

純代数的立場から見た fusion algebras

九大・理 坂内英一 (Eiichi Bannai)

§0. はじめに

Fusion algebra は conformal field theory に付随してあらわれる複素数体上の有限次の可換・結合的代数であるが、ここではそのような代数も純代数的立場から考察してみようと思う。すなわち、出発点にある物理 (conformal field theory) も全く考えないで、fusion algebra がみたすような代数的条件をみたす複素数体上の有限次の可換・結合的な代数を考えてみようというわけである。私自身物理に関しては全く無知であり、代数的なレベルでしか考えることが出来ないこともその一つの原因ですが、一方で fusion algebra が代数的には私の今まで研究してきた association schemes と非常に似ているということから、それとの関連を明らかにしたいと思ったことが、この考察も始めた動機です。またこのことは、九大での阿野俊夫氏の主催するセミナーに出席して色々と触発されたことにも負っています。

この原稿の内容は次の通りです。 §1.1 で fusion algebra の

性質をみたす純代数的な概念として、fusion algebra at algebraic level と (私が後に) 呼ぶものを定義します。これが fusion algebra の代数的な公理化として best のものであるかは議論の余地があるかもしれないと思います。§1.2 では (多分この記事の読者にはあまりなじみがないと思うので) association scheme についての簡単な解説をします。更に association scheme に付随した Bose-Mesner algebra (Hecke algebra) を純代数的レベルで考えた Bose-Mesner algebra at alg. level というものを考え、§1.3 でこれが先に定義した fusion algebra at alg. level と自然に 1:1 に対応することを示します。更に^(§1.4 で)この対応を用いて、(物理における) fusion algebra に対して存在する行列 S が unitary かつ 対称であるということが、代数的レベルでは association scheme (又は B-M alg. at alg. level) のどのような条件に对应するか、またこれと関連して Verlinde の '公式' と呼ばれる公式がどのように解釈されるかについて述べます。(物理における) fusion algebra では行列 S が unitary かつ 対称であることは定理であり、Verlinde の '公式' も定理ですが、一般の fusion algebra at alg. level ではこのことは成り立たず、従って Verlinde などによるこのような定理の証明は物理的要請に基づいた証明であり、代数的レベルでは証明出来ないことを明らかにします。§2 では、§1.3 で述べた fusion alg. at alg. level と B-M alg. at alg. level の 1:1 対

底を用いて, association schemes から出発して integral でかつ $S = \text{unitary}$ かつ $S' = \text{対称}$, とする fusion algebra を見つけようとする色々の試みについて述べます。更にその中で,

modular invariance property: $\exists T = \text{diagonal 行列, s.t.}$
 $(ST)^3 = S^2$, を満たすものを見つけたうとする試み, 更に
 (必ずしも integral でない) fusion algebra at alg. level α 中に
 modular invariance property を持つものが存在すること (特に
 Hamming association schemes $H(d, q)$ に対して存在すること) を
 述べます。

§1.1. Fusion algebras at algebraic level

Fusion algebra の性質を取り出した純代数的な概念を定義する。

定義. (Fusion algebras at algebraic level)

不定元 $x_0, x_1, \dots, x_d$ を basis とし, 乗法

$$x_i x_j = \sum_{k=0}^d N_{ij}^k x_k$$

により定義される可換・結合的な $\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathcal{O} = \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$
 で次の条件 (i) ~ (iv) を満たすものを fusion algebra at alg. level
 とよぶ。

(i) $N_{ij}^k \in \mathbb{R}$, $N_{ij}^k \geq 0$,

(ii) $\exists \text{ bijection } \wedge : \{0, 1, \dots, d\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, d\}$ satisfying

$$(a) \hat{\hat{i}} = i$$

$$(b) N_{ij}^{\hat{k}} = N_{ij}^k$$

(c) if we define $N_{ijk} = N_{ij}^{\hat{k}}$, then N_{ijk} is symmetric in i, j, k (for $\forall i, j, k$).

$$(iii) N_{0j}^k = \delta_{jk} \text{ (i.e., } x_0 = \text{identity) for } \forall i, j,$$

$$(iv) \exists \text{ a linear rep. of } \mathcal{O} = \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle \text{ with } x_i \mapsto \sqrt{k_i} \text{ with } k_i > 0 \text{ for all } i.$$

(注: 物理に与ける fusion algebra としては (i)' $N_{ij}^k \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ が基本的である。(i) より強い (i)' を与えたものを integral fusion algebra at alg. level とよぶことにする。)

