

12

双曲型方程式の混合問題における
Localization Theorem について

京大・工 松村 睦豪

まえがき

近年 L. Hörmander により一般な偏微分方程式の distribution solution の singular support に関する研究がすすめられてゐるが^{*} (例えば [6] を見よ) Atiyah, Bott, Gårding はその idea をとり入れ自由空間における定数係数の双曲型作用素に対する Cauchy 問題の基本解の singular support に関し所謂 Localization Theorem を得た。これは Atiyah, Bott, Gårding による労作 [1] の中では極めて初等的な一定理に過ぎないがその idea や方法は非常に興味深いように思われる。

この報告の目的は定数係数の双曲型作用素に対する quarter-space における混合問題の反射波の singular support に関し対応する Localization Theorem を与えることである。

^{*} hyperfunction solution については Sato, Kawai and Kashiwara による研究がある。これについては例えば M. Sato [7] 参照

§ 1. 双曲型作用素の基本解と Localization Theorem

$\mathbb{R}^n$ を n 次元 Euclid 空間としその点を $x = (x_1, \dots, x_n)$ 等で表わす. また $\mathbb{C}^n$ を n 次元複素数空間としその点を $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 等で表わす. $\mathbb{C}^n$ は $x \cdot \xi = \langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ により $\mathbb{R}^n$ の複素双対空間と見做される. 特に $\mathbb{C}^n$ の実ベクトルの全体を $\mathbb{R}^n$ で表わすと $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の実双対空間となる. 文字の節約の爲 x_1 で時間変数を $x_2, \dots, x_n$ で空間変数を表わすことにし $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ $x'' = (x_2, \dots, x_n)$ なる記法を用いる. $\mathbb{C}^n$ 或いは $\mathbb{R}^n$ の点 ξ に対しても同様の記法を用いることにする. また $\mathbb{R}_+^n$ で半空間 $\{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$ を表わす. 微分記号については $D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ を用いる.

さて $P(\xi)$ を Garding の意味で $\nu = (1, 0, \dots, 0)$ に関し双曲的な多項式としよう. すなわち $P(\xi)$ は次の2つの条件を満足するものとする.

(1.1) $P_m(\nu) \neq 0$, ここで P_m は P の主部を表わす.

(1.2) 適当な実数 ϵ_0 が存在し, $\text{Im} t < \epsilon_0$ なる任意の複素数 t と $\forall \xi \in \mathbb{C}^n$ に対し $P(\xi + t\nu) \neq 0$ が成り立つ.

このとき P の主部 P_m はまた ν に関し双曲多項式となり P_m の斉次性から $P_m(\xi + t\nu) = 0$ の根 $t = t(\xi)$ は $\forall \xi \in \mathbb{C}^n$ に対しすべて実数となることがわかる. そこで実超曲面 $\{\xi; P_m(\xi) = 0, \xi \in \mathbb{C}^n\}$ を考えこれを $\mathbb{R}_\infty A$ で表わす. そして $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}_\infty A$ の連結成分

のうち $\mathcal{V}$ を含むものを $\Gamma = \Gamma(A, \mathcal{V})$ と記すと Γ は open convex cone となることが証明される. Γ の dual cone $\Gamma' = \{x \in \mathbb{R}^n; x \cdot \xi \geq 0, \xi \in \Gamma\}$ を $K = K(A, \mathcal{V})$ で表わし propagation cone と呼ぶ.

双曲多項式 $P(\xi)$ から $\xi \rightarrow 0$ なる置き換えによって得られる微分作用素 $P(D)$ は propagation cone K 内にその support が含まれる基本解 $E(x)$; $P(D)E(x) = \delta(x)$ をもつ. 実際そのような $E(x)$ は P^{-1} の distribution の意味での逆 Fourier-Laplace transform として

$$(1.3) \quad E(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i x(\xi + i\eta)} P(\xi + i\eta)^{-1} d\xi, \quad \eta \in -\mathcal{V} - \Gamma, \quad \eta \text{ は十分大}$$

