

High-energy behavior of total cross sections for 3-body quantum systems

京大・理 伊藤 宏 (Hiroshi Ito)

序 3体 Schrödinger 方程式の全散乱断面積の高エネルギーでの挙動を考える。始状態において, 粒子1,2 が束縛状態をつくり, その複合粒子に残りの粒子 (粒子3) が衝突してくるとしよう。終状態として次の3つの場合が考えられる。

- (i) 始状態のときとは異なるペアが複合粒子をつくり, 他の粒子と独立に運動する。
- (ii) 始状態のときと同じペア (粒子1,2) が束縛状態をつくり (束縛エネルギーは変化しているかもしれない), 残りの粒子と独立に運動する。
- (iii) 3個すべて独立に運動する。

始状態を α , 終状態を β で表わそう。 $\lambda > 0$, $\omega \in S^2$ を各々系の全エネルギー, 入射方向とする。散乱 $\alpha \rightarrow \beta$ に対する全散乱断面積 $\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \omega)$ の $\lambda \rightarrow +\infty$ における挙動を調べる

ことが我々の目的である。得られた結果を粗く述べると次のようになる。ただし、各 pair potential は十分滑らかで、十分速く遠方で decay しているものとする。

$\lambda \rightarrow +\infty$ のとき、

$$\beta \text{ が (i) の場合 } T_{\lambda \rightarrow \beta} = O(\lambda^{-L}), \quad L \gg 1,$$

$$\beta \text{ が (ii), (iii) の場合 } T_{\lambda \rightarrow \beta} = O(\lambda^{-1}).$$

§1 Notations, Results

$m_j > 0$, $r_j \in \mathbb{R}^N$ ($1 \leq j \leq 3$, $N \geq 3$) を各々粒子 j の質量および位置ベクトル。 $V_{ij}(r_i - r_j)$ を粒子 i - j 間の pair potential とする。 V_{ij} ($1 \leq i < j \leq 3$) に次の仮定をおく。ただし、 $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ または $\ell = 3/2$ とする。

$$(V)_\ell \left\{ \begin{array}{l} V_{ij} \in C^{2\ell+2}(\mathbb{R}^N), \text{ real} \\ \exists \delta > \ell + \frac{N+1}{2} \text{ s.t. } |\partial_x^\alpha V_{ij}(x)| \leq C \langle x \rangle^{-\delta}, |\alpha| \leq 2\ell+2 \\ \text{ここで } \langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}. \end{array} \right.$$

2-cluster 分解全体を A_2 で表わす：

$$A_2 = \{a = \{(i, j), k\} \mid \{(i, j), k\} = \{1, 2, 3\}, i < j\}.$$

$a = \{(i, j), k\} \in A_2$ に対して、Jacobi 座標 $(x_a, y_a) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ を

$$x_a = r_i - r_j, \quad y_a = r_k - \frac{m_i r_i + m_j r_j}{m_i + m_j}$$

で定義する。重心系で考えたこの系の Hamiltonian H は、この座標系を用いると

$$H = H_0 + V \quad \text{in } \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{2N}),$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m_a} \Delta_{x_a} - \frac{1}{2m_a} \Delta_{y_a}, \quad V = \sum_{1 \leq p < q \leq 3} V_{ij}(r_p - r_q),$$

とかける。ここに、 m_a, n_a は $m_a^{-1} = m_i^{-1} + m_j^{-1}$, $n_a^{-1} = m_k^{-1} + (m_i + m_j)^{-1}$ で定義される換算質量である。

$A = \{(i, j), k\}$ とするとき、粒子 i と粒子 j の 2 体 Schrödinger 作用素は、

$$h_a = -\frac{1}{2m_a} \Delta_{x_a} + V_{ij}(x_a) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N)$$

で与えられる。いま、 d_a を h_a の負の固有値の個数 (重複も数えて) とし、

$$\Gamma_2 = \{\alpha = (a, k) \mid a \in A_2, k = 1, \dots, d_a\}$$

とおく。 $\alpha = (a, k)$ は h_a の k 番目の固有状態を表わしており、2-body channel と呼ばれる。 $\alpha = (a, k)$ に対し、 λ_α で h_a の k 番目の固有値 (< 0)、 ψ_α で対応する固有ベクトルを表わす。ただし、 $a \in A_2$ を固定したとき、

