

2 階直観主義命題論理の Kripke モデルと束論的モデルの双対性¹

藤田憲悦 (Ken-etsu Fujita)² 倉田俊彦 (Toshihiko Kurata)³

概要

2 階直観主義命題論理の体系 NJ_2 との間で完全性定理が成り立つモデル概念として Sobolev による Kripke モデルが知られている。この結果に対して、位相空間を用いた一般的な視点から新たに Kripke モデルの定義を与える。更に、その中で特に sober な位相空間に基づくモデルには、Stone 双対性を經由して束論的モデルを対応させることが可能となり、両モデルにおける解釈が一致することを示すことが出来る。

1. SOBOLEV による KRIPKE モデルとその一般化

Sobolev による NJ_2 のモデル概念 [3, 4] は順序集合の上に定義される。実際に、順序集合 $\langle C, \leq \rangle$ に対して、 $C^+ = \{U \in \mathcal{P}C \mid c \in U \ \& \ c \leq d \implies d \in U\}$ と記述することにして、

$$(1) \quad c \leq d \quad \text{ならば} \quad D_c \subseteq D_d$$

の条件を満たすように、各 $c \in C$ に対応する domain $D_c \subseteq C^+$ を与え、これらの組 $\langle C, \leq, \{D_c \mid c \in C\} \rangle$ として Kripke モデルの構造が導入される。そして、一般に、各命題変数に C^+ の要素を対応させる写像を環境として、 Prop_2 を NJ_2 の命題の集合としたとき、 $A \in \text{Prop}_2, c \in C$, 環境 ξ に対して、関係 $c, \xi \Vdash A$ を以下の条件によって再帰的に定義する。

- (1) $c, \xi \Vdash \perp$ が成り立つことはない。
- (2) $c, \xi \Vdash p \iff c \in \xi(p)$.
- (3) $c, \xi \Vdash A \wedge B \iff c, \xi \Vdash A$ かつ $c, \xi \Vdash B$.
- (4) $c, \xi \Vdash A \vee B \iff c, \xi \Vdash A$ または $c, \xi \Vdash B$.
- (5) $c, \xi \Vdash A \rightarrow B \iff \forall d \in \uparrow c \ (d, \xi \Vdash A \text{ ならば } d, \xi \Vdash B)$.
- (6) $c, \xi \Vdash \forall p. A \iff \forall d \in \uparrow c \ \forall U \in D_d \ d, \xi(p:U) \Vdash A$.
- (7) $c, \xi \Vdash \exists p. A \iff \exists U \in D_c \ c, \xi(p:U) \Vdash A$.

また、 $\Gamma \subseteq \text{Prop}_2$ として、任意の $A \in \Gamma$ に対して $c, \xi \Vdash A$ が成り立つことを $c, \xi \Vdash \Gamma$ と略記する。 $\Gamma \subseteq \text{Prop}_2, c \in C$, 環境 ξ に対して、 $\xi(\text{FV}(\Gamma)) \subseteq D_c$ が成り立つ時、 ξ は Γ と c に関して admissible であると呼ぶ。そして、Kripke モデル $\mathcal{S} = \langle C, \leq, \{D_a \mid a \in X\} \rangle$ と $c \in C$, 環境 ξ に対して、 ξ が Γ, A と c に関して admissible ならば

$$c, \xi \Vdash \Gamma \implies c, \xi \Vdash A$$

¹This research was supported in part by Grant-in-Aid for Young Scientists (B)(19700012).

²群馬大学大学院工学研究科 群馬県桐生市天神町 1-5-1 e-mail:fujita@cs.gunma-u.ac.jp

³法政大学経営学部 東京都千代田区富士見 2-17-1 e-mail:kurata@hosei.ac.jp

が成り立つとき $\Gamma \vdash A$ は $\mathcal{J}$ で valid であると呼ぶ.

このような Kripke モデルの中で, 特別な構造に注目すると完全性が成り立つことが知られている. 実際, Kripke モデル $\mathcal{J} = \langle C, \leq, \{D_c \mid c \in C\} \rangle$ と $A \in \text{Prop}_2$, $c \in C$, 環境 ξ に対して, ξ が A と c に関して admissible な時は

$$\exists U \in D_c \ \forall d \in \uparrow c \ (d \in U \iff d, \xi \Vdash A)$$

が成り立っている時に $\mathcal{J}$ は full であると呼び, この full Kripke モデルの構造に対して, 以下の定理が成り立つ.