で与えられ $\text{supp } E$ の closed convex hull は K に一致する. また逆に定数係数の微分作用素 $P(D)$ が open half-space $\{x; x \cdot \mathcal{V} > 0\}$ に原点を除いて含まれるような closed convex cone に support が含まれる基本解をもつとき $P(D)$ の特性多項式 $P(\xi)$ は $\mathcal{V}$ に関し双曲的となりその基本解は (1.3) で定義される $E(x)$ と一致する. $E(x)$ は $P(D)$ の未来に対する Cauchy 問題

$$(1.4) \quad P(D)E(x) = 0, \quad x_1 > 0,$$

$$(1.5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} E(0, x'') = 0, \quad k_1 = 0, 1, \dots, m-2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m-1} E(0, x'') = \delta(x''),$$

の解であり, しはしは $P(D)$ の未来に対する Cauchy 問題の基本解或いは Riemann 函数, Gruen 函数と呼ばれる.

さて $E(x)$ に対する Localization Theorem を述べる為には [1] に

従って多項式の localization の概念を導入する。

定義 $P(\xi)$ を次数 $m \geq 0$ の多項式とし $t^m P(t^{-1}\xi + \xi_0)$ を t の昇中の順に展開する。

$$(1.6) \quad t^m P(t^{-1}\xi + \xi_0) = t^p P_\xi(\xi_0) + O(t^{p+1}).$$

そのとき係数は ξ_0 の多項式となるが、 ξ_0 について恒等的には 0 とおられない最初の係数を $P_\xi(\xi_0)$ で表わし P の点 ξ_0 における localization と呼ぶ。又次数 p は ξ_0 の P に関する multiplicity と呼ばれ $m_{\xi_0}(P)$ で表わされる。

$P_m(\xi) \neq 0$ のとき P の ξ_0 における localization は $P_\xi(\xi_0) = P_m(\xi_0)$ と 0 でない定数となり興味がない。 $P_m(\xi) = 0$ で $\text{grad } P_m(\xi) \neq 0$ のとき $P_\xi(\xi_0) = \text{grad } P_m(\xi_0) \cdot \xi_0 + P_{m-1}(\xi_0)$ となる。 $P(\xi)$ が ν に関し双曲的るとき real point ξ_0 における localization $P_\xi(\xi_0)$ もまた ν に関し双曲的となり $P_\xi(\xi_0)$ の主部は $P(\xi)$ の主部 $P_m(\xi)$ の ξ_0 における localization と一致することが証明される。実超曲面 $\{\xi_0 : (P_m)_\xi(\xi_0) = 0\}$ を $R_0 A_\xi$ で表わし $R_0 A$ の ξ_0 における real tangent cone と呼ぶ。 $P_\xi(\xi_0)$ は ν 方向に双曲的だから $\Gamma_\xi = \Gamma(A_\xi, \nu)$ $K_\xi = \Gamma'_\xi$ が定義される。また $P_\xi(\xi_0)$ に対応する基本解

$$(1.7) \quad (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} P_\xi(\xi + i\eta)^{-1} e^{ix(\xi + i\eta)} d\xi, \quad \eta \in -\delta\nu - i\Gamma_\xi$$

が存在するが、これを $E_\xi(x)$ で表わし $E(x)$ の ξ_0 における localization と呼ぶ。勿論 $\text{supp } E_\xi(x) \subset K_\xi$ である。

さてこのとき次の定理が成り立つ。

Localization Theorem (Atiyah-Bott-Gårding)

$$t \rightarrow \infty \text{ のとき } t^{m-p} e^{-itx\xi} E(x) \rightarrow E_\xi(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

であり

$$\xi \neq 0 \implies \text{supp } E_\xi \subset \text{sing supp } E$$

が成り立つ.

§2. 混合問題に対する Riemann or Green 函数

$P(D)$ を $\nu = (1, 0, \dots, 0)$ に対し双曲的な作用素とし $B_j(D)$, $j=1, \dots, l$ をそれぞれ階数 m_j の境界作用素としよう. 吾々は超平面 $x_n = 0$ は $P(D)$ および $B_j(D)$ に対し non-characteristic であることを仮定しよう. すなわち $P(\xi)$ の ξ_n^m の係数および $B_j(\xi)$ の $\xi_n^{m_j}$ の係数は 0 でない定数とする. $y = (0, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ として次の混合問題の解 $G(x, y)$ を考えよう.