$\{\psi_\alpha\}_{D(\alpha)=a}$ は ONS をなしているものとする。ここで、 $\alpha = (a, k)$ のとき、 $D(\alpha) = a$ とかいた。

各 $\alpha \in \mathcal{P}_2$ ($\alpha = D(a)$) に対し, channel Hamiltonian H_α , channel identification operator $J_\alpha: L^2(\mathbb{R}_{y_a}^N) \rightarrow \mathcal{H}$ を

$$H_\alpha = \lambda_\alpha - \frac{1}{2m_a} \Delta_{y_a}, \quad J_\alpha u = \psi_\alpha \otimes u$$

で定義する。さて, 仮定 $(V)_0$ のもと, 次の channel wave operator $W_\alpha^\pm: L^2(\mathbb{R}_{y_a}^N) \rightarrow \mathcal{H}$ の存在が知られている (例えば [RS]) :

$$W_\alpha^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} J_\alpha e^{-itH_\alpha},$$

さらに, 3-body channel に対する channel wave operator $W_0^\pm: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ の存在も知られている ([RS]) :

$$W_0^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}.$$

いま, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 \cup \{0\}$ とおく。散乱 $\alpha \rightarrow \beta$ に対応する scattering operator $S_{\alpha \rightarrow \beta}$ は

$$S_{\alpha \rightarrow \beta} = W_\beta^{+*} W_\alpha^- \quad (\alpha, \beta \in \mathcal{P})$$

で定義される。scattering operator は, 次の性質を持つ:

$$e^{-itH_\beta} S_{\alpha \rightarrow \beta} = S_{\alpha \rightarrow \beta} e^{-itH_\alpha}.$$

このことから, H_α, H_β のスペクトル表現を用いることによって, $S_{\alpha \rightarrow \beta}$ は, direct integral で表現できることがわか

る。例えば, $\alpha \in \Gamma_2$ のとき, ユニタリ作用素 $Z_\alpha: L^2(\mathbb{R}_{y_\alpha}^N)$
 $\rightarrow L^2((\lambda_\alpha, \infty); L^2(S^{N-1}))$ を

$$(Z_\alpha f)(\lambda, \omega) = n_\alpha^{\frac{1}{2}} \mu_\alpha^{\frac{N-2}{2}} \hat{f}(\mu_\alpha \omega), \quad \alpha = D(\lambda)$$

$$\mu_\alpha = (2m_\alpha(\lambda - \lambda_\alpha))^{1/2},$$

で定義する。ただし, $\hat{\cdot}$ は Fourier 変換。すると, $\alpha, \beta \in \Gamma_2$
 のときは, a.e. $\lambda > \lambda_{\alpha\beta} := \max(\lambda_\alpha, \lambda_\beta)$ で定義された $L^2(S^{N-1})$
 上の有界作用素の族 $\{S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda)\}$ が存在して,

$$Z_\beta S_{\alpha \rightarrow \beta} Z_\alpha^* = \int_{\lambda > \lambda_{\alpha\beta}}^{\oplus} S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda) d\lambda$$

となる。 $S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda)$ は scattering matrix と呼ばれている。

同様に $\beta = 0$ の場合も ($\alpha \in \Gamma_2$), scattering matrix $S_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda):$
 $L^2(S^{N-1}) \rightarrow L^2(S^{2N-1})$ の存在がわかる。

以下, $\alpha \in \Gamma_2, \beta \in \Gamma$ とする。

まず, $\beta \in \Gamma_2$ のときの $S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda)$ の性質をまとめておく。

$\left\{ \begin{array}{l} S_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda) - \delta_{\alpha\beta} \text{ (} \delta_{\alpha\beta} \text{ は Kronecker's delta) は, Hilbert-Schmidt (H-S) norm で連続であり, その積分核を } T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \theta, \omega) \text{ とする} \\ \text{と } T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \cdot, \omega) \text{ は } L^2(S^{N-1})\text{-値関数として } (\lambda, \omega) \in (0, \infty) \times S^{N-1} \\ \text{に関して強連続である。} \end{array} \right.$