定理 1. 任意の $A \in \text{Prop}_2$ に対して, A が NJ_2 で証明可能であることと, A が全ての full Kripke モデルで valid となることは同値である.

以下では, こうした既知の Kripke モデルの一般化を試み, 一般化されたモデル概念に対しても NJ_2 の完全性が保証されていることを確認したい.

位相空間 $\langle X, \mathcal{O}X \rangle$ に対して $a \in X$ の開近傍の集合 $\{U \in \mathcal{O}X \mid a \in U\}$ を $\mathcal{F}_a$ と記述する. そして,

$$(2) \quad \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ D_a \subseteq D_b$$

の条件を満たすように, 各 $a \in X$ に対応する domain $D_a \subseteq \mathcal{O}X$ を与え, これらの組として一般化された Kripke モデル $\mathcal{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\} \rangle$ を定義する. なお, 今後は, 条件 (2) を満たす a の近傍 U を代表して, その一つを P_a と明示することとする. 位相空間 $\langle C, C^+ \rangle$ の下で条件 (1) と条件 (2) は同値となり, ここで導入した構造は Sobolev の Kripke モデルの一般化となっている. そして, Sobolev の Kripke モデルにおける解釈の定義から類推して, 一般化された Kripke モデル $\mathcal{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\} \rangle$ と $A \in \text{Prop}_2$, $a \in X$, 環境 ξ に対して関係 $a, \xi \Vdash A$ を以下の条件によって再帰的に定義する.

- (1) $a, \xi \Vdash \perp$ が成り立つことはない.
- (2) $a, \xi \Vdash p \iff a \in \xi(p)$.
- (3) $a, \xi \Vdash A \wedge B \iff a, \xi \Vdash A$ かつ $a, \xi \Vdash B$.
- (4) $a, \xi \Vdash A \vee B \iff a, \xi \Vdash A$ または $a, \xi \Vdash B$.
- (5) $a, \xi \Vdash A \rightarrow B \iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ (b, \xi \Vdash A \text{ ならば } b, \xi \Vdash B)$.
- (6) $a, \xi \Vdash \forall p. A \iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ \forall V \in D_b \ b, \xi(p:V) \Vdash A$.
- (7) $a, \xi \Vdash \exists p. A \iff \exists V \in D_a \ a, \xi(p:V) \Vdash A$.

この関係に基づいて, 任意の $A \in \text{Prop}_2$ に対して $[A]_\xi = \{a \in X \mid a, \xi \Vdash A\}$ とし, 任意の $\Gamma \subseteq \text{Prop}_2$ に対して $[\Gamma]_\xi = \bigcap_{A \in \Gamma} [A]_\xi$ のように X の部分集合を定義する. また, $\Gamma \subseteq \text{Prop}_2$ と $a \in X$ に対して admissible な環境の集合, つまり $\xi(\text{FV}(\Gamma)) \subseteq D_a$ である環境の集合を $\text{Env}(A; a)$ と表記することにする.

- 補題 2.** (1) 任意の $A \in \text{Prop}_2$ と環境 ξ に対して $\{a \in X \mid \xi \in \text{Env}(A; a)\} \in \mathcal{O}X$ である。
 (2) $a \in X$ に対して $a, \xi \Vdash A$ が成り立っているとする。このとき、任意の $b \in U$ に対して $b, \xi \Vdash A$ となる $U \in \mathcal{F}_a$ が存在する。
 (3) 任意の $A \in \text{Prop}_2$ と環境 ξ に対して $\llbracket A \rrbracket_\xi \in \mathcal{O}X$ である。

Proof. (1) $\xi \in \text{Env}(A; a)$ のとき、任意の $b \in P_a$ に対して $\xi(\text{FV}(A)) \subseteq D_a \subseteq D_b$ であるから $\xi \in \text{Env}(A; b)$ が成り立っている。従って、

$$\{a \in X \mid \xi \in \text{Env}(A; a)\} = \bigcup \{P_a \in \mathcal{O}X \mid \xi \in \text{Env}(A; a)\}$$