$$(2.1) \quad P(D_x) G(x, y) = 0, \quad x_1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$(2.2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{h_i} G(0, x'', y) = 0, \quad h_i = 0, 1, \dots, m_i - 2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m-1} G(0, x'', y) = \delta(x'' - y''),$$

$$(2.3) \quad B_j(D_x) G(x, y) \Big|_{x_n=0} = 0, \quad j=1, \dots, l.$$

ここで境界条件の数は決まってしまう. この解 $G(x, y)$ は空間 $\{x'' = (x_2, \dots, x_n); x_n > 0\}$ の点によってその位置が表わされ, 状態が $P(D)$ と境界条件 $B_j(D)$ によって支配される媒質において点 $x'' = y''$ に加えられた単位衝撃 $\delta(x'' - y'')$ による波動の伝播を記述するものと解釈される.

吾々は $G(x, y)$ を自由空間 $\{x'' = (x_2, \dots, x_n)\}$ の点 $x'' = y''$ に加えられた単位衝撃による incident or primary waves と考えられる $E(x-y)$ ($y = (0, y'')$) を用い

$$(2.4) \quad G(x, y) = E(x-y) - F(x, y)$$

なる形で求める。 $F(x, y)$ は $E(x-y)$ が境界 $x_n = 0$ 上に induce する影響を相殺せねばならぬから混合問題

$$(2.5) \quad P(D_x) F(x, y) = 0, \quad x_1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$(2.6) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k F(0, x'', y) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$(2.7) \quad B_j(D_x) F(x, y) \Big|_{x_n=0} = B_j(D_x) E(x-y) \Big|_{x_n=0}.$$

の解として求められる。補正函数と呼ばれる $F(x, y)$ は境界条件 $B_j(D)$ に因り境界で反射される反射波を表わすものと解釈される。また $G(x, y)$ は齊次境界条件をもつ混合問題の Riemann or Green 函数と考えよう。それは混合問題

$$(2.8) \quad P(D_x) u(x) = f(x), \quad x_1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$(2.9) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k u(0, x'') = g_k(x'') \in C_0^\infty(\{x'' = (x_2, \dots, x_n); x_n > 0\})$$

$$(2.10) \quad B_j(D) u(x) \Big|_{x_n=0} = 0, \quad j = 1, \dots, l$$

の解 $u(x)$ が $G(x, y)$ を用い

$$(2.11) \quad \begin{aligned} u(x) = & \int G(x, y) u_{m-1}(y'') dy'' + \int \frac{\partial G}{\partial x_1}(x, y) u_{m-2}(y'') dy'' \\ & + \dots + \int \frac{\partial^{m-1} G}{\partial x_1^{m-1}}(x, y) u_0(y'') dy'' \\ & + \int_0^{x_1} d\tau \int G(x_1 - \tau, x'', y) f(\tau, y'') dy'', \end{aligned}$$

なる形で与えられるからである。ただし、ここで

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad & u_0 = g_0(x''), \\
 & u_1 = g_1(x'') - \int \frac{\partial^m G}{\partial x_1^m}(0, x'', y) g_0(y'') dy'', \\
 & u_2 = g_2(x'') - \int \frac{\partial^{m+1} G}{\partial x_1^{m+1}}(0, x'', y) g_0(y'') dy'' - \int \frac{\partial^m G}{\partial x_1^m}(0, x'', y) g_1(y'') dy'' \\
 & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
 \end{aligned}$$

とする。境界上に波動力の source があるとき、すなわち非斉次境界条件

$$(2.10)' \quad B_j(D) u(x) \Big|_{x_n=0} = h_j(x') \in C_0^\infty(\{x' = (x_1, \dots, x_{n-1}), x_1 > 0\})$$

の場合の解 $u(x)$ は

$$(2.13) \quad P(D_x) F_i(x, y') = 0, \quad x_1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$(2.14) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k F_i(0, x'', y') = 0, \quad k=0, 1, \dots, m-1$$

$$(2.15) \quad B_j(D_x) F_i(x, y') \Big|_{x_n=0} = \delta_{ji} \delta(x' - y'), \quad j=1, \dots, l$$

の解、即ち Poisson kernels $F_i(x, y')$, $i=1, \dots, l$ を用い (2.11)