上の事実は, $\alpha, \beta \in \Gamma_2$ のときには, 2体 Schrödinger 方程式

の散乱の場合と同様にして, $T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \theta, \omega)$ の表現が得られるので確かめることができる。また, この表現が我々の解析の出発点となる。

次に $S_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda)$ について述べる。そのために, 次の条件を追加する。

$$(Z) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall a = \{(i, j), k\} \in A_2 \text{ に對して, } -1 \notin \sigma_p(\hat{h}_a), \text{ ここに} \\ \hat{h}_a = V_{ij}^{1/2} \left(-\frac{1}{2m_a} \Delta_{x_a} - 0 - i0 \right)^{-1} |V_{ij}|^{1/2} \\ (f^{1/2} = |f|^{1/2} \operatorname{sgn} f) \end{array} \right.$$

この仮定のもと, $\hat{h}_a$ は 0 を固有値として持たないことが知られている (例えば [GM])。

$$\left\{ \begin{array}{l} (V)_0, (Z) \text{ を仮定すると } S_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda) \text{ は } \lambda \gg 1 \text{ において H-S} \\ \text{norm で連続であり, その積分核を } T_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda, \theta, \omega) \text{ とす} \\ \text{ると } T_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda, \cdot, \omega) \text{ は } L^2(S^{N-1})\text{-値関数として, } (\lambda, \omega) \in \\ (0, \infty) \times S^2 \text{ に関して強連続である。} \end{array} \right.$$

このことは, Faddeev の方法を用いて確かめることができる ([AJS], [AS])。

さて, ここで total scattering cross section (全散乱断面積) の定義を与えよう。

(I) $\alpha \in \Gamma_2$, $\beta \in \Gamma$ ($D(\alpha) = \alpha$) のとき,

$$\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \omega) = (2\pi)^{N-1} \mu_{\alpha}^{1-N} \int_{S^{\beta}} |T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \theta, \omega)|^2 d\theta$$

を散乱 $\alpha \rightarrow \beta$ に対する全散乱断面積と呼ぶ。ここに, λ は系の全エネルギー, ω は入射方向, また

$$S^{\beta} = \begin{cases} S^{N-1} & \beta \in \Gamma^2 \\ S^{2N-1} & \beta = 0 \end{cases}$$

とする。ただし, $\beta \in \Gamma_2$ のときは $(V)_0$ を, $\beta = 0$ のときは, $(V)_0$ と (2) を仮定しているものとする。

(II) $\alpha \in \Gamma_2$ のとき

$$\sigma_{\alpha}(\lambda, \omega) = \sum_{\beta \in \Gamma} \sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda, \omega)$$

を始状態が α である散乱に対する全散乱断面積と呼ぶ。ここに, $(V)_0$, (2) を仮定しているものとする。

$\alpha = \{(i, j), k\} \in A_2$ に対して, intercluster potential I_{α} を $I_{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}) = V - V_{ij}(x_{\alpha})$ で定義し, $\omega \in S^{N-1}$, $\eta \in \Pi_{\omega} := \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid \xi \cdot \omega = 0\}$ に対して,

$$W_{\alpha}(x_{\alpha}; \omega, \eta) = \int_{\mathbb{R}} I_{\alpha}(x_{\alpha}, t\omega + \eta) dt$$

とおく。また, $(\cdot, \cdot)_{\alpha}$, $\|\cdot\|_{\alpha}$ で $L^2(\mathbb{R}^N_{x_{\alpha}})$ における内積および norm を表わす。

Theorem 1 $\alpha \in \mathbb{R}_2$, $D(\alpha) = a$ とする。 $\nu > 0$ に對し

$$\lambda(\nu) = \frac{1}{2} n_a \nu^2 + \lambda_\alpha$$

と置く。

(i) $(V)_\ell$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を仮定。 $\beta \in \mathbb{R}_2$, $D(\beta) \neq a$

$$(1) \Rightarrow \sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(\nu), \omega) = O(\nu^{-2\ell-4}), \quad \nu \rightarrow +\infty$$