が得られる。

(2) A の構成に関する帰納法による。

Case 1. $A \equiv \perp$ の場合。補題の主張は自明である。

Case 2. $A \equiv p$ の場合。 $a, \xi \Vdash p$ とすると、 $\xi(p) \in \mathcal{F}_a$ であり、任意の $b \in \xi(p)$ に対して、 $b, \xi \Vdash p$ が成り立っている。

Case 3. $A \equiv B \wedge C$ の場合。 $a, \xi \Vdash B \wedge C$ とする。このとき、 $a, \xi \Vdash B$ かつ $a, \xi \Vdash C$ であり、 $a, \xi \Vdash B$ に帰納法の仮定を適用すると、任意の $b \in U$ に対してかつ $b, \xi \Vdash B$ となる $U \in \mathcal{F}_a$ が得られる。また、同様に、任意の $c \in V$ に対して $c, \xi \Vdash C$ となる $V \in \mathcal{F}_a$ が得られる。このとき、 $U \cap V \in \mathcal{F}_a$ は明らかに補題の条件を満たしている。

Case 4. $A \equiv B \vee C$ の場合。 $a, \xi \Vdash B \vee C$ とする。このとき、 $a, \xi \Vdash B$ または $a, \xi \Vdash C$ であり、 $a, \xi \Vdash B$ が成り立つときは、帰納法の仮定から、任意の $b \in U$ に対して $b, \xi \Vdash B$ となる $U \in \mathcal{F}_a$ が得られ、この U が補題の条件を満たしている。また、 $a, \xi \Vdash C$ が成り立つときは、帰納法の仮定から、任意の $c \in V$ に対して $c, \xi \Vdash C$ となる $V \in \mathcal{F}_a$ が得られ、この V が補題の条件を満たしている。

Case 5. $A \equiv B \rightarrow C$ の場合。 $a, \xi \Vdash B \rightarrow C$ とする。すると、

$$\forall b \in U \ (b, \xi \Vdash B \text{ ならば } b, \xi \Vdash C)$$

となる $U \in \mathcal{F}_a$ が存在する。この U を考えると、任意の $b \in U$ に対して、 $b, \xi \Vdash B \rightarrow C$ であることは明らかである。

Case 6. $A \equiv \forall p. B$ の場合。 $a, \xi \Vdash \forall p. B$ とする。すると、

$$\forall b \in U \ \forall V \in D_b \ b, \xi(p : V) \Vdash B$$

となる $U \in \mathcal{F}_a$ が存在する。この U を考えると、任意の $b \in U$ に対して、 $b, \xi \Vdash \forall p. B$ であることは明らかである。

Case 7. $A \equiv \exists p. B$ の場合。 $a, \xi \Vdash \exists p. B$ とする。すると、定義から $a, \xi(p : U) \Vdash B$ となる $U \in D_a$ が存在する。ここで、帰納法の仮定を適用すると、任意の $b \in V$ に対して $b, \xi(p : U) \Vdash B$ となる $V \in \mathcal{F}_a$ が存在することが分かる。そこで、 $V \cap P_a \in \mathcal{F}_a$ を考えると、

任意の $b \in V \cap P_a$ に対して, $U \in D_a \subseteq D_b$ かつ $b, \xi(p:U) \Vdash B$ となるので, $b, \xi \Vdash \exists p.B$ であることが保証されている.

(3) 上の結果から, $[A]_\xi = \bigcup \{U \in \mathcal{O}X \mid U \subseteq [A]_\xi\}$ となることは明らかである. $\square$

系 3. 一般化された Kripke モデルにおいて, $a, \xi \Vdash \exists p.A$ であることと

$$\exists U \in \mathcal{F}_a \forall b \in U \exists V \in D_b \quad b, \xi(p:V) \Vdash A$$

であることは同値である.