の右辺に

$$(2.16) \quad \sum_{i=1}^l \int F_i(x, y') h_j(y') dy',$$

なる項をつけ加えることにより得られる。 F_i の構成も F のそれと同様であるが、吾々はこの報告では $F(x, y)$ に限ることにする。

さて $F(x, y)$ を構成する為には、以下に形式的な議論を行う。(2.3)より

$$\begin{aligned}
 (2.17) \quad B_j(D_x) E(x-y) \Big|_{x_n=0} &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x'-y')(\xi'+i\eta')-iy_n(\xi_n+i\eta_n)} \\
 &\quad \times \frac{B_j(\xi+i\eta)}{P(\xi+i\eta)} d\xi,
 \end{aligned}$$

を得る。従って (2.5), (2.7) において x' について partial Fourier-Laplace transform を行くと

$$(2.18) \quad P(\xi' + i\eta', D_n) \hat{F}(\xi' + i\eta', x_n, y) = 0, \quad x_n > 0,$$

$$(2.19) \quad B_j(\xi' + i\eta', D_n) \hat{F}(\xi' + i\eta', x_n, y) \Big|_{x_n=0} \\ = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(\xi' + i\eta')} \frac{B_j(\xi' + i\eta')}{P(\xi' + i\eta')} d\xi_n,$$

となる。これは parameters を含む常微分方程式の境界値問題に他ならない。この解の表示式を求める為、若干の代数的な準備をする。

§3. 代数的準備

吾々は $F(x, y)$ を $\hat{F}(\xi' + i\eta', x_n, y)$ の逆 Fourier-Laplace 像として得る為、問題 (2.18)-(2.19) の $\{x_n; x_n > 0\}$ における temperate solution を問題にする。その為まず ξ' を parameter とする、 λ についての代数方程式

$$(3.1) \quad P(\xi', \lambda) = 0, \quad \xi' \in \mathbb{C}^n,$$

の根についての考察を行う。

補助定理 ([1], 132 頁)

$P(\xi)$ を $\eta \in \mathbb{R}^n$ に対し双曲的な多項式とする。従ってある負でない実数 δ_0 で $\text{Im } \lambda < -\delta_0$ なる任意の複素数 λ と $\forall \xi \in \mathbb{C}^n$ に対し $P(\xi + \lambda \eta) \neq 0$ となるものがある。このとき

$$\forall \xi \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda < -\delta_0, \text{Im } t \leq 0, \forall \eta \in \Gamma \text{ に対し}$$

$$(3.2) \quad P(\xi + t\eta + \lambda \eta) \neq 0$$

が成り立つ。 P が homogeneous のとき $\delta_0 = 0$ ととれる。即ち

$$\forall \xi \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda < 0, \text{Im } t \leq 0, \forall \eta \in \Gamma \text{ に対し}$$

$$(3.2)' \quad P(\xi + t\eta + \lambda \eta) \neq 0$$

が成り立つ。

$\Gamma_0 = \{\xi'; (\xi', 0) \in \Gamma\}$ とおく。このとき (3.2) より λ についての方程式 $P(\xi', \lambda) = 0$ は $\xi' \in \mathbb{C}^{n-1} - i\alpha\vartheta' - i\Gamma_0$ ($\alpha > \alpha_0$) のとき実根をもたないことがわかる。従って $P(\xi', \lambda) = 0$ の虚部が正の根および負の根の数 (勿論重複する場合にはその重複度もこめて算える) は $\xi' \in \mathbb{C}^{n-1} - i\alpha\vartheta' - i\Gamma_0$ ($\alpha > \alpha_0$) なるときそれぞれ一定である。そこで前者の個数を l とする。この数 l が混合問題で要求される境界条件の個数となる。虚部が正の根を $\lambda_1(\xi')$, $\dots, \lambda_l(\xi')$ で負の根を $\lambda_{l+1}(\xi')$, $\dots, \lambda_m(\xi')$ で表わし

$$(3.3) \quad P^+ = P^+(\xi', \lambda) = P_m(0, 1) \prod_{k=1}^l (\lambda - \lambda_k(\xi')),$$