(ii) $(V)_0$ を仮定。 $\beta \in \mathbb{R}_2$, $D(\beta) = a$

$$(2) \Rightarrow \sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(\nu), \omega) = \nu^{-2} \int_{\pi_\omega} |W_a(\cdot; \omega, \eta) \psi_\alpha, \psi_\beta|_a|^2 d\eta + o(\nu^{-2}).$$

(iii) $(V)_0$, (Z) を仮定。

$$(3) \Rightarrow \sigma_{\alpha \rightarrow 0}(\lambda(\nu), \omega) = \nu^{-2} \int_{\pi_\omega} \|P^{\text{cont}}(h_a) W_a(\cdot; \omega, \eta) \psi_\alpha\|_a^2 d\eta + o(\nu^{-2}),$$

$$(4) \quad \sigma_\alpha(\lambda(\nu), \omega) = \nu^{-2} \int_{\pi_\omega} \|W_a(\cdot; \omega, \eta) \psi_\alpha\|_a^2 d\eta + o(\nu^{-2}),$$

(1) ~ (4) がすべて $\omega \in S^{N-1}$ に関して一様。

Theorem 2 上の定理で (ii) および (iii) における仮定 $(V)_0$

を $(V)_{3/2}$ にすると, (2), (3), (4) における remainder term $o(\nu^{-2})$ はすべて $O(\nu^{-3})$ とすることができる。

§2. Resolvent estimates

$\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して次の仮定を $(U)_\ell$ と呼ぶ.

$$(U)_\ell \quad \begin{cases} V_{ij} \in C^{2\ell+2}(\mathbb{R}^3) \\ |\partial^\alpha V_{ij}(x)| \leq C \langle x \rangle^{\min(|\alpha|, \ell+2)}, \quad |\alpha| \leq 2\ell+2. \end{cases}$$

($N \geq 3$ より) $(V)_\ell \Rightarrow (U)_\ell$.)

$v > 0, \omega \in S^{N-1}$ に対して.

$$\begin{aligned} L(v, \omega) &= v^{-1}(H - \lambda_\alpha) - i\omega \cdot \nabla_{y_\alpha} \\ &= e^{-i\alpha v \omega \cdot y_\alpha} v^{-1}(H - \lambda(v)) e^{i\alpha v \omega \cdot y_\alpha} \end{aligned}$$

とおく. $k, S \in \mathbb{R}$ に対して, 関数空間 H_S^k と

$$H_S^k = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N}) \mid \|f\|_{k,S} = \|\langle x_\alpha, y_\alpha \rangle^S (-\Delta + 1)^{k/2} f\| < \infty \}$$

とおく. ここに, $\langle x, y \rangle = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$, $\Delta = \Delta_{x_\alpha} + \Delta_{y_\alpha}$.

Proposition 3 (i) $(U)_\ell$ を仮定. k integer, S real

$0 \leq k \leq \ell$, $k + \frac{1}{2} < S$ とする. このとき,

$$(5) \quad \exists (L(v, \omega) - i0)^{-1} := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (L(v, \omega) - i\varepsilon)^{-1} \text{ in } B_{k,S},$$

ここで $B_{k,S} = B(H_S^k, H_{-S}^k)$, さらに

$$(6) \quad \sup_{v \geq 1, \omega \in S^{N-1}} \|(L(v, \omega) - i0)^{-1}\|_{B_{k,S}} < \infty.$$

(ii) $(U)_1$ を仮定.

$$(7) \Rightarrow \| (L(v, \omega) - i0)^{-1} - (-i\omega \cdot \nabla_{y_a} - i0)^{-1} \|_{B(H^s_2, H^{-s}_2)} = O(v^{-1}),$$

as $v \rightarrow \infty$, uniformly in $\omega \in S^{n-1}$

詳細は省略しますが, この Proposition の証明について少しだけ述べます。

$$X = \langle x_a, y_a \rangle, \quad D = (\partial_{x_a}, \partial_{y_a}), \quad L = L(v, \omega) \quad \text{とおく.}$$

(6) を示すために,

$$(8) \quad X^{-s} D^{\alpha} (L - i\varepsilon)^{-1} \langle D \rangle^{-k} X^{-s}, \quad |\alpha| \leq k, \quad \varepsilon > 0,$$