Proof. $a, \xi \Vdash \exists p.A$ とする. すると, 定義から $a, \xi(p:U) \Vdash B$ となる $U \in D_a$ が存在する. ここで, 補題 2 (2) を適用すると, 任意の $b \in V$ に対して $b, \xi(p:U) \Vdash B$ となる $V \in \mathcal{F}_a$ が存在することが分かる. そこで, $V \cap P_a \in \mathcal{F}_a$ を考えると, 任意の $b \in V \cap P_a$ に対して, $U \in D_a \subseteq D_b$ かつ $b, \xi(p:U) \Vdash B$ となる. $\square$

Sobolev の Kripke モデルにおける議論と同様に, 一般化された Kripke モデル $\mathcal{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\} \rangle$ に対して,

$$\begin{aligned} \forall A \in \text{Prop}_2 \quad \forall a \in X \quad \forall \xi \in \text{Env}(A; a) \\ \exists U \in D_a \quad \exists V \in \mathcal{F}_a \quad U \cap V = [A]_\xi \cap V \end{aligned}$$

が成り立っている時に $\mathcal{K}$ は full であるという. 上の条件において, a の近傍で $[A]_\xi$ と一致する D_a の元 U を代表して, その一つを $[A]_\xi^a$ と表記することにする. 特に, $a \in [A]_\xi^a$ と $a \in [A]_\xi$ は同値となる. また, 任意の $a \in X$ と $\xi \in \text{Env}(\Gamma, A; a)$ に対して

$$a, \xi \Vdash \Gamma \implies a, \xi \Vdash A$$

が成り立つとき $\Gamma \vdash A$ は $\mathcal{K}$ で valid であるという.

補題 4. 任意の $A, B \in \text{Prop}_2, a \in X, \xi \in \text{Env}(A[p := B]; a)$ に対して, $a, \xi(p: [B]_\xi^a) \Vdash A$ であることと $a, \xi \Vdash A[p := B]$ であることは同値である.

Proof. A の構成に関する帰納法による. 特に $A \equiv p$ の場合は, $a \in [B]_\xi^a$ と $a \in [B]_\xi$ の同値性から明らか. $\square$

定理 5. 任意の $A \in \text{Prop}_2$ に対して, A が NJ_2 で証明可能であることと, A が全ての一般化された full Kripke モデルで valid となることは同値である.

Proof. 健全性については導出の長さに関する帰納法による.

Case 1. $(\rightarrow I)$ により, $\Gamma, A \vdash B$ から $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ が導出されている時, $a \in X$ と $\xi \in \text{Env}(\Gamma, A \rightarrow B; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする. この時, $\Gamma, A \vdash B$ と同じ長さで $\Delta, A \vdash B$ が導出できるような $\Delta \subseteq_{\text{fin}} \Gamma$ が存在していて, この Δ に対して

$$[\Delta]_\xi \cap \{a \mid \xi \in \text{Env}(\Delta, A \rightarrow B; a)\} \in \mathcal{F}_a$$

であり, 任意の $b \in [\Delta]_\xi \cap \{a \mid \xi \in \text{Env}(\Delta, A \rightarrow B; a)\}$ に対して, $\xi \in \text{Env}(\Delta, A, B; b)$ であることは明らかである. 従って, $b, \xi \Vdash A$ とすると, $b, \xi \Vdash \Delta, A$ となり, 帰納法の仮定より $b, \xi \Vdash B$ が得られる. 以上から $a, \xi \Vdash A \rightarrow B$ であることが示された.

Case 2. ($\rightarrow E$) により, $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ と $\Gamma \vdash A$ から $\Gamma \vdash B$ が導出されている時. $a \in X$ と $\xi \in \text{Env}(\Gamma, B; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする. この時, $p \in \text{FV}(\Gamma, B)$ に対して $\xi'(p) = \xi(p)$ であり $p \in \text{FV}(A) \setminus \text{FV}(\Gamma, B)$ に対して $\xi'(p) \in D_a$ を満たす環境 ξ' を考えると, $\xi' \in \text{Env}(\Gamma, A \rightarrow B; a)$ かつ $a, \xi' \Vdash \Gamma$ となる. 従って, 帰納法の仮定から $a, \xi' \Vdash A \rightarrow B$ と $a, \xi' \Vdash A$ が得られ, これらから $a, \xi' \Vdash B$, つまり $a, \xi \Vdash B$ であることが保証される.

