

微分同相の群の2次元ホモロジー

東大 理 坪井 俊 (Takashi TSUBOI)

次の定理について述べる。

定理. $2(r+1) \leq n$ 又は $r=1$ のとき

$$H_2(B \overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0.$$

$2(r+1) \leq n$ 又は $r=1$ のとき, $B \overline{\Gamma}_n^r$ は $n+2$ 連結である。

§ 1.

M を境界のない n 次元微分多様体とする。 M の C^r 微分同相で台がコンパクトなものなす群を $\text{Diff}_c^r M$ と書く。 $\text{Diff}_c^r M$ には C^r 位相を考える。群 $\text{Diff}_c^r M$ に離散位相を入れたものを

$\text{Diff}_c^r M_\delta$ と書く。この時、恒等写像

$$\text{Diff}_c^r M_\delta \longrightarrow \text{Diff}_c^r M$$

は位相群の間の連続な (準) 同型で、それぞれの分類空間の
あいたの写像

$$B \text{Diff}_c^r M_\delta \longrightarrow B \text{Diff}_c^r M$$

をかきおこす。この写像のホモトピー論的ファイバーを (こ
れも位相群 $\text{Diff}_c^r M$ の分類空間となるので) $B \overline{\text{Diff}}_c^r M$ と書
く。

"微分同相の群のホモロジー" とは $\text{Diff}_c^r M$ または

$B \text{Diff}_c^r M_\delta$ という空間のホモロジーを指すのが正当であろ
うが、ここで考えるのは $B \overline{\text{Diff}}_c^r M_\delta$ のホモロジーである。

(位相群 G についてのファイバー空間列

$$G_\delta \rightarrow G \rightarrow B\overline{G} \rightarrow BG_\delta \rightarrow BG$$

を考えれば、 $B\overline{G}$ の情報から G , BG_δ の情報が得られる。)

$B \overline{\text{Diff}}_c^r M$ と Haefliger の Γ 構造の分類空間 $B\Gamma$ との関係に
ついて、次の事が知られている。簡単のため $r \geq 1$ とする。

$B\Gamma_n^r$ を余次元 n の C^r - Γ 構造の分類空間とする。 $B\Gamma_n^r$ の法束
の分類写像 $B\Gamma_n^r \xrightarrow{\nu} BO_n$ のファイバーを $B\Gamma_n^r$ と書く。

n 次元多様体 M の微分構造は $B\Gamma_n^r$ 構造だから可換図式

$$\begin{array}{ccc} & & B\Gamma_n^r \\ & \nearrow & \downarrow \nu \\ M & \xrightarrow{\tau} & BO_n \end{array}$$

を得る. $\pi^*\nu$ は M 上の $B\Gamma_n^r$ 束であるが, ここには, 写像 $M \rightarrow B\Gamma_n^r$ により与えられる切断が定まっている. Γ_n で ν を, この切断とコンパクトな集合上でのみことなる切断 $M \rightarrow \pi^*\nu$ 全体の空間とする.

定理 (Mather-Thurston). 写像 $B\overline{\text{Diff}}_c^r M \rightarrow \Gamma_n \pi^*\nu$ が存在して, 整係数ホモロジー群の間の同型をひきおこす.

とくに, $M = \mathbb{R}^n$ の場合, ν のファイバー $B\Gamma_n^r$ について,

$$H_*(B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = H_*(\Omega^n B\Gamma_n^r; \mathbb{Z})$$

ここで Ω^n は n 重閉道空間である.

この定理により, $B\overline{\text{Diff}}_c^r M$, $B\Gamma_n^r$, $B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n$ が結わつけられている. $B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n$ のホモロジーについては, 次のことが知られている.

$$H_1(B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0 \quad (r \neq n+1) \quad [\text{Mather-Thurston}]$$

$$H_{n+1}(B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \neq 0 \quad (r \geq 2) \quad [\text{例えば, Godbillon-Vey 不変量による}]$$

$$H_i(B\overline{\text{Homeo}}_c \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0 \quad (i \geq 1) \quad [\text{Mather.}]$$

これらは, Mather-Thurston の定理により, $B\Gamma_n^r$ は $r \neq n+1$ のとき, $n+1$ 連結 ($r = n+1$ のとき, 少なくとも n 連結), $r \geq 2$ のとき, $2n+1$ 連結ではない. $B\Gamma_n^0$ は可縮, と言いかえら

れる。

さて、我々の定理は、 $2(r+1) \leq n$ 又は $r=1$ のとき、
 $H_2(B\overline{Dif}_n^r \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0$ というものである。従って、この
 とき、 $B\overline{Dif}_n^r$ は $n+2$ 連結になる。

§ 2.

我々の定理の証明は、 $H_i(B\overline{Homeo}_c \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0$ の Mather ^{$i \geq 1$} による証明に近いものである。まず、これについて説明する。

$Homeo_c \mathbb{R}^n$ は可縮である。($f \in Homeo_c \mathbb{R}^n$ に対し、 $(H_t(f))(x) = tf(x/t)$ とおくと、 $H_1(f) = f$, $H_0(f) = id$ となる連続写像 $H: [0,1] \times Homeo_c \mathbb{R}^n \rightarrow Homeo_c \mathbb{R}^n$ を得る。) よって、

$B\overline{Homeo}_c \mathbb{R}^n \simeq BHomeo_c \mathbb{R}_\delta^n$ となる。 $BHomeo_c \mathbb{R}_\delta^n$ のホモロジーは次の複体のホモロジーである。 $G = Homeo_c \mathbb{R}^n$ として、

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[G] \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[G \times G] \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}[G \times G \times G] \leftarrow \dots$$

ただし、 $\mathbb{Z}[G \times \dots \times G]$ は $G \times \dots \times G$ 上の群環、境界 ∂ は

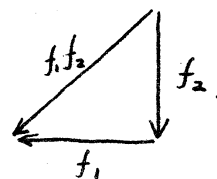
$\mathbb{Z}[G \times \dots \times G]$ の基底に対し次で定まる。

$$\begin{aligned} \partial(f_1, \dots, f_n) &= (f_2, \dots, f_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_n) \\ &\quad + (-1)^n (f_1, \dots, f_{n-1}). \end{aligned}$$

すべての1次元鎖は輪体である。

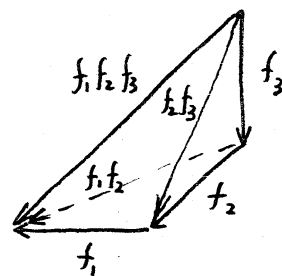
(f_1, f_2) は右図に対応している。

$$\partial(f_1, f_2) = (f_2) - (f_1 f_2) + (f_1).$$

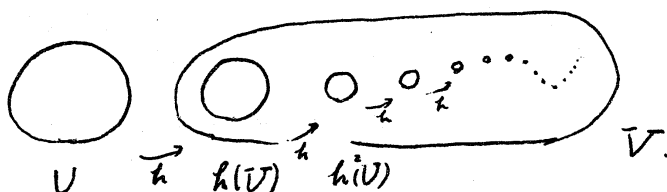


(f_1, f_2, f_3) は右図に対応している。

$$\omega(f_1, f_2, f_3) = (f_2, f_3) - (f_1, f_2, f_3) + (f_1, f_2, f_3) - (f_1, f_2)$$



さて、 $f \in \text{Homeo}_c \mathbb{R}^n$ に対し次の様な構成を考える。まず、 $\text{Supp}(f) = \mathcal{C} \{x: f(x) \neq x\} \subset U$ となる開球体 U をとる。 U に対し、 $h \in \text{Homeo}_c \mathbb{R}^n$ で、 $\{h^i(U)\}_{i \geq 0}$ は互いに交わらず、 $\text{diam } h^i(U) \rightarrow 0 \ (i \rightarrow \infty)$ となるものがとれる。さらに $\mathcal{C} \left\{ \bigcup_{i \geq 1} h^i(U) \right\} \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ となる開球体 V があるとしてよい。