とおく。 λ の多項式 $P^+(0, \lambda)$ の係数は $\lambda_1(\xi'), \dots, \lambda_l(\xi')$ の基本対称式であるから領域 $\mathbb{C}^{n-1} - i\alpha\vartheta' - i\Gamma_0$ ($\alpha > \alpha_0$) において ξ' の解析関数である。次に μ についての方程式 $P_m(\xi', \mu) = 0$ の根を $\mu_k(\xi')$, $k=1, \dots, m$ で表わす。このとき

$$(3.4) \quad t^{-m} P(t\xi', t\mu) \longrightarrow P_m(\xi', \mu), \quad t \rightarrow \infty,$$

なる関係に注意すると $\{\mu_k(\xi')\}$ の番号を適当につけかえると

$$(3.5) \quad t \rightarrow \infty \text{ のとき } t^{-1} \lambda_k(t\xi') \longrightarrow \mu_k(\xi'), \quad k=1, \dots, m,$$

が成り立つことがわかる。さきの補助定理より $\xi' \in \mathbb{C}^{n-1} - i\Gamma_0$ のとき方程式 $P_m(\xi', \mu) = 0$ は実根をもたず、従って虚部が正および負である根の数はそれぞれ一定となる。(3.5) より

$$(3.6) \quad \operatorname{Im} \mu_k(\xi') > 0, \quad k=1, \dots, l, \quad \operatorname{Im} \mu_k(\xi') < 0, \quad k=l+1, \dots, m.$$

であることがわかる。

$$(3.3)' \quad P_m^+ = P_m^+(\xi', \mu) = P_m(0, 1) \prod_{k=1}^l (\mu - \mu_k(\xi'))$$

と置く。 $P^+(\xi', \lambda) = 0$ および $P_m^+(\xi', \mu) = 0$ の判別式をそれぞれ $D(P^+)(\xi')$, $D(P_m^+)(\xi')$ で表わそう:

$$(3.7) \quad D(P^+)(\xi') = P_m(0, 1)^{2m-2} \prod_{i>k} (\lambda_i(\xi') - \lambda_k(\xi'))^2,$$

$$(3.7)' \quad D(P_m^+)(\xi') = P_m(0, 1)^{2m-2} \prod_{i>k} (\mu_i(\xi') - \mu_k(\xi'))^2.$$

そのとき $D(P_m^+)(\xi')$ は $\mathbb{C}^{n-1-i}(\Gamma_0 \cup \{0\})$ に連続的に拡張される。

次に system $\{P, B_j\}$ に対する Lopatinski determinant を

$$(3.8) \quad R(\xi') = R(P^+, B_1, \dots, B_\ell) = \frac{\det(B_j(\xi', \lambda_k(\xi')))}{\prod_{i>k} (\lambda_i(\xi') - \lambda_k(\xi'))},$$

で定義する。同様に $\{P_m, B_j^0\}$ に対する Lopatinski determinant は

$$(3.8)' \quad R^0(\xi') = R(P_m^+, B_1^0, \dots, B_\ell^0) = \frac{\det(B_j^0(\xi', \mu_k(\xi')))}{\prod_{i>k} (\mu_i(\xi') - \mu_k(\xi'))},$$

で定義される。ここで $B_j^0(D)$ は $B_j(D)$ の主部を表わす。

$\det(B_j(\xi', \lambda_k)) / \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k)$ は indeterminates $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ につ

いての対称式で係数は ξ' の多項式である。従って $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$

の基本対称式で表わされしかも係数は ξ' の多項式となる。これ

より $R(\xi')$ が領域 $\mathbb{C}^{n-1-i} \delta \vartheta - i\Gamma_0$ ($\delta > \delta_0$) で ξ' の解析函

数であることが従う。同様な理由により $R^0(\xi')$ は領域 $\mathbb{C}^{n-1-i}\Gamma_0$

で解析的であり $\mathbb{C}^{n-1-i}(\Gamma_0 \cup \{0\})$ に連続的に拡張される。

さて吾々は以後 Shapiro-Lopatinski 条件

$$(3.9) \quad R(\xi') \neq 0 \quad \text{for} \quad \xi' \in \mathbb{C}^{n-1-i} \delta \vartheta - i\Gamma_0 \quad (\delta > \delta_0)$$

δ_0 は十分大

を仮定しよう。^{*} これは楕円型境界値問題でよく知られているように complementary or cover condition と呼ばれる次の条件と同値である。