Case 3. ($\forall I$) により, $\Gamma \vdash A$ から $\Gamma \vdash \forall p. A$ が導出されている時. $a \in X$ と $\xi \in \text{Env}(\Gamma, \forall p. A; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする. この時, $\Gamma \vdash A$ と同じ長さで $\Delta \vdash A$ が導出できるような $\Delta \subseteq_{\text{fin}} \Gamma$ が存在していて, この Δ に対して

$$[\Delta]_\xi \cap \{a \mid \xi \in \text{Env}(\Delta, \forall p. A; a)\} \in \mathcal{F}_a$$

であり, 任意の $b \in [\Delta]_\xi \cap \{a \mid \xi \in \text{Env}(\Delta, \forall p. A; a)\}$ と $V \in D_b$ に対して $\xi(p : V) \in \text{Env}(\Delta, A; b)$ が成り立つ. また, Δ 中に p が自由に出ていないことから $b, \xi(p : V) \Vdash \Delta$ となり, 帰納法の仮定から $b, \xi(p : V) \Vdash A$ が保証される. 以上から, $a, \xi \Vdash \forall p. A$ であることが示された.

Case 4. ($\forall E$) により, $\Gamma \vdash \forall p. A$ から $\Gamma \vdash A[p := B]$ が導出されている時. $a \in X$ と $\xi \in \text{Env}(\Gamma, A[p := B]; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする. すると, 帰納法の仮定から $a, \xi \Vdash \forall p. A$ が得られる. また, $\mathcal{X}$ の fullness から $[B]_\xi^a \in D_a$ が保証されているので, $a, \xi(p : [B]_\xi^a) \Vdash A$ が得られる. 従って, 補題 4 より $a, \xi \Vdash A[p := B]$ となることが分かる.

Case 5. ($\exists I$) により, $\Gamma \vdash A[p := B]$ から $\Gamma \vdash \exists p. A$ が導出されている時. $a \in X$ と $\xi \in \text{Env}(\Gamma, \exists p. A; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする. この時, $p \in \text{FV}(\Gamma, \exists p. A)$ に対して $\xi'(p) = \xi(p)$ であり $p \in \text{FV}(B) \setminus \text{FV}(\Gamma, \exists p. A)$ に対して $\xi'(p) \in D_a$ を満たす環境 ξ' を考えると, $\xi' \in \text{Env}(\Gamma, A[p := B]; a)$ かつ $a, \xi' \Vdash \Gamma$ となる. 従って, 帰納法の仮定から $a, \xi' \Vdash A[p := B]$ が得られ, $\mathcal{X}$ の fullness と補題 4 から $[B]_\xi^a \in D_a$ に対して $a, \xi'(p : [B]_\xi^a) \Vdash A$ が成り立つことが分かる. 以上から, $a, \xi' \Vdash \exists p. A$, つまり $a, \xi \Vdash \exists p. A$ であることが保証される.

Case 6. ($\exists E$) により, $\Gamma \vdash \exists p. A$ と $\Gamma, A \vdash B$ から $\Gamma \vdash B$ が導出されている時. $a \in X$ と $\xi \in \text{Env}(\Gamma, B; a)$ に対して $a, \xi \Vdash \Gamma$ が成り立っているとする. この時, $p \in \text{FV}(\Gamma, B)$ に対して $\xi'(p) = \xi(p)$ であり $p \in \text{FV}(\exists p. A) \setminus \text{FV}(\Gamma, B)$ に対して $\xi'(p) \in D_a$ を満たす環境 ξ' を考えると, $\xi' \in \text{Env}(\Gamma, \exists p. A; a)$ かつ $a, \xi' \Vdash \Gamma$ となる. 従って, 帰納法の仮定からある $U \in D_a$ に対して $a, \xi'(p : U) \Vdash A$ が得られる. 更に, $\xi'(p : U) \in \text{Env}(\Gamma, A, B; a)$ であり, $a, \xi'(p : U) \Vdash \Gamma, A$ でもあるから, 帰納法の仮定により $a, \xi'(p : U) \Vdash B$ が得られ, $a, \xi \Vdash B$ であることが保証される.