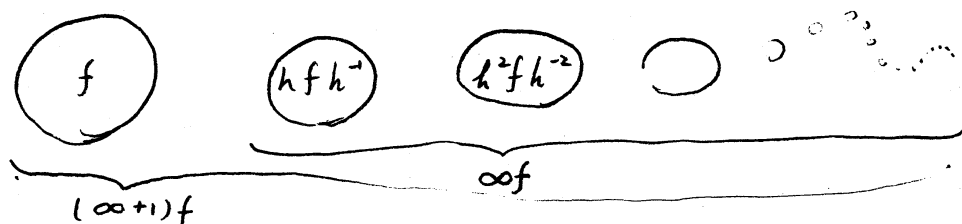
f に対し、 $\text{Supp}(h^i f h^{-i}) \subset h^i(U)$ で、

$$\|h^i f h^{-i} - \text{id}\|_{C^0} \leq \text{diam } h^i(U)$$

であるから、 $\prod_{i=1}^{\infty} h^i f h^{-i}$ が定義され、 $\text{Homeo}_c \mathbb{R}^n$ の元となる。これを ∞f と書く。一方 $\prod_{i=0}^{\infty} h^i f h^{-i} = (1+\infty)f$ とおくと、次の成立する。

$$(1+\infty)f = f(\infty f).$$

$$h((1+\infty)f)h^{-1} = \infty f.$$



$$H_i(B\text{Homeo}_c R^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i=0 \\ 0, & i \geq 1 \end{cases} \quad \text{を } i \text{ に関する帰納法で}$$

示す。 $i=0$ は明らかである。 $i-1$ までは示されているとする。

i 次元輪体 $\sigma = \sum_j a_j (f_1^{(j)}, \dots, f_i^{(j)})$, $a_j \in \mathbb{Z}$ をとる。ここ

にあらわれるすべての $f_k^{(j)}$ について、 $\text{Supp } f_k^{(j)} \subset U$ として

よい。このとき、上の h を使って、 i 次元鎖

$$\infty \sigma = \sum_j a_j (\infty f_1^{(j)}, \dots, \infty f_i^{(j)})$$

$$(1+\infty)\sigma = \sum_j a_j ((1+\infty)f_1^{(j)}, \dots, (1+\infty)f_i^{(j)})$$

が定義される。 $f \mapsto \infty f$ は準同型だから、 $\infty \sigma$, $(1+\infty)\sigma$ は輪

体となる。さらに、 $h((1+\infty)\sigma)h^{-1} = \infty \sigma$ 4 元、 $\infty \sigma$ と $(1+\infty)\sigma$

とはホモロークである。

一方、 $W \subset R^n$ に台をもつ R^n の同相のなす群を $\text{Homeo}_W R^n$

と書くと、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \text{Homeo}_{U \cup V} R^n & & \\ \downarrow \cong & \searrow & \text{Homeo}_c R^n \\ \text{Homeo}_U R^n \times \text{Homeo}_V R^n & \nearrow & \end{array}$$

これより、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} B\text{Homeo}_{U \cup V} R^n & & \\ \downarrow \simeq & \searrow & B\text{Homeo}_c R^n \\ B\text{Homeo}_U R^n \times B\text{Homeo}_V R^n & \nearrow & \end{array}$$

U, V は開球体としたから、 $H_*(B\text{Homeo}_U R^n) \cong H_*(B\text{Homeo}_V R^n)$

$\cong H_*(B\text{Homeo}_c R^n)$ である。よって、帰納法の仮定と Künneth

の公式により、 $H_2(B\text{Homeo}_U R_\delta^n \times B\text{Homeo}_V R_\delta^n) \cong H_2(B\text{Homeo}_U R_\delta^n) \oplus H_2(B\text{Homeo}_V R_\delta^n)$ を得る。 $(1+\infty)\sigma$ は $B\text{Homeo}_{U \cup V} R_\delta^n$ の i 元輪体と考えることも出来る。これのホモロジー類は $H_2(B\text{Homeo}_U R_\delta^n) \oplus H_2(B\text{Homeo}_V R_\delta^n)$ の $\sigma \oplus \infty\sigma$ のホモロジー類にうつされるから、 $B\text{Homeo}_c R_\delta^n$ においては、 $(1+\infty)\sigma$ と $\sigma + \infty\sigma$ はホモロークに等しい。 $(1+\infty)\sigma$ は $\infty\sigma$ とホモロークであったから σ は零にホモロークである。これで、 $B\text{Homeo}_c R_\delta^n$ が非輪状であることが示された。

§ 3.

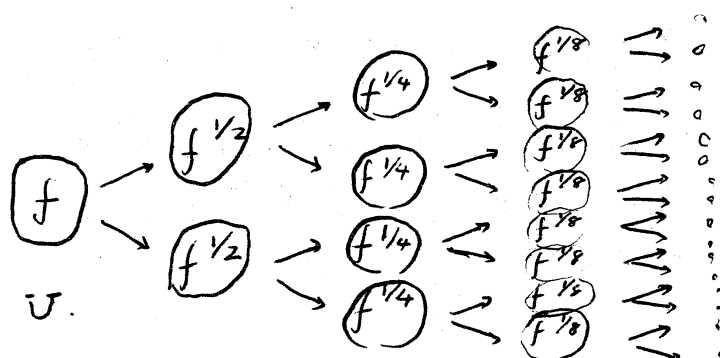
前節の証明では、 f から ∞f , $(1+\infty)f$ を構成し、輪体 σ から輪体 $\infty\sigma$, $(1+\infty)\sigma$ を構成できることが本質的である。前節の証明はそのままだと微分同相の群には適用できない。実際、 f が n -id の C^2 ノルムは、ほとんど一定で、 ∞f は f が n -id のとき C^2 位相では収束しない。無限に繰り返すことと微分可能なものに収束することを両立させるために、次の様なことを考える。

前節の ∞f の構成では、 $\{id, h, h^2, \dots\} \cong \mathbb{Z}_+$ の元による共役が登場したが、これを $\bigstar^N \mathbb{Z}_+ = \underbrace{\mathbb{Z}_+ * \dots * \mathbb{Z}_+}_N$ に置き換える。すなわち、開球体 U , 準同型 $\mathbb{Z}_+ \xrightarrow{\bigstar^N} \text{Diff}_c^n \mathbb{R}^n$ で $\mathbb{Z}_+(U)$, $\lambda \in \bigstar^N \mathbb{Z}_+$ が互いに交わらないものが存在したとする。 U に台をもつ微分同相の群の一径数部分群 $\{f^t; t \in \mathbb{R}\}$

を考える。このとき $\Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)} \Phi(\lambda)^{-1}$ は $\Phi(\lambda)(U)$ に台をもつ。ここで $l(\lambda)$ は λ の語の長さである。もしも、 $\Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)} \Phi(\lambda)^{-1} - \text{id}$ の C^r ノルムが $l(\lambda) \rightarrow \infty$ のときに零に近づけば、

$$F = \prod_{\lambda \in \ast \mathbb{Z}_+^N} \Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)} \Phi(\lambda)^{-1}$$

は C^r となる。



この F については

$$F^N = \prod_{\lambda \in \ast \mathbb{Z}_+^N} \Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)-1} \Phi(\lambda)^{-1},$$

$\Lambda = \ast \mathbb{Z}_+^N$ の生成元を記号 $1, \dots, N$ とするとき、 $1 \leq i \leq N$ に対し

$$\Phi(i) F^N \Phi(i)^{-1} = \prod_{\lambda \in i\Lambda} \Phi(\lambda) f^{N-l(\lambda)} \Phi(\lambda)^{-1}$$

が成立し、

$$F = f^1 \prod_{i=1}^N \Phi(i) F^N \Phi(i)^{-1}$$

となる。これは F が前節の ωf と同じような性質を持っていることを示している。

この構成は次元の高い輪体に対しても拡張され得る。開球体 U , 準同型 $\Phi: \ast \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ で, $\Phi(i)(U)$, $i \in \Lambda = \ast \mathbb{Z}_+$ が互いに交わらず, $U, \overline{\bigcup_{i \in \Lambda} \Phi(i)(U)}$, $i=1, \dots, N^m$ が互いに交わらない開球体に含まれている, というものが存在したとする。 $\{f^t; t \in \mathbb{R}\}$ を U に台をもつ一径数部分群とする。 T^m 上の葉層 $\mathbb{R}^n$ 束で $\pi_1(T^m)$ の生成元に対応するホロノミーが $f^{t(1)}, \dots, f^{t(m)}$ で与えられるものを考える。これは $B\text{Diff}_c^r(\mathbb{R}^n)$ の m 次元ホモロジー類 $\{f^{t(1)}, \dots, f^{t(m)}\}$ を定める。

$$F^{t(i)} = \prod_{\lambda \in \Lambda = \ast \mathbb{Z}_+} \Phi(\lambda) f^{t(i)N^{-\ell(\lambda)}} \Phi(\lambda)^{-1}$$