の形の作用素の norm を評価しなければならぬ。いま, D^{α} を $(L - i\varepsilon)^{-1}$ の右に移すことを考え, さらに resolvent eq.

$$(L - i\varepsilon)^{-1} = (L - i)^{-1} + i(\varepsilon - 1)(L - i\varepsilon)^{-1}(L - i)^{-1}$$

を用いると $([D, (L - i\varepsilon)^{-1}] = -v^{-1}(L - i\varepsilon)^{-1}[D, V](L - i\varepsilon)^{-1})$ より

$$(9) \quad X^{-s} A_1 (L - i\varepsilon)^{-1} A_2 (L - i\varepsilon)^{-1} \cdots A_{m-1} (L - i\varepsilon)^{-1} A_m X^{-s}$$

の形の作用素を評価すればよいことがわかる。ここに, 各 A_j は $D^{\alpha} V_{ij}$ と $(L - i)^{-1}$ の有限個の積である。(9) の評価は Jensen-Mourre-Perry ([JMP]) による multiple commutator method を用いて証明することができる。同じタイプの評価は [I1] でもなされています。

§3. 定理の証明の方針 (詳しくは [I2])

3.1. (1) の証明について ($D(\alpha) \neq D(\beta)$)

$v' > 0$ を $\lambda(v) = \frac{1}{2} m_b v'^2 + \lambda_\beta$, $D(\beta) = \ell$ となるように定める。このとき, $T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(v), \theta, \omega)$ は

$$\begin{aligned} & T_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(v), \theta, \omega) \\ (10) \quad & = C(v) \left([-I_a + v' I_b (L(v, \omega) - i0)^{-1} I_a] \psi_\alpha, e^{i m_b v' \theta \cdot y_b - i m_a v \omega \cdot y_a} \right) \\ & C(v) = i (2\pi)^{-N+1} (m_a m_b)^{\frac{N-1}{2}} (v v')^{\frac{N-2}{2}}, \end{aligned}$$

となる。

$a \neq \ell$ より, $y_a = m x_a + n y_b$, $m \neq 0$ 。よって,

$$e^{i m_b v' \theta \cdot y_b - i m_a v \omega \cdot y_a} = e^{-i n_a m v \omega \cdot x_b} \times e^{i \cdots y_b}.$$

従って, (10) の右辺の積分を x_b で部分積分することによって (1) を得ることが出来る。ただし, ここで, Proposition 3 (i) を用いる。

3.2. (2) の証明について ($D(\alpha) = D(\beta)$)

$E_\beta := J_\beta J_\beta^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ とおく。このとき, $T_{\alpha \rightarrow \beta}$ は次のように表現することができる。

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{T}_{\alpha \rightarrow \beta}(\lambda(v), \omega) \\
 (11) \quad &= 2v^{-2} \operatorname{Im} (E_{\beta}(L(v, \omega) - i0)^{-1} I_a \psi_{\alpha}, I_a \psi_{\alpha}) \\
 &+ 2v^{-3} \operatorname{Im} (E_{\beta} I_b (L(v, \omega) - i0)^{-1} I_a \psi_{\alpha}, (L(v, \omega) - i0)^{-1} I_a \psi_{\alpha}).
 \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
 & (L(v, \omega) - i\varepsilon)^{-1} - (-i\omega \cdot \nabla_{y_a} - i\varepsilon)^{-1} \\
 &= -v^{-1} (L(v, \omega) - i\varepsilon)^{-1} (H - \lambda_{\alpha}) (-i\omega \cdot \nabla_{y_a} - i\varepsilon)^{-1}, \quad \varepsilon > 0
 \end{aligned}$$

と Proposition 3 (i) ($k=0$) を用いると, $S > 1/2$ のとき,

$$(12) \quad \| (L(v, \omega) - i0)^{-1} - (-i\omega \cdot \nabla_{y_a} - i0)^{-1} I_a \psi_{\alpha} \|_{H^0_3} = o(1), \quad v \rightarrow \infty,$$

を得る。(2) は, (11) と (12) を使って示すことができる。

3.3 (4) の証明について.