“各 $\xi' \in \Xi^{n-1-i\delta} - i\Gamma_0$ を固定する毎に λ の多項式 $B_j(\xi', \lambda)$, $j=1, \dots, l$ は $P^+(\xi', \lambda)$ を modulo として一次独立である”

更に吾々は

$$(3.9)' \quad R^c(\xi') \neq 0 \quad \text{for } 0 \neq \xi' \in \{\xi'; \xi \in \text{Re } A\}$$

を仮定する。吾々はまた $R_j(x_n, \xi') \in D(P^+)(\xi') \neq 0$ なる $\xi' \in \Xi^{n-1-i\delta} - i\Gamma_0$ に対しては

$$(3.10) \quad R_j(x_n, \xi') = R(P^+, B_1, \dots, B_{j-1}, e^{i\lambda x_n}, B_{j+1}, \dots, B_l)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} B_1(\xi', \lambda_1(\xi')) & \dots & B_l(\xi', \lambda_l(\xi')) \\ e^{i\lambda_1(\xi')x_n} & \dots & e^{i\lambda_l(\xi')x_n} \\ B_l(\xi', \lambda_1(\xi')) & \dots & B_l(\xi', \lambda_l(\xi')) \end{vmatrix}}{\prod_{i>j} (\lambda_i(\xi') - \lambda_j(\xi'))} \quad (j)$$

でその他の $\xi' \in \Xi^{n-1-i\delta} - i\Gamma_0$ に対しては連続性によって定義する。

§4. system $\{P, B_j\}$ に対する反射波 $F(x, y)$ と Localization Theorem

(2.18) (2.19) の temperate solution $\hat{F}(\xi + i\eta', x_n, y)$ は各 $\xi' \in \Xi^{n-1}$

^{*} Localization Theorem を得る為には

$$R(\xi') \neq 0 \quad \text{for } \xi' \in \Xi^{n-1-i\delta}, \delta > \delta_0. \quad (\delta_0 \text{ は十分大})$$

を仮定すれば十分である。

$\eta \in -\delta\eta - \Gamma$ (δ は十分大とす), $(\eta', 0) \in \Gamma$ に対し

$$\hat{F}(\xi' + i\eta', x_n, y) = (2\pi)^{-1} \sum_{j=1}^l \frac{R_j(x_n, \xi' + i\eta')}{R(\xi' + i\eta')} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(\xi' + i\eta')} \frac{B_j(\xi' + i\eta')}{P(\xi' + i\eta')} d\xi_n$$

と表わされる。従って形式的に

$$(4.1) \quad F(x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{j=1}^l \frac{R_j(x_n, \xi' + i\eta')}{R(\xi' + i\eta')} e^{i(x' - y')(\xi' + i\eta')} \\ \times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy_n(\xi_n + i\eta_n)} \frac{B_j(\xi' + i\eta')}{P(\xi' + i\eta')} d\xi_n \right\} d\xi'$$

を得る。よって $\eta \in -\delta\eta - \Gamma$ (δ は十分大) で $(\eta', 0) \in \Gamma$ とす。

もし $m_j < m$ ならば (4.1) は y を parameter とする x の distribution となる。しかし localization theorem を得る為には $F(x, y)$ を $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ に関する distribution 即ち kernel と考えねばならぬ。

$$(4.2) \quad \langle F(x, y), \check{\rho}(x') \psi(x_n) \otimes q(y') h(y_n) \rangle \\ = (2\pi)^{-n} \int \sum_{j=1}^l \frac{R_j(x_n, \xi' + i\eta')}{R(\xi' + i\eta')} e^{-iy'(\xi' + i\eta')} \hat{\rho}(\xi' + i\eta') \psi(x_n) q(y') \\ \times \left\{ \int e^{-iy_n(\xi_n + i\eta_n)} \frac{B_j(\xi' + i\eta')}{P(\xi' + i\eta')} h(y_n) d\xi_n dy_n \right\} d\xi' dx_n dy', \\ \rho, q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}), \check{\rho}(x') = \rho(-x'), \psi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^1), h \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1).$$