が C^r 微分同相となったとする。このとき、

$$\{F^{t(1)}, \dots, F^{t(m)}\} = N^m \{F^{t(1)/N}, \dots, F^{t(m)/N}\}$$

である。 $\Phi(i) \{F^{t(1)/N}, \dots, F^{t(m)/N}\} \Phi(i)^{-1}$ は $\{F^{t(1)}, \dots, F^{t(m)}\}$ を $\bigcup_{i \in \Lambda} \Phi(i)(U)$ に制限したものになっている。 $\{f^{t(1)}, \dots, f^{t(m)}\}$, $j < m$ の形のホモロジー類が零になることが帰納的に示されれば、Künneth の公式により、

$$\{F^{t(1)}, \dots, F^{t(m)}\} = \sum_{i=1}^{N^m} \Phi(i) \{F^{t(1)/N}, \dots, F^{t(m)/N}\} \Phi(i)^{-1} + \{f^{t(1)}, \dots, f^{t(m)}\}$$

となり、 $\{f^{t(1)}, \dots, f^{t(m)}\} = 0$ が示される。

このような構成には、いくつかの問題点がある。まず、微分同相 f は一径数部分群に入るとはかぎらない。さらに、次

元の高い輪体はもっと複雑である。等。

最初の問題点に対しては、 $B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n$ は葉層 $\mathbb{R}^n$ 積を分類する空間であり、葉層 $\mathbb{R}^n$ 積には細分が定義できるということにより対処できる。その他の点では、実際に次元が高くなると計算が複雑になり、そのために現在のところ 2次元の輪体に対してしか計算できていない。(上のような構成には高い微分可能性は期待できない。 $B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n$ の m 次元輪体に対しては $mr < n+m$ が構成存在の為の条件である。)

§ 4.

$B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n$ は次の様にして構成される、 $S_*(\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n)$ を $\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ の特異単体複体とする。 $\Delta^m = \{(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m; 1 \geq t_1 \geq \dots \geq t_m \geq 0\}$ を標準 m 単体とする。特異 m 単体 $\sigma: \Delta^m \rightarrow \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$, $g \in \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ に対し、 $\sigma g: \Delta^m \rightarrow \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ を $(\sigma g)(t) = \sigma(t)g$, $t \in \Delta^m$ で定義する。これは $\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ の $S_*(\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n)$ 上への右からの作用を定める。この作用は境界作用子と可換で、 $S_*(\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n)/\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ は半単体複体となる。 $S_*(\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n)/\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ の実現が $B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n$ を与える。今後はこれを $B\overline{\text{Diff}}_c^r \mathbb{R}^n$ とする。

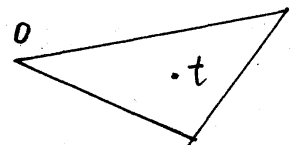
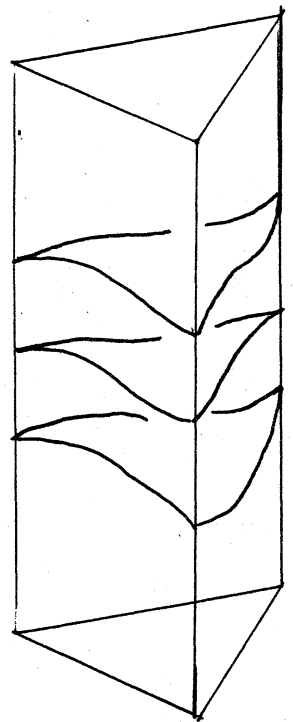
$\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r < \infty$) は C^∞ バナッハ空間様体の構造をもつ。 $S_*(\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n)$ を C^∞ 特異単体複体とすると $\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ は右から

これに作用する。(結合 $(g_1, g_2) \longrightarrow g_1 g_2$ は g_1 に関し ∞ である。) 実現の間の包含写像

$$|S^*(\text{Diff}^c R^n)/\text{Diff}^c R^n| \longrightarrow |S_*(\text{Diff}^c R^n)/\text{Diff}^c R^n|$$

はホモトピー同値である。

(c) 特異 m 単体 $\sigma: \Delta^m \longrightarrow \text{Diff}^c R^n$ は, $(t, x) \in \Delta^m \times R^n$ を通る葉が $\{(u, \sigma(u)\sigma(t)^{-1}(x)); u \in \Delta^m\}$ となる $\Delta^m \times R^n$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}_\sigma$ を定める。 $\Delta^m \times R^n$ 上の葉層構造で $\{t\} \times R^n, t \in \Delta^m$ に横断的なものを Δ^m 上の葉層 R^n 積という。 Δ^m 上の葉層 R^n 積には上のような σ をとることができる。葉層 R^n 積の台を $\mathcal{A} = \{x \in R^n; \exists t \in \Delta^m, \sigma(t)\sigma(t)^{-1}(x) \neq x\}$ と定義する。 K は台をもつ微分同相の群を $\text{Diff}_K R^n$ と書くとき、 σ の定める葉層 R^n 積の台が K に含まれるならば、 $\sigma(t)\sigma(t)^{-1}$ は $\text{Diff}_K R^n$ への写像となる。 σ と σg ($g \in \text{Diff}^c R^n$) は同じ葉層 R^n 積に対応していることから、 Δ^m 上の台がコンパクトな葉層 R^n 積と $B\text{Diff}^c R^n$ の m 単体は一対一に対応していることがわかる。



$S_*^\infty(\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n) / \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ ($1 \leq r \leq \infty$) の元 σ にはノルムを定義することができる。 σ に対応する葉層 $\mathbb{R}^n$ 積存は、

$$\Delta^m \xrightarrow{(t,x) \text{ を通る葉の接写像}} \Delta^m \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{射影}} \mathbb{R}^n$$

の接写像

$$T_t \Delta^m \longrightarrow T_{(t,x)} \Delta^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x \mathbb{R}^n$$

を定める。これは、 $X_t: T_t \Delta^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を定義する。

但し、 $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ 上の台がコンパクトなベクトル場の全体である。 σ 或いは $\tilde{\sigma}$ のノルムは、 $\mathbb{R}^n$ 上の C^r ノルム $\|\cdot\|_r$ により、

$$\|\tilde{\sigma}\| = \sup_{t \in \Delta^m} \sup_{v \in T_t \Delta^m, |v|=1} \|X_t v\|_r$$

と定義される。

葉層 $\mathbb{R}^n$ 積存 に対し、 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合 K が " $x \in K \iff \sigma(t)\sigma(0)^{-1}(x) \in K$ " という性質をみたしているとする。このとき $\tilde{\sigma}$ の K への制限 $\tilde{\sigma}|_K$ が、

$$(\tilde{\sigma}|_K)(t)(x) = \begin{cases} \sigma(t)\sigma(0)^{-1}(x) & x \in K \\ x & x \in \mathbb{R}^n - K \end{cases}$$

により定まる。 K の境界点において、 σ が平坦であれば、

$\tilde{\sigma}|_K: \Delta^m \longrightarrow \text{Diff}_K^r \mathbb{R}^n$ となる。さらに $\|\tilde{\sigma}|_K\| \leq \|\tilde{\sigma}\|$ である。

一方 $\sigma_i: \Delta^m \longrightarrow \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ ($i \in \mathbb{N}$) が、

$$\text{Int Supp } \tilde{\sigma}_i \cap \text{Int Supp } \tilde{\sigma}_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

をみたすとき、 $\sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i: \Delta^m \longrightarrow \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ が

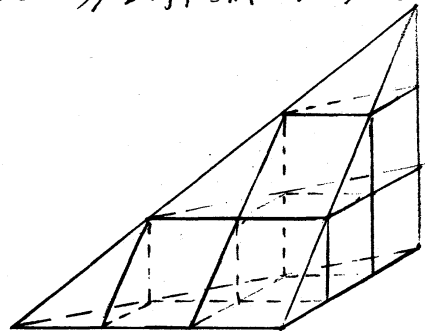
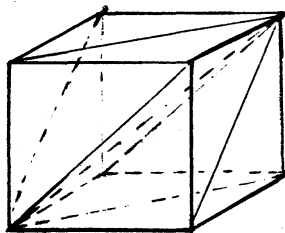
$$(U\sigma_i)(t)(x) = \begin{cases} \sigma_i(t)\sigma_i(0)^{-1}(x) & x \in \text{Supp } \tilde{f}_{\sigma_i} \quad i \in \mathbb{N} \\ x & x \in \mathbb{R}^n - U\text{Supp } \tilde{f}_{\sigma_i} \end{cases}$$

により定まる。 $U\text{Supp } \tilde{f}_{\sigma_i}$ が相対コンパクト、 $\|\tilde{f}_{\sigma_i}\| \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$) のとき、 $U\sigma_i : \Delta^m \rightarrow \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ となる。有限個の $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ に対しても $\bigcup_{i=1}^N \sigma_i$ は同様に定義される。 $\bigcup_{i=1}^N \sigma_i$ は常に $\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ への写像となる。

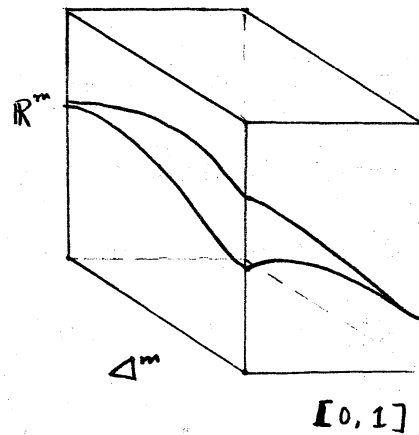
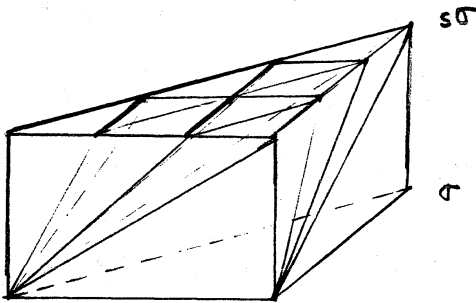
§ 5.