仮定 (V)₀, (I2) のもと, 各 h_c ($c \in A_2$) は, 負の固有値以外の固有値を持たない。従って, 漸近完全性 ([E]) は

$$\mathcal{H}_{ac}(H) = \sum_{\beta \in T} \oplus \operatorname{Range} W_{\beta}^{\pm}$$

を意味する。このことから, 光学定理と呼ばれる次の定理が示される。

Theorem 4 $\alpha \in \mathbb{P}_2$, (V)₀, (2) を仮定.

$$(3) \Rightarrow \sigma_\alpha(\lambda, \omega) = -2(2\pi)^{N-1} \mu_\alpha^{1-N} \operatorname{Re} T_{\alpha \rightarrow \alpha}(\lambda, \omega, \omega)$$

for $\omega \in S^2$, $\lambda \gg 1$.

この定理と (12) を用いて, (4) が示される.

3.4. (3) の証明について

仮定 (V)₀, (2) のもと, $\sigma_{\alpha \rightarrow 0} = \sigma_\alpha - \sum_{\beta \neq 0} \sigma_{\alpha \rightarrow \beta}$ だから,
(1), (2), (4) を用いて, (3) が示される.

References

- [Ag] S. Agmon, Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations, Princeton, Princeton University Press, 1982.
- [ABG] W. O. Amrein, A. M. Berthier, V. Georgescu, On Mourre's approach to spectral theory, *Helv. Phys. Acta.*, 62 (1989), 1-20.
- [AJS] W. O. Amrein, J. M. Jauch, K. B. Sinha, Scattering theory in quantum mechanics, Benjamin, Reading, 1977.
- [APS] W. O. Amrein, D. B. Pearson, K. B. Sinha, Bounds on the total scattering cross-section for N-body systems, *Nuovo Cimento*, 52 (1979), 115-131.
- [AS] W. O. Amrein, K. B. Sinha, On three-body scattering cross sections, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 15 (1982), 1567-1586.
- [CFKS] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [E] V. Enss, "Quantum scattering theory of two-and three-body systems with potentials of short and long range" in *Schrödinger operators*, ed. S. Graffi, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1159, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.
- [ES] V. Enss, B. Simon, Finite total cross sections in non-relativistic quantum mechanics, *Comm. Math. Phys.*, 76 (1980), 177-209.
- [GM] J. Ginibre, M. Moulin, Hilbert space approach to the quantum mechanical three body problem, *Ann. Inst. H. Poincaré*, A 21

(1974), 97-145.

- [Ha] G. A. Hagedorn, Born series for $(2 \text{ cluster}) \rightarrow (2 \text{ cluster})$
Scattering of two, three, and four particle Schrödinger operators,
Comm. Math. Phys., 66 (1979), 77-94.
- [I1] H. T. Ito, Charge transfer model and $(2 \text{ cluster}) \rightarrow (2 \text{ cluster})$
three-body scattering, J. Math. Kyoto Univ., (to appear).
- [I2] H. T. Ito, High-energy behavior of total scattering cross
sections for 3-body quantum systems
- [IT] H. T. Ito, H. Tamura, Semi-classical asymptotics for total
scattering cross sections of 3-body systems, J. Math. Kyoto Univ.,
(to appear).
- [J] A. Jensen, Propagation estimates for Schrödinger-type operators,
Trans. AMS, 291 (1985), 129-144.
- [JMP] A. Jensen, E. Mourre, P. A. Perry, Multiple commutator estimates
and resolvent smoothness in quantum scattering theory, Ann. Inst.
H. Poincaré A, 41 (1984), 207-225.
- [M] E. Mourre, Absence of singular continuous spectrum for certain
selfadjoint operators, Comm. Math. phys., 78 (1981), 391-408.
- [PSS] P. Perry, I. M. Sigal, B. Simon, Spectral analysis of N-body
Schrödinger operators, Ann. Math., 114 (1981), 519-567.
- [RS] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics. III,
IV, Academic Press, 1978, 1979.
- [T] H. Tamura, Principle of limiting absorption for N-body Schrödinger
operators, -a remark on the commutator methods, Lett. in Math.
Phys., (1989), 17, 31-36.