その他のケースは何れも容易に確認できるので証明は省略する。

完全性について、 $\Gamma \vdash A$ が一般化された full Kripke モデルにおいて valid であるならば、Sobolev による full Kripke モデルにおいても valid である。従って、Sobolev の完全性定理より $\Gamma \vdash A$ は NJ_2 で証明可能となる。 $\square$

2. SOBER KRIPKE モデルと SPATIAL LATTICE モデル

前節で導入された一般化された Kripke モデルの概念に対して、Stone 双対性 [1, 2] に基づいて自然に対応が付けられる順序構造 $\langle L, \sqsubseteq \rangle$ として新たに 2 階直観主義命題論理の束論的モデルの概念を導入したい。

完備 Heyting 代数 $\langle L, \sqsubseteq \rangle$ に対して、 L 上の completely-prime filter の集合を $\text{pt } L$ と記述する。また、任意の $u \in L$ に対して u を含む completely-prime filter の集合 $\{F \in \text{pt } L \mid u \in F\}$ を $\mathcal{O}_u$ と記述することにする。そして、

$$(3) \quad \exists u \in F \ \forall G \in \mathcal{O}_u \ D_F \subseteq D_G$$

の条件を満たすように、各 $F \in \text{pt } L$ に対応する domain $D_F \subseteq L$ を与え、これらの組として束論的モデル $\mathcal{L} = \langle L, \sqsubseteq, \{D_F \in \text{pt } L \mid F \in \text{pt } L\} \rangle$ を定義する。このモデル $\mathcal{L}$ において、各命題変数に L の要素に対応させる写像を環境と呼び、環境 ξ の下での命題 A の解釈 $\llbracket A \rrbracket_\xi \in L$ を以下のように再帰的に定義する。

- (1) $\llbracket \perp \rrbracket_\xi = \sqcup \emptyset$.
- (2) $\llbracket p \rrbracket_\xi = \xi(p)$.
- (3) $\llbracket A \wedge B \rrbracket_\xi = \llbracket A \rrbracket_\xi \sqcap \llbracket B \rrbracket_\xi$.
- (4) $\llbracket A \vee B \rrbracket_\xi = \llbracket A \rrbracket_\xi \sqcup \llbracket B \rrbracket_\xi$.
- (5) $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket_\xi = \sqcup \{u \in L \mid \llbracket A \rrbracket_\xi \sqcap u \sqsubseteq \llbracket B \rrbracket_\xi\}$.
- (6) $\llbracket \forall p. A \rrbracket_\xi = \sqcup \{u \in L \mid \forall F \in \mathcal{O}_u \ \forall v \in D_F \ \llbracket A \rrbracket_{\xi(p:v)} \in F\}$.
- (7) $\llbracket \exists p. A \rrbracket_\xi = \sqcup \{u \in L \mid \forall F \in \mathcal{O}_u \ \exists v \in D_F \ \llbracket A \rrbracket_{\xi(p:v)} \in F\}$.

前節で導入された Kripke モデル $\mathcal{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\} \rangle$ の中で、特に $\langle X, \mathcal{O}X \rangle$ が sober な位相空間（つまり、 T_0 分離公理を満たしていて、更に、任意の $\sqcup$ -irreducible 閉集合⁴ C に対して、常に $C = \{a\}^c$ を満たす $a \in X$ が存在しているような位相空間）となっている特別な構造に注目すると、その位相が作る順序集合は特に spatial lattice⁵（つまり、任意の元がそれ以上の $\sqcap$ -prime 元⁶ からなる集合の下限と一致する完備束）に基づく束論的モデルとの間で強い対応を持つこととなる。

⁴閉集合の有限集合 $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ に対して $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$ の時には、常に $C = C_i$ となる $i \in \{1, \dots, m\}$ が存在する時に、閉集合 C を $\sqcup$ -irreducible と呼ぶ。

⁵spatial lattice は完備 Heyting 代数であることが証明できる。

⁶ L の有限集合 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ に対して $u \sqsupseteq u_1 \sqcap u_2 \sqcap \dots \sqcap u_m$ の時には、常に $u \sqsupseteq u_i$ となる $i \in \{1, \dots, m\}$ が存在する時に、 $u \in L$ を $\sqcap$ -prime と呼ぶ。