葉層 $\mathbb{R}^n$ 積の細分、ホモトピー等について述べておく。

立方体 $[0, 1]^m$ は $1, \dots, m$ の置換 $(i_1, \dots, i_m)$ に対応した単体 $\{(t_1, \dots, t_m) \in [0, 1]^m; 1 \geq t_{i_1} \geq \dots \geq t_{i_m} \geq 0\}$ に分割される。正整数 N に対し、 $\Delta^m = \{(t_1, \dots, t_m) : t_1 \geq \dots \geq t_m \geq 0\}$ は、 $t_i = j/N$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, N-1$ なる超平面で切り、さらに得られた小片を立方体の分割の様に分割して、 N^m 個の単体に分割される。これに対応して、特異 m 単体 $\sigma : \Delta^m \rightarrow \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ は N^m 個の特異 m 単体の和 $s\sigma$ となる。 $s\sigma$ の各単体のノルムは σ のノルムの $1/N$ となる。 s は $C_* = S_*(\text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n) / \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ からそれ自



身への鎖字像を与えるが、これと恒等字像との鎖ホモトピー S が存在する。つまり、 $\partial S\sigma + S\partial\sigma = \sigma - s\sigma$ となる。



Δ^m 上の 2 つの葉層 R^n 積は $[0, 1] \times \Delta^m$ 上の葉層 R^n 積の $\{0\} \times \Delta^m, \{1\} \times \Delta^m$ への制限となっているときホモトピーであるといわれる。

$\sigma: \Delta^m \rightarrow \text{Diff}_c^r R^n, \varphi: [0, 1] \rightarrow \text{Diff}_c^r R^n, \varphi(0) = \text{id}$.
 に対し、 $C_\varphi \sigma: [0, 1] \times \Delta^m \rightarrow \text{Diff}_c^r R^n$ を $C_\varphi \sigma(s, t) = (\varphi(s)\sigma(t))$ で定義すると、これは σ と $\varphi(1)\sigma$ との間のホモトピーを与えている。 $\text{Supp } \varphi(1)\sigma = \varphi(1)(\text{Supp } \sigma)$ となる。 C_φ は複体 C_* 上で $\varphi(1)$ と id との鎖ホモトピーを与える。

$$\partial C_\varphi \sigma + C_\varphi \partial \sigma = \sigma - \varphi(1)\sigma.$$

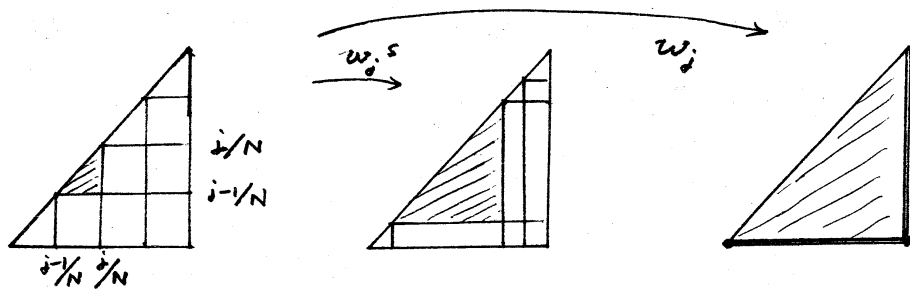
これは、離散群のホモロジーに内部自己同型は自明に作用することに対応している。

次のホモトピーは Künneth の公式に対応している。 $\sigma = \bigcup_{j=1}^N \sigma_j$
 $\sigma_j: \Delta^m \rightarrow \text{Diff}_c^r R^n, \sigma_j(0) = \text{id} \quad (j=1, \dots, N)$ とする。

$$w_j : \Delta^m \longrightarrow \Delta^m \quad w_j(t_1, \dots, t_m) = (u_1, \dots, u_m) \text{ を}$$

$$u_i = \begin{cases} 0 & , [Nt_i] < j-1 \\ Nt_i - [Nt_i], [Nt_i] = j-1 \\ 1 & , [Nt_i] > j-1 \end{cases} \quad (i=1, \dots, m)$$

で定義する。 $1 \geq t_1 \geq \dots \geq t_m \geq 0$ から $1 \geq u_1 \geq \dots \geq u_m \geq 0$ となり、
 $\Delta^m \longrightarrow \Delta^m$ の写像と存っている。 w_j は id とホモトピーである。
 ホモトピー $w_j^s(t_1, \dots, t_m) = (u_1^s, \dots, u_m^s)$, $s \in [0, 1]$
 は $u_i^s = su_i + (1-s)t_i$ により与えられる。

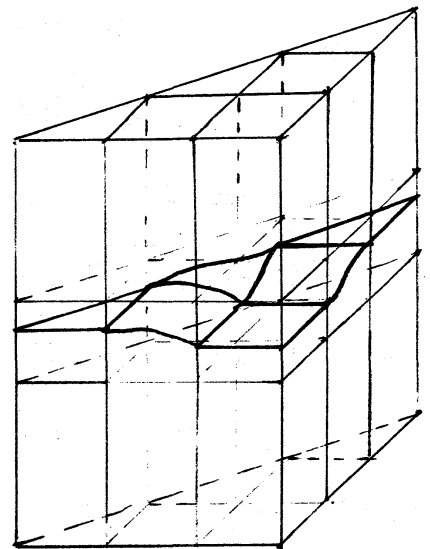


さて、 $\bigcup_{j=1}^N \sigma_j \circ w_j$ を考えるとこれは $\sigma = \bigcup_{j=1}^N \sigma_j$ とホモトピーである。
 σ_j が C^∞ でも、 $\bigcup_{j=1}^N \sigma_j \circ w_j$ は $t_i = j/N$ ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, N-1$)
 という超平面上で C^∞ でない。そこで、 $\bigcup_{j=1}^N \sigma_j \circ w_j$ の N 細分
 $\bar{p}\sigma = S \bigcup_{j=1}^N \sigma_j \circ w_j$ を考える。

上のホモトピーが境界作用子
 と可換であることから $\bar{p}$ と id
 との間の鎖ホモトピー P が存
 在する。

$$2P\sigma + P\partial\sigma = \sigma - \bar{p}\sigma.$$

$\bar{p}\sigma$ の単体のノルムは $|\sigma|$ 以



下である。次元の低い単体に対して $\bar{p}$ は書きやすい。 σ が 1 次元のとき、 $\bar{p}\sigma = \sum \sigma_i$ であり、2次元のとき、

$$\bar{p}\sigma = \sum \sigma_i - \sum_{i < j} \alpha_0 \sigma_i \times \alpha_2 \sigma_j \quad \text{と書かれる。}$$

ただし、 $\tau_1, \tau_2: \Delta^1 \rightarrow D: H_c^r(\mathbb{R}^n)$, $\text{Int Supp } \tau_1 \cap \text{Int Supp } \tau_2 = \emptyset$ に対し、 $\tau_1 \times \tau_2: [0, 1]^2 \rightarrow D: H_c^r(\mathbb{R}^n)$ は $(\tau_1 \times \tau_2)(t_1, t_2) = \tau_1(t_1) \tau_2(t_2)$ で定まる。

§ 6.

