* T^* B_2^* = 0 \text{ して } \mathcal{R}_4 = 0 .$$

各 $\mathcal{R}_i$ の principal idempotent e_i , $i=1, \dots, 5$

は次式で与えられる。

$$e_1 = G_1^* + G_2^* ,$$

$$e_2 = \frac{1}{1-\nu_1-\nu_2} (I - B_1^* - B_2^*) T^* (I - B_1^* - B_2^*) + \frac{1}{\nu_1} B_1^* T^* B_1^* + \frac{1}{\nu_2} B_2^* T^* B_2^* ,$$

$$e_3 = B_1^* - G_1^* - \frac{1}{D_1} B_1^* T^* B_1^*$$

$$e_4 = B_2^* - G_2^* - \frac{1}{D_2} B_2^* T^* B_2^*$$

$$e_5 = I - \frac{1}{1-\nu_1-\nu_2} (I - B_1^* - B_2^*) T^* (I - B_1^* - B_2^*) - B_1^* - B_2^*$$

$$\text{rank } e_1 = 2$$

$$\text{rank } e_2 = 3(v-1)$$

$$\text{rank } e_3 = b_1 - v$$

$$\text{rank } e_4 = b_2 - v$$

$$\text{rank } e_5 = n - b_1 - b_2 - v + 1$$

R は 次の行列形式と同型である

$$\begin{bmatrix} * & * & & & \\ * & * & & & \\ & * & * & * & \\ & * & * & * & R_2 \\ & * & * & * & \\ & & & * & R_3 \\ & & & & * & R_4 \\ & & & & & R_5 & * \end{bmatrix}$$

母数模型のときの分散分析を得るためには

$$e_{11} = G_1^* \quad \text{rank } e_{11} = 1$$

$$e_{12} = G_2^* \quad \text{rank } e_{12} = 1$$

$$e_{21} = \frac{1}{D_1} B_1^* T^* B_1^* \quad \text{rank } e_{21} = v-1$$

$$e_{22} = \frac{1}{D_2} B_2^* T^* B_2^* \quad \text{rank } e_{22} = v-1$$

$$e_{23} = \frac{1}{(1-\nu_1-\nu_2)} (I - B_1^* - B_2^*) T^* (I - B_1^* - B_2^*) \quad , \text{rank } e_{23} = v-1$$

と分けておいて

$$I = e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22} + e_{23} + e_{31} + e_{41} + e_{51}$$

より

$$X'X = X'e_{11}X + X'e_{12}X + X'e_{21}X + X'e_{22}X + X'e_{23}X + X'e_{31}X + X'e_{41}X + X'e_{51}X$$

を得る。これを intra-block analysis of variances とする。

変量模型で且つ正規分布を仮定するときの最小十分統計量を求めると

$$X'G_1^*, X'G_2^*, X'e_{11}X, X'e_{22}X, X'e_{33}X, X'T^*X, \\ X'(T^*B_1 + B_1T^*)X, X'(T^*B_2 + B_2T^*)X, \\ X'e_{31}X, X'e_{41}X, X'e_{51}X$$

が与えられる。

混合模型で同様の事を行って得る $\Gamma = E_{m_1}$ として

$$X'B_1^*X, X'B_2^*X, X'(I - B_1^* - B_2^*)X$$

$$\Gamma'B_1^*X, \Phi'B_1^*X, \Gamma'B_2^*X, \Phi'B_2^*X$$

$$\Gamma'(I - B_1^* - B_2^*)X, \Phi'(I - B_1^* - B_2^*)X$$

が与えられる。

引用

Ogawa-Ishii Ann. Math. Stat. vol 36 1965

Ishii-Ogawa Osaka City Univ. Business Review ^{mn 82} 1965

石井 吾郎 大阪統計諮議会報告 Vol 10, 1966