実際に, sober 位相空間の下では $\text{pt } \mathcal{O}X = \{\mathcal{F}_a \mid a \in X\}$ であることが保証されている. そこで, このような Kripke モデル $\mathcal{K}$ に基づいて, 任意の $a \in X$ に対して $D_{\mathcal{F}_a} = D_a$ と定義することによって $\Omega\mathcal{K} = \langle \mathcal{O}X, \subseteq, \{D_{\mathcal{F}_a} \mid a \in X\} \rangle$ のように spatial lattice に基づく束論的モデル $\Omega\mathcal{K}$ を考えることが出来る. この時, $\Omega\mathcal{K}$ における条件 (3) は

$$\exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall \mathcal{F}_b \in \mathcal{O}_U \quad D_{\mathcal{F}_a} \subseteq D_{\mathcal{F}_b}$$

となり, これは条件 (2) の言い換えに他ならない.

定理 6. $\mathcal{K} = \langle X, \mathcal{O}X, \{D_a \mid a \in X\} \rangle$ を sober な Kripke モデルとして $a \in X$, ξ を $\mathcal{K}$ に関する環境とする. このとき, $\mathcal{K}$ において $a, \xi \Vdash A$ であることと, spatial lattice $\Omega\mathcal{K}$ において $a \in \llbracket A \rrbracket_\xi$ であることは同値である. (つまり $\llbracket A \rrbracket_\xi = \llbracket A \rrbracket_\xi$ が成り立つ.)

Proof. A の構成に関する帰納法による.

Case 1. $A \equiv B \rightarrow C$ の場合.

$$\begin{aligned} a, \xi \Vdash B \rightarrow C &\iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ (b, \xi \Vdash B \text{ ならば } b, \xi \Vdash C) \\ &\iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ (b \in \llbracket B \rrbracket_\xi \text{ ならば } b \in \llbracket C \rrbracket_\xi) \\ &\iff a \in \bigcup \{U \in \mathcal{O}X \mid \llbracket B \rrbracket_\xi \cap U \subseteq \llbracket C \rrbracket_\xi\} \\ &\iff a \in \llbracket B \rightarrow C \rrbracket_\xi \end{aligned}$$

Case 2. $A \equiv \forall p. B$ の場合.

$$\begin{aligned} a, \xi \Vdash \forall p. B &\iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ \forall V \in D_b \quad b, \xi(p:V) \Vdash B \\ &\iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ \forall V \in D_b \quad b \in \llbracket B \rrbracket_{\xi(p:V)} \\ &\iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall \mathcal{F}_b \in \mathcal{O}_U \ \forall V \in D_{\mathcal{F}_b} \quad \llbracket B \rrbracket_{\xi(p:V)} \in \mathcal{F}_b \\ &\iff a \in \bigcup \{U \in \mathcal{O}X \mid \forall \mathcal{F}_b \in \mathcal{O}_U \ \forall V \in D_{\mathcal{F}_b} \quad \llbracket B \rrbracket_{\xi(p:V)} \in \mathcal{F}_b\} \\ &\iff a \in \llbracket \forall p. B \rrbracket_\xi \end{aligned}$$

Case 3. $A \equiv \exists p. B$ の場合. 系 3 より

$$a, \xi \Vdash \exists p. B \iff \exists U \in \mathcal{F}_a \ \forall b \in U \ \exists V \in D_b \quad b, \xi(p:V) \Vdash B$$

であるから, Case 2 と同様に証明することが出来る.

その他のケースは何れも容易に確認できるので証明は省略する. □

上に示した Kripke モデルから束論的モデルへの変換と対照的に, spatial lattice に基づくモデルから sober な Kripke を構成することも出来る. 実際に, $\langle L, \sqsubseteq \rangle$ を spatial lattice として束論的モデル $\mathcal{L} = \langle L, \sqsubseteq, \{D_F \mid F \in \text{pt } L\} \rangle$ が与えられている時に, $\text{pt } L$ 上の位相として $\mathcal{O} \text{pt } L = \{\mathcal{O}_u \mid u \in L\}$ を与え, 更に, 各 $F \in \text{pt } L$ に対応する domain を $\mathcal{O}D_F = \{\mathcal{O}_u \mid u \in D_F\}$ とする. この時, $\mathcal{L}$ に関する条件 (3) は, 任意の $F \in \text{pt } L$ に対して

$$\exists \mathcal{O}_u \in \mathcal{F}_F \ \forall \mathcal{O}_v \in \mathcal{O}_u \quad D_F \subseteq D_{\mathcal{O}_v}$$