第3節に書いた筋書のうち、葉層 $\mathbb{R}^n$ 積の細分は前節で定義した。我々の定理 $H_2(B\text{Diff}_c \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0$ の $2(r+1) \leq n$ の場合の証明では、次の開球体 U と準同型 Φ をつかう。

補題. 開球体 U と準同型 $\Phi: \tilde{X}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+) \rightarrow \text{PD: } H_c^\infty \mathbb{R}^n$

で次を満たすものがある。(ここで $\text{PD: } H_c^\infty \mathbb{R}^n = \{f^t: [0, 1] \rightarrow \text{Diff}_c^\infty \mathbb{R}^n; f^0 = \text{id}\}$) $\Phi(\omega^1(U); \lambda \in \tilde{X}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+))$ は互いに交わらない。さらに、 $\Phi(\omega^1(U))$ はアファイン写像

$x \mapsto Ax + b$ の形で、 A は対角行列 $((1+\varepsilon)^{-l_1(\lambda)}, \dots, (1+\varepsilon)^{-l_n(\lambda)})$

$\varepsilon > 0$; $l_i(\lambda) = l(\text{pr}_i(\lambda))$, $\text{pr}_i: \tilde{X}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+$ は第 i 成分への射影で、 l は語の長さ $\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ である。

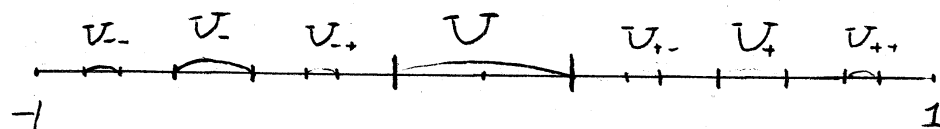
$n=1$ のときは $-, +$ を $\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+$ の生成元として、

$$\Phi(-)^1 = \frac{x+1}{2+\varepsilon} - 1 \quad x \in [-1, 1]$$

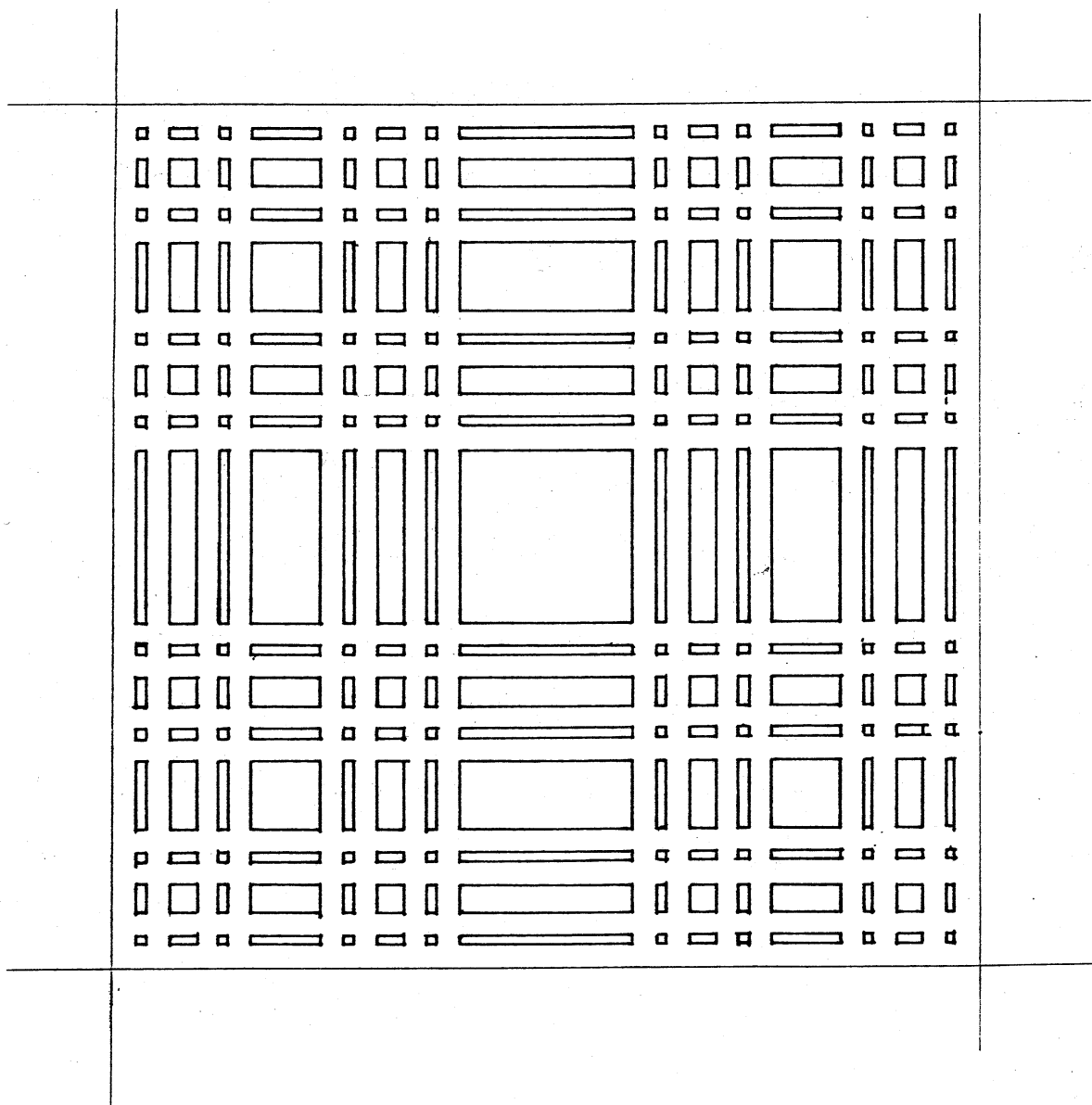
$$\Phi(+)^1 = \frac{x-1}{2+\varepsilon} + 1 \quad x \in [-1, 1]$$

$$U = \left(\frac{-\varepsilon}{2+\varepsilon}, \frac{+\varepsilon}{2+\varepsilon} \right)$$

である。



$n \geq 2$ のときにはこれの積作用を考える。



$$\{\lambda \in \tilde{X}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+); l_1(\lambda) = \dots = l_n(\lambda)\} \cong \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_+ \quad \text{また}$$

$$\{\lambda \in \tilde{X}(\mathbb{Z}_+ * \mathbb{Z}_+); l_1(\lambda) = \dots = l_{[n/2]}(\lambda), l_{[n/2]+1}(\lambda) = \dots = l_{2[n/2]}(\lambda), \\ (l_{2[n/2]+1}(\lambda) = 0 \quad n \text{ が奇数のとき})\} \cong \left(\prod_{i=1}^{2[n/2]} \mathbb{Z}_+\right) \times \left(\prod_{i=1}^{2[n/2]} \mathbb{Z}_+\right)$$

だから、重から、 $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_+, \prod_{i=1}^{2[n/2]} \mathbb{Z}_+$ からの準同型を構成できる。

§ 7.

$\mathbb{R}^n$ に前節の U , 重をとる。部分半群 $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_+$ の生成元の集合を $B = \{\beta\}$ とする。1次元単体 $\sigma: \Delta^1 \rightarrow \text{Diff}^r \mathbb{R}^n$ をとる。 $\text{Supp } \sigma \subset U$ とする。 σ の 2^n 細分 $s\sigma$ をとる。これは 2^n 個の単体の和だから、添え字集合 $\{\beta\}$ により添え字をつける。

$$s\sigma = \sum_{\beta} s_{\beta} \sigma.$$

$\Phi(\beta)^{\perp} s_{\beta} \sigma$ は $\Phi(\beta)^{\perp}(U)$ に台をもつ。さらに $\Phi(\beta)^{\perp} s_{\beta} \sigma$ を 2^n 細分する。

$$s\Phi(\beta(1))^{\perp} s_{\beta(1)} \sigma = \sum_{\beta(2)} s_{\beta(2)} \Phi(\beta(1))^{\perp} s_{\beta(2)} \sigma$$

$\Phi(\beta(2))^{\perp} s_{\beta(2)}, \Phi(\beta(1))^{\perp} s_{\beta(1)} \sigma$ は $\Phi(\beta(2)\beta(1))^{\perp}(U)$ に台をもつ。以下同様にくりかえし、