この式は意味をもつ。実際 ξ_n についての積分は $\{ \quad \}$ の中で y_n に関し部分積分を何回か行えば収束する。また ξ' についての積分も収束する。それは $\hat{\rho}(\xi' + i\eta')$ が ξ' の急減少函数であり一方 ξ' についての他の被積分函数は Seidenberg の定理を用いれば $|\xi'| \rightarrow \infty$ のとき $|\xi'|$ のある次数中の order

でしか増大しないことがわかるからである。吾々は (4.2) に
よって reflected Riemann kernel を定義する。

さて $\det(B_j^0(\xi', \mu_k(\xi')))$ を $\Delta(\xi')$ でその (j, k) -cofactor を
 $\Delta_{jk}(\xi')$ で表わそう。 $D(P_m^+)(\xi') \neq 0$ なる real ξ' に対し δ を
十分小さな正の数として

$$(4.3) \quad d_k(\xi') = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - \mu_k(\xi')| = \delta} \frac{z \left\{ P_m(\xi', z) \frac{\partial P_{m-1}(\xi', z)}{\partial z} - \frac{\partial P_m(\xi', z)}{\partial z} P_{m-1}(\xi', z) \right\}}{P(\xi', z)^2} dz,$$

と置き $D(P_m^+)(\xi') \neq 0$ なる $0 \neq \xi' \in \operatorname{Re} A$ に対し 点 ξ における
 $F(x, y)$ の localization を $\mu_k(\xi')$ ($1 \leq k \leq l$) が real のとき

$$(4.4) \quad F_{\xi, k}(x, y) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^l \frac{\Delta_{jk}(\xi')}{\Delta(\xi')} e^{i d_k(\xi') x_n} B_j^0(\xi) \\ \times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x' - y' + x_n \operatorname{grad} \mu_k(\xi')) \cdot (\zeta + i\eta)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iy_n(\zeta_n + i\eta_n)}}{P_{\xi}(\zeta + i\eta)} d\zeta_n \right\} d\zeta',$$

で定義し, $\mu_k(\xi')$ が real でないとき k は 0 と定める。こゝで P_{ξ} は
多項式 P の ξ における localization である。

このとき次の定理が成り立つ。

Localization Theorem

$\xi \neq 0$ を $\xi \in \operatorname{Re} A$ で $D(P_m^+)(\xi') \neq 0$ なる点とし $p = m_{\xi}(P)$
を ξ の P に関する multiplicity とする。そのとき $\mu_k(\xi')$ ($1 \leq k \leq l$)
が real ならば

$$(4.5) \quad t \rightarrow \infty \text{ のとき } t^{p+m} e^{-it \{ (x'-y') \xi'_1 + x_n \mu_h(\xi'_1) - y_n \xi_n \}} F(x, y) \\ \longrightarrow F_{\xi, h}(x, y) \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n)$$

および

$$(4.6) \quad \supp_{(x, y)} F_{\xi, h} \subset \text{sing} \supp_{(x, y)} F$$

が成り立つ。要は

$$(4.7) \quad \supp_{(x, y)} F_{\xi, h} \subset \{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n ; y = (0, y_1, \dots, y_n), \\ [x' - y' + x_n \text{grad}_{\xi'} \mu_h(\xi'_1)] \cdot \zeta' - y_n \zeta_n \geq 0, \zeta \in \Gamma_{\xi} \}$$

である。

References

- [1] Atiyah, M.F., Bott, R. and Gårding, L. : Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, Acta Math. 124, 109-189 (1970)
- [2] Deakin, A.S. : Singularities of the reflected Riemann matrix, Jour. of Math. and Mech. 17, 279-298 (1967)
- [3] Duff, G.F.D. : On wave fronts, and boundary waves, Comm. Pure Appl. Math. 17, 189-225 (1964).
- [4] Hersh, R. : Boundary conditions for equations of evolution, Arch. Rational Mech. Anal. 16, 243-264 (1964).
- [5] Hörmander, L. : On the regularity of the solutions of boundary problems, Acta Math. 99, 225-264 (1958).
- [6] Hörmander, L. : On the singularities of solutions of partial differential equations, Proc. Int. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, 1969, Math. soc. of Japan 31-40 (1970), C.P.A.M., 23, 329-358 (1970).
- [7] Sato, M. : Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations, Technical Report, RIMS-82 (1971).