が成り立つことを保証しているのので、構造 $\text{pt } \mathcal{L} = \langle \text{pt } L, \mathcal{O} \text{pt } L, \{\mathcal{O}D_F \mid F \in \text{pt } L\} \rangle$ は Kripke モデルとなる。また、 $\mathcal{L}$ に関する環境 ξ に対して、 $\xi_{\text{pt}}(p) = \mathcal{O}_{\xi(p)}$ として $\text{pt } \mathcal{L}$ に関する環境 ξ_{pt} を定義する。

定理 7. $\mathcal{L} = \langle L, \sqsubseteq, \{D_F \mid F \in \text{pt } L\} \rangle$ を spatial lattice モデルとして、 $A \in \text{Prop}_2, F \in \text{pt } L$, 更に ξ を $\mathcal{L}$ に関する環境とする。このとき、 $\mathcal{L}$ において $\llbracket A \rrbracket_{\xi} \in F$ であることと sober Kripke モデル $\text{pt } \mathcal{L}$ において $F, \xi_{\text{pt}} \Vdash A$ であることは同値である。

Proof. A の構成に関する帰納法。

Case 1. $A \equiv B \rightarrow C$ の場合.

$$\begin{aligned}
F \in \mathcal{O}_{[B \rightarrow C]_{\xi}} &\iff \bigsqcup \{u \in L \mid \llbracket B \rrbracket_{\xi} \sqcap u \sqsubseteq \llbracket C \rrbracket_{\xi}\} \in F \\
&\iff \exists u \in F \quad \llbracket B \rrbracket_{\xi} \sqcap u \sqsubseteq \llbracket C \rrbracket_{\xi} \\
&\iff \exists u \in F \quad \mathcal{O}_{[B]_{\xi}} \cap \mathcal{O}_u \subseteq \mathcal{O}_{[C]_{\xi}} \quad (L \text{ が spatial より}) \\
&\iff \exists \mathcal{O}_u \in \mathcal{F}_F \quad \forall G \in \mathcal{O}_u \quad (G \in \mathcal{O}_{[B]_{\xi}} \text{ ならば } G \in \mathcal{O}_{[C]_{\xi}}) \\
&\iff \exists \mathcal{O}_u \in \mathcal{F}_F \quad \forall G \in \mathcal{O}_u \quad (G, \xi_{\text{pt}} \Vdash B \text{ ならば } G, \xi_{\text{pt}} \Vdash C) \\
&\iff F, \xi_{\text{pt}} \Vdash B \rightarrow C
\end{aligned}$$

Case 2. $A \equiv \forall p. B$ の場合.

$$\begin{aligned}
\llbracket \forall p. B \rrbracket_{\xi} \in F &\iff \bigsqcup \{u \in L \mid \forall G \in \mathcal{O}_u \quad \forall v \in D_G \quad \llbracket A \rrbracket_{\xi(p:v)} \in G\} \in F \\
&\iff \exists u \in F \quad \forall G \in \mathcal{O}_u \quad \forall v \in D_G \quad \llbracket A \rrbracket_{\xi(p:v)} \in G \\
&\iff \exists \mathcal{O}_u \in \mathcal{F}_F \quad \forall G \in \mathcal{O}_u \quad \forall \mathcal{O}_v \in \mathcal{O}D_G \quad G, \xi_{\text{pt}}(p : \mathcal{O}_v) \Vdash A \\
&\iff F, \xi_{\text{pt}} \Vdash \forall p. A
\end{aligned}$$

Case 3. $A \equiv \exists p. B$ の場合. 系 3 より Case 2 と同様に証明することが出来る。

その他のケースは何れも容易に確認できるので証明は省略する。 □

参考文献

- [1] S. Abramsky and A. Jung, Domain Theory, in *Handbook of logic in Computer Science volume 3 Semantic Structures*, Oxford Science Publications, 1994.
- [2] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.
- [3] S. K. Sobolev, The intuitionistic propositional calculus with quatifiers, *Matematicheskije Zametki* 22(1), pp. 69–76, 1977.
- [4] M. H. Sørensen and P. Urzyczyn, *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics volume 149, Elsevier, 2006.