$\Phi(\beta(k) \dots \beta(1))^{\perp}(U)$ に台をもつ

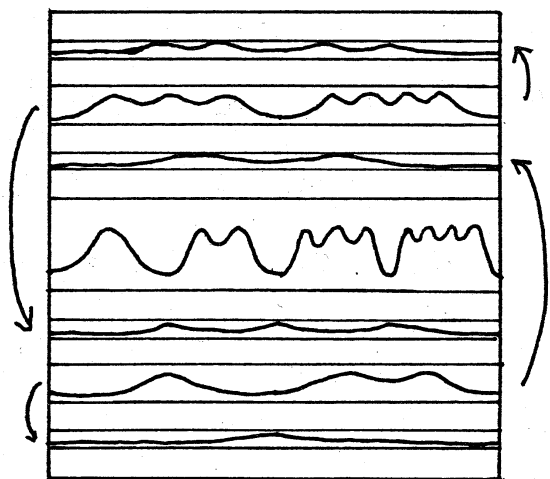
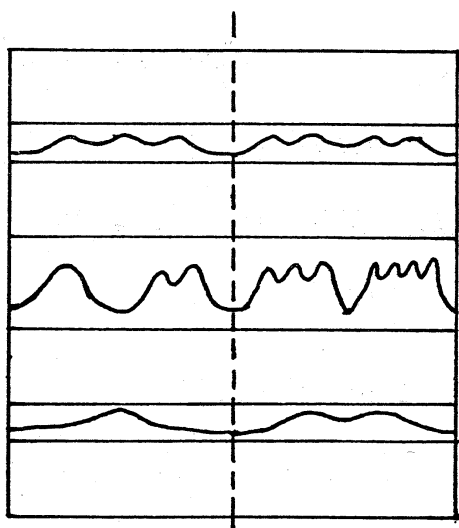
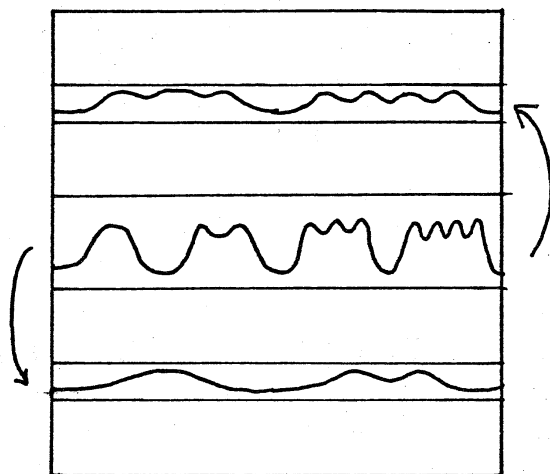
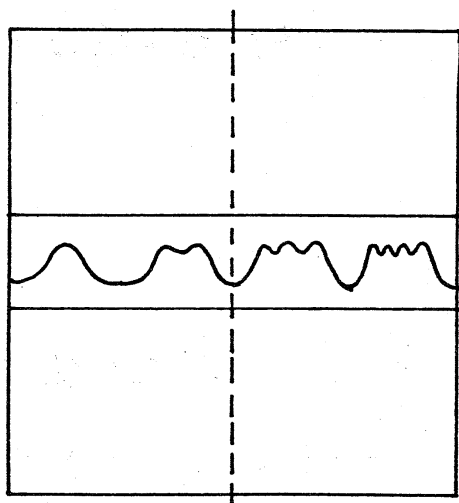
$$\sigma_{\beta(k) \dots \beta(1)} = \Phi(\beta(k))^{\perp} s_{\beta(k)} \dots \Phi(\beta(1))^{\perp} s_{\beta(1)} \sigma$$

が得られる。さて、

$$I\sigma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma_{\lambda} \quad \Lambda = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_+ \quad \text{とおく。}$$

$I\sigma$ は $r-1 < n$, ε が十分小さい C^r である。なぜなら

は、 s_{β} はノルムを 2^{-n} 倍し、 $\Phi(\beta)^{\perp}$ は $(2+\varepsilon)^{r-1}$ 倍するから



である。

この I_σ に対し、次が成立する。

$$s I_\sigma = \sum_{\beta} s_{\beta} I_{\sigma}$$

$$\Phi(\beta)^2 s_{\beta} I_{\sigma} = \bigcup_{\lambda \in \beta \Lambda} \sigma_{\lambda}$$

$$I_{\sigma} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma_{\lambda} = \sigma \cup \bigcup_{\beta \in B} \left(\bigcup_{\lambda \in \beta \Lambda} \sigma_{\lambda} \right).$$

最後の分解に対応する $\bar{p}$ をとれば、

$$\bar{p}(I_{\sigma}) = \sigma + \sum \Phi(\beta)^2 s_{\beta} I_{\sigma}$$

となる。ゆえに

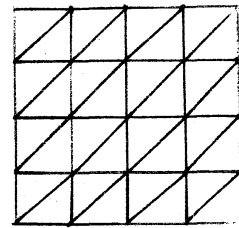
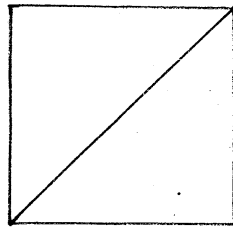
$$\sigma = \sigma \left(s I_{\sigma} + \sum \left(\Phi(\beta)^2 s_{\beta} I_{\sigma} - p I_{\sigma} \right) \right)$$

と書かれる。これは Mather による $r < n+1$ のとき $H_1(BD, H_c^r(R)) = 0$

という結果の別証になっている。

σ に対し I_{σ} を構成する方法は高次元鎖に対しても拡張できる。2次元の場合、特異単体 $\Delta^2 \rightarrow \text{Diff}^c(R^n)$ を考えるより特異立方体 $Q: [0, 1]^2 \rightarrow \text{Diff}^c(R^n)$ を考える方が良く、任意の2次元輪体はその重心細分において、もとの単体内のもとの頂点の星状複体をとれば、特異立方体の和とホモローグであることがわかる。

R^n に前節の $\bigcup_{\Lambda_1} \bigcup_{\Lambda_2}$ 重をとり部分半群 $\left(\bigstar_{\mathbb{Z}_+}^{2^{[n/2]}} \right) \times \left(\bigstar_{\mathbb{Z}_+}^{2^{[n/2]}} \right)$ の第1成分、第2成分の生成元の集合を $B_1 = \{\beta_1\}$, $B_2 = \{\beta_2\}$ とする。2次元特異立方体 $Q: [0, 1]^2 \rightarrow \text{Diff}^c(R^n)$ をとる。 Q の台は $\bigcup$ に含まれているとする。 Q の $2^{[n/2]}$ 細分 sQ をとる。



sQ は $(Q^{\lceil n/2 \rceil})^2$ 個の立方体の和になるがこの上の辞書式順序
をとり Λ_1, Λ_2 の生成元の集合 B_1, B_2 の積集合 $B_1 \times B_2$ にも辞
書式順序をとって、これにより sQ の立方体に添え字をつけ

$$sQ = \sum_{\beta_1 \in \Lambda_1, \beta_2 \in \Lambda_2} s_{\beta_1, \beta_2} Q.$$

$\Phi(\beta_1, \beta_2)^4 s_{\beta_1, \beta_2} Q$ は $\Phi(\beta_1, \beta_2)^4(U)$ に台をもつ。これを細分し、
 (β_1, β_2) 成分を $\Phi(\beta_1, \beta_2)$ でうつす操作をくりかえすと、

$$\Phi(\beta_1(k) \cdots \beta_1(1), \beta_2(k) \cdots \beta_2(1))^4(U) \text{ に台をもつ}$$

$$Q_{\beta_1(k) \cdots \beta_1(1), \beta_2(k) \cdots \beta_2(1)} = \Phi(\beta_1(k), \beta_2(k))^4 s_{\beta_1(k), \beta_2(k)} \cdots \Phi(\beta_1(1), \beta_2(1))^4 s_{\beta_1(1), \beta_2(1)} Q$$

が定まる。

$$I_{12} Q = \bigcup_{\lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2, l(\lambda_1) = l(\lambda_2)} Q_{\lambda_1, \lambda_2}$$

とおく。 l は語の長さである。この $I_{12} Q$ は $r-1 < \lceil n/2 \rceil$,
 ε が十分小的时候き l^r となる。 s_{β_1, β_2} はノルムを $2^{-\lceil n/2 \rceil}$ 倍し、
 $\Phi(\beta_1, \beta_2) \cdot$ は $(2+\varepsilon)^{r-1}$ 倍するからである。この $I_{12} Q$ に対し：

$$s I_{12} Q = \sum s_{\beta_1, \beta_2} I_{12} Q$$

$$\Phi(\beta_1, \beta_2)^4 s_{\beta_1, \beta_2} I_{12} Q = \bigcup_{\lambda_1 \in \beta_1 \Lambda_1, \lambda_2 \in \beta_2 \Lambda_2, l(\lambda_1) = l(\lambda_2)} Q_{\lambda_1, \lambda_2}$$

$$I_{12} Q = Q \cup \bigcup_{(\beta_1, \beta_2) \in B_1 \times B_2} \Phi(\beta_1, \beta_2)^4 s_{\beta_1, \beta_2} I_{12} Q.$$

がいえ。ところが、このことから2次元トモロジー群が零であると結論を出すことはできない。Qから I_2Q を構成するという作用は境界作用子と可換という性質を持たないために、輪体から構成したものが輪体とならないためである。1次元の場合には全ての鎖が輪体でありうまくいったのである。

次の場合にはうまくいくことに注意する。 $Q = \tau_1 \times \tau_2$, $\tau_1, \tau_2: [0, 1] \longrightarrow \text{Diff}^r \mathbb{R}^n$, $\text{Int Supp } \tau_1 \cap \text{Int Supp } \tau_2 = \emptyset$ と書かれているとする。但し、 $(\tau_1 \times \tau_2)(t_1, t_2) = \tau_1(t_1) \tau_1(0)^{-1} \tau_2(t_2) \tau_2(0)^{-1}$ 。この時、Qは2次元輪体である。細分などによって $Q = \tau_1 \times \tau_2$ と書かれているという性質は不変だから、 I_2Q も2次元輪体となる。このとき、 $I_2Q = Q \cup \bigcup_{(\beta, \beta_2)} \Phi(\beta, \beta_2)^2 s_{\beta, \beta_2} I_2Q$ という分解に対応する $\bar{P}$ をとると、

$$\partial(S(I_2Q) + \sum C_{\Phi(\beta, \beta_2)^2 s_{\beta, \beta_2} I_2Q} - P I_2Q) \\ = Q + \square$$

となる。ここで $\square$ は $\tau_1 \times \tau_2$ で $\text{Supp } \tau_1, \text{Supp } \tau_2$ を含みたがいに交わらない開球体が存在するもののいくつかの和である。このような $\tau_1 \times \tau_2$ は $H_2(B\text{Diff}^r \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0$ ($r-1 < [n/2] < n$) により零にホモロークであるから、Qは零にホモロークである。 $Q = \partial BQ$ と書ける。

§ 8.

前節の $Q, I_2 Q$ を標準的に輪体におきかえることを考える。
 $Q: [0, 1]^2 \longrightarrow D_1 H^1(\mathbb{R}^2)$ に対し、 $\partial_1 Q$ を $\partial[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$
 と Q との結合、 $\partial_2 Q$ を $[0, 1] \times \partial[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ と Q との結合と定義する。
 $\partial Q = -\partial_1 Q + \partial_2 Q$ となる。 $\partial_2 Q$ には Λ_1 を使、て前節のように $\partial_2 Q$ を境界とする2次元鎖 $A_1(\partial_2 Q)$ を構成し、 $-\partial_1 Q$ には Λ_2 を使、て $A_2(-\partial_1 Q)$ を構成する。同じようにして、 $A_1 \partial_2 I_2 Q, A_2(-\partial_1) I_2 Q$ を定義して、2次元輪体 $I_2 Q - A_2(-\partial_1) I_2 Q - A_1(\partial_2) I_2 Q$ の存在から、 $Q - A_2(\partial_1) Q - A_1(\partial_2) Q$ が零にホモロークであることを示すのである。少し記号の準備が必要である。 $(A_1, A_2$ の存在のためには $r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 即ち $2(r+1) \leq n$ が必要とする。)

S_1 を $[0, 1]^2$ を $t_1 = j/2^{\lfloor n/2 \rfloor} \quad j=1, \dots, 2^{\lfloor n/2 \rfloor}-1$ で分割するのに対応する細分とする。 t_2 方向に細分するのは S_2 と書く。それぞれ、
 $id - S_1 = \partial S_1 + S_1 \partial_2$

$$id - S_2 = \partial S_2 + S_2(-\partial_1) \quad \text{をみたす。}$$

$\bar{p}$ は $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ の分割に対応して色々出てくる。第5節の定義の中で $\bar{p}\sigma = S \cup \partial \sigma, w_i = \sum \sigma_i + \square$ となるが $\sum \sigma_i = p\sigma$ とおく。2次元の場合 $\square = (\bar{p} - p)\sigma$ は $r \times r_2$ の形の2次元輪体の和である。さて、 $\bar{p}, p, P$ で $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ の次の分解に対応するものは次の様子を添え字をつけて表わす。

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{(e, e)\} \cup \{(\lambda_1, \lambda_2); (\lambda_1, \lambda_2) \neq (e, e)\}, \quad p_{12}$$

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2); l(\lambda_1) = l(\lambda_2)\} \cup \{(\lambda_1, \lambda_2); l(\lambda_1) \neq l(\lambda_2)\}, \quad p_{12}^d$$

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{(e, \lambda_2); \lambda_2 \in \Lambda_2\} \cup \{(\lambda_1, \lambda_2); \lambda_1 \neq e\} \quad p_1^d$$

$$\Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{(\lambda_1, e); \lambda_1 \in \Lambda_1\} \cup \{(\lambda_1, \lambda_2); \lambda_2 \neq e\} \quad p_2^d$$

$$\{(\lambda_1, \lambda_2); \lambda_1 \neq e\} = \bigcup_{\beta_1 \in B_1} \{(\lambda_1, \lambda_2); \lambda_1 \in \beta_1, \lambda_2 \in \Lambda_2\} \quad p_1$$

$$\{(\lambda_1, \lambda_2); \lambda_2 \neq e\} = \bigcup_{\beta_2 \in B_2} \{(\lambda_1, \lambda_2); \lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \beta_2, \lambda_2 \neq e\} \quad p_2$$

$$\{(\lambda_1, \lambda_2); \lambda_1 \neq e\} = \{(\lambda_1, \lambda_2); l(\lambda_1) = l(\lambda_2) + 1\} \cup \{(\lambda_1, \lambda_2); l(\lambda_1) \neq l(\lambda_2) + 1, \lambda_1 \neq e\} \quad p_{12}^{d1}.$$

また $Q_1 = \bigcup_{\beta_1 \in B_1} Q_{\beta_1, e}$ とおく。 $Q_{12} = \bigcup_{\beta_1 \in B_1} \bigcup_{\beta_2 \in B_2} Q_{\beta_1, \beta_2}.$

輪体 X, Y, Z に対し、 $X \xrightarrow{Z} Y$ とは、

$X - Y = \emptyset Z$ となることとする。

以上の準備のもとで、次の梯子を得る。ただし、

$\tau: [0, 1] \longrightarrow \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^n$ での台は $\overline{\bigcup_{l(\lambda_1)=l(\lambda_2)} \Phi(\lambda_1, \lambda_2)(U)}$ に含まれ $r < [\frac{n}{2}]$ とする。
($2(r+1) \leq n$.)

また I_1 は Λ_2 を使う構成である。 $C_{\Phi(\beta)^2}$ を C_{β_1} と書く。

$$\tau_1 = \bigcup_{\beta_1 \in B_1} \tau_{\beta_1}.$$

$$\begin{array}{ccc}
 I_1 \tau & \xrightarrow{p_{12}^d I_1 \tau} & p_{12}^d I_1 \tau = \tau + I_1 \tau_1 \\
 \downarrow S I_1 \tau & & \downarrow S p_{12}^d I_1 \tau \\
 s I_1 \tau & \xrightarrow{p_{12}^d s I_1 \tau} & p_{12}^d s I_1 \tau = s \tau + s I_1 \tau_1 \\
 \downarrow \sum C_{p_1 s_{p_1}} I_1 \tau & & \downarrow \sum C_{p_1 p_{12}^d s_{p_1}} I_1 \tau \\
 p_1 I_1 \tau_1 & \xrightarrow{p_{12}^{d1} p_1 I_1 \tau} & p_{12}^{d1} p_1 I_1 \tau_1 = p_1 \tau_1 + p_1 I_1 \tau_{11} \\
 \downarrow - p_1 I_1 \tau_1 & & \downarrow - p_1 p_{12}^{d1} I_1 \tau_1 \\
 I_1 \tau_1 & \xrightarrow{p_{12}^{d1} I_1 \tau_1} & p_{12}^{d1} I_1 \tau_1 = \tau_1 + I_1 \tau_{11} \\
 \downarrow S I_1 \tau_1 & & \downarrow S p_{12}^{d1} I_1 \tau_1 \\
 s I_1 \tau_1 & \xrightarrow{p_{12}^{d1} s I_1 \tau_1} & p_{12}^{d1} s I_1 \tau_1 = s \tau_1 + s I_1 \tau_{11} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

この梯子を右上から左上へ行き下に3段下がることにより、

$$\tau = \partial(P_{12}^d I_{1,\tau} + S I_{1,\tau} + \sum C_{\beta_1} s_{\beta_1} I_{1,\tau} - P_1 I_{1,\tau_1})$$

を得る。これを $\tau = \partial A_{1,\tau}$ と書く。この $A_{1,\tau}$ は $2(r+1) \leq n$ の時存在する。同じ方法で、 $s\tau = \partial A_{1,\tau}^s s\tau$, $p_1\tau_1 = \partial A_{1,\tau_1}^p(p_1\tau_1)$, $\tau_1 = \partial A_{1,\tau_1}'$ を得る。

また、梯子の一つの矩形の周囲は、3次元鎖の境界になっている。それぞれ反時計回りに見て上から順に次のものの境界である。

$$\begin{aligned} & P_{12}^d S I_{1,\tau} + B(\bar{p}_{12}^d - p_{12}^d) S I_{1,\tau}, \\ & - \sum C_{\beta_1} P_{12}^d s_{\beta_1} I_{1,\tau}, \\ & P_1 P_{12}^{d_1} I_{1,\tau_1} + B(\bar{p}_1 - p_1) P_{12}^{d_1} I_{1,Q_1}. \end{aligned}$$

さらに、梯子の左側の4段目より下は右側の1段目より下の一部となっていることに注意すると、

$$\begin{aligned} & s\tau - A_{1,\tau} + A_{1,\tau}^s s\tau \\ & \sum C_{\beta_1} s_{\beta_1} \tau - A_{1,\tau}^s s\tau + A_{1,\tau}^p p_1 \tau_1 \\ & - P_1 \tau_1 - A_{1,\tau_1}^p p_1 \tau_1 + A_{1,\tau_1}' \end{aligned}$$

も3次元鎖の境界として書かれることがわかる。

Λ_2 を使っても、同様の梯子を得、 $A_2 \cdots$ が定義される。

$I_{12}Q : [0, 1]^m \longrightarrow \text{Diff}_c^r \mathbb{R}^m$ について構成した

$I_{12}Q - A_2(-\partial_1)I_{12}Q - A_1(+\partial_2)I_{12}Q$ に関して次を得る。

$$I_{12}Q - A_2(-\partial_1)I_{12}Q - A_1(+\partial_2)I_{12}Q$$

$$\downarrow S_1 I_{12}Q - P_{12}^d S_1 I_1(+\partial_2)I_{12}Q - B(\bar{p}_{12}^d - p_{12}^d)S_1 I_1(+\partial_2)I_{12}Q.$$

$$s_1 I_{12}Q - A_2(-\partial_1)s_1 I_{12}Q - A_1^s(+\partial_2)s_1 I_{12}Q$$

$$\downarrow \sum C_{\beta, s_{\beta}} I_{12}Q + \sum C_{\beta, P_{12}^d s_{\beta}} I_1(+\partial_2)I_{12}Q - \sum C_{\beta, A_2(-\partial_1)s_{\beta}} I_{12}Q$$

$$p_1 I_{12}Q_1 - A_2'(-\partial_1)p_1 I_{12}Q_1 - A_1^p(+\partial_2)p_1 I_{12}Q_1$$

$$\downarrow -P_1 I_{12}Q_1 + P_1 A_2'(-\partial_1)I_{12}Q_1 - P_1 P_{12}^{d1} I_1(+\partial_2)I_{12}Q_1 - B(\bar{p}_1 - p_1)P_{12}^{d1} I_1(+\partial_2)I_{12}Q_1$$

$$I_{12}Q_1 - A_2'(-\partial_1)I_{12}Q_1 - A_1^1(+\partial_2)I_{12}Q_1$$

ゆえに、 $I_{12}Q - A_2(-\partial_1)I_{12}Q - A_1(+\partial_2)I_{12}Q$ は

$I_{12}Q_1 - A_2'(-\partial_1)I_{12}Q_1 - A_1^1(+\partial_2)I_{12}Q_1$ とホモログである。

同様に、 $I_{12}Q_1 - A_2'(-\partial_1)I_{12}Q_1 - A_1^1(+\partial_2)I_{12}Q_1$ は

$I_{12}Q_{12} - A_2(-\partial_1)I_{12}Q_{12} - A_1(+\partial_2)I_{12}Q_{12}$ とホモログであることが示される。一方、

$$I_{12}Q - A_2(-\partial_1)I_{12}Q - A_1(+\partial_2)I_{12}Q$$

$$\downarrow \begin{aligned} & P_{12} I_{12}Q - P_1^d A_2(+\partial_1)I_{12}Q - P_2^d A_1(+\partial_2)I_{12}Q \\ & + B(\bar{p}_{12} - p_{12})I_{12}Q - B(\bar{p}_1^d - p_1^d)A_2(-\partial_1)I_{12}Q - B(\bar{p}_2^d - p_2^d)A_1(+\partial_2)I_{12}Q \end{aligned}$$

$$p_{12} I_{12}Q - A_2(-\partial_1)p_{12} I_{12}Q - A_1(+\partial_2)p_{12} I_{12}Q$$

により, $I_{12}Q - A_2(-\partial_1)I_{12}Q - A_1(+\partial_2)I_{12}Q$ は
 $p_{12}I_{12}Q - A_2(-\partial_1)p_{12}I_{12}Q - A_1(+\partial_2)p_{12}I_{12}Q =$
 $Q - A_2(-\partial_1)Q - A_1(+\partial_2)Q + I_{12}Q_{12} - A_2(-\partial_1)I_{12}Q_{12} - A_1(+\partial_2)I_{12}Q_{12}$
 とホモロークである。ゆえに $Q - A_2(-\partial_1)Q - A_1(+\partial_2)Q$ は
 零にホモロークである。

§ 9.

前節の計算から $2(r+1) \leq n$ のとき, $H_2(B\overline{\text{Diff}}^c \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0$
 が証明できる。

$Q: [0, 1]^2 \rightarrow \text{Diff}^c \mathbb{R}^n$ で, $\max\{t_1, t_2\} = t$ のとき,

$$Q(t_1, t_2) = \tau(t), \quad \tau: [0, 1] \rightarrow \text{Diff}^c \mathbb{R}^n$$

c は定値写像

となるものとする。 $\partial_1 Q = \partial_2 Q = \tau - c$ となり, Q は
 輪体である。しかし, この Q は $C_2(B\overline{\text{Diff}}^c \mathbb{R}^n)$ においては
 零である。この Q に対し, $Q - A_2(-\partial_1)Q - A_1(+\partial_2)Q \hookrightarrow 0$ と
 いうことは, $A_2(\tau - c) - A_1(\tau - c) \hookrightarrow 0$ を意味する。

$c^2: \Delta^2 \rightarrow \text{Diff}^c \mathbb{R}^n$ を定値写像とすると, $A_1(c) - c^2$ は
 輪体となるが, A_1 の定義により $A_1(c) - c^2 = -\partial \sum C_p, c^2$ とな
 ることがわかる。 $A_2(c) - c^2$ についても同様である。ゆえに
 $A_2\tau - A_1\tau$ は零にホモロークである。

以上により, V に台をもつ特異立方体のなす複体を
 $Q_*(B\overline{\text{Diff}}^c \mathbb{R}^n)$ と書けば, 次の図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & Q_1(BD; H_c^r \mathbb{R}^n) & \xleftarrow{\partial} & Q_2(BD; H_c^r \mathbb{R}^n) & \xleftarrow{\partial} & Q_3(BD; H_c^r \mathbb{R}^n) \\
& & \downarrow i & \searrow A_1 & \downarrow i & \searrow D & \downarrow i \\
\mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & C_1(BD; H_c^r \mathbb{R}^n) & \xleftarrow{\partial} & C_2(BD; H_c^r \mathbb{R}^n) & \xleftarrow{\partial} & C_3(BD; H_c^r \mathbb{R}^n)
\end{array}$$

ここで $i_1 = \partial A_1$,
 $i_2 = \partial D + A_1 \partial$.

ゆえにこの複体の2次元ホモロジーまでに誘導される写像は自明である。 $C_2(BD; H_c^r \mathbb{R}^n)$ の2次元輪体は $Q_2(BD; H_c^r \mathbb{R}^n)$ の2次元輪体にホモログであるから、 $H_2(BD; H_c^r \mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = 0$ となる。

§ 10.

我々の定理の $r=1$ の場合も同様の構成による証明である。このときは第6節の半群の作用のかわりに、Denjoy-Pixtonの $\mathbb{Z}^N$ 作用をつかう。

ここで述べた証明は3次元以上のホモロジーの計算の場合に拡張できるように思われる。