(注: 物理に与える fusion algebra の代数的公理化として何が best であるかはまだ色々と議論がある、としかいえないと思う。上の条件 (iv) は fusion algebra に与える $\delta_0^i > 0$ for $\forall i$ に入れず。 (i) の $N_{ij}^k \geq 0$ の条件は代数的立場からあまり本質的でないのかもかもしれない。出来れば物理の分かって方に、どのような条件を fusion algebra at alg. level の定義とすべきか について御意見をいただきたいと思います。多分、後述すべきことからわかるように、他の条件をいくつか加える必要があるかもかもしれないと思います。)

例 1. $G = \text{any finite group.}$

$\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_d = \text{all the irreducible characters of } G$

$$\chi_i \otimes \chi_j = \sum_{k=0}^d N_{ij}^k \chi_k \quad (N_{ij}^k \in \mathbb{N}) \text{ と } \exists \text{ する。}$$

この時、 $\chi_i \chi_j = \sum_{k=0}^d N_{ij}^k \chi_k$ とおくと $\mathcal{A} = \langle \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_d \rangle$

は integral な fusion algebra at alg. level である。

(注: $\chi_i^\wedge = \overline{\chi_i}$ $\because \overline{\cdot}$ は complex conjugate,

$$\begin{aligned} N_{ijk} &= N_{ij}^{\widehat{k}} = (\chi_i \otimes \chi_j, \chi_k^\wedge) \\ &= (\chi_i \otimes \chi_j \otimes \chi_k, \chi_0) \text{ と } \forall i, j, k \text{ は} \end{aligned}$$

i, j, k に関して symmetric, $\sqrt{k_i} = \chi_i(1)$ とする。)

例 2. 他の興味深い例としては Lusztig [7] (および [4] 参照)

により、任意の有限群 G に対して、 G の共役類とその

代表元の中心化群の既約指標の組を basis とし (乗法をうまく

定義して) integral な fusion algebra (at algebraic level)

が出来る。(特別な群 G に対してはこの fusion algebra の

Fourier 変換が有限 Chevalley 群の既約指標の決定の最後の部

分に本質的に使われている。)

§ 1.2. Association scheme と Bose-Mesner algebra. および

Bose-Mesner algebra at algebraic level

Association scheme とは 次のように定義される組合せ論的な対象である。詳しくは文献 [2] を参照されたい。

定義 (Association scheme)

X = 有限集合. $R_i (i=0, 1, \dots, d)$ が X の上の関係 (i.e., $R_i \subset X \times X$) が次の条件 (i) ~ (iv) をみたす時, X と R_i 達の組 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ は association scheme とよぶ。

- (i) $R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}$,
- (ii) $X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d$, $R_i \cap R_j = \emptyset$ if $i \neq j$,
- (iii) $\forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$ に $\exists \tau \subset \tau^t R_i = \{(y, x) \mid (x, y) \in R_i\}$ と定義する τ と $\tau^t R_i = R_j$ for some $j \in \{0, 1, \dots, d\}$

- (iv) $\forall i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\}$ に $\exists \tau \subset \tau$
 $\# \{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}$
 は $(x, y) \in R_k$ のとき τ x, y の τ y によって τ x, y の τ y によって一定の数 $(= p_{ij}^k)$ である。

定義 (隣接行列と Bose-Mesner algebra)

関係 R_i に τ τ 隣接行列 $A_i \in A_i$ とおく。また A_i の行、列は X の τ τ parametrize される。

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{if } (x, y) \in R_i \\ 0 & \text{if } (x, y) \notin R_i \end{cases}$$

$A_0, A_1, \dots, A_d$ で生成される $(|X| \times |X|)$ の完全行列環 $\mathcal{M}$ の subalgebra $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ は association scheme $\mathcal{X}$ の Bose-Mesner algebra (また Hecke algebra) とよぶ。

注: Bose-Mesner algebra は半単純な algebra である。

$\mathcal{A}$ が可換な algebra である association scheme $\mathcal{X}$ を可換な association scheme とよぶ。 ($\mathcal{X}$ = 可換 $\iff A_i A_j = A_j A_i$ for $\forall i, j \iff p_{ij}^k = p_{ji}^k$ for $\forall i, j, k$)

例 3. 群 G が有限集合 X の上に可移に働いているとする。

G の $X \times X$ の G の orbits $\mathcal{O}_0 = \{(x, x) \mid x \in X\}, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_d$ と

する。 $(x, y) \in R_i \stackrel{\text{def}}{\iff} (x, y) \in \mathcal{O}_i$ と定義する。

$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ は association scheme を作る。更に $\mathcal{X}$

が可換であるための必要十分条件は G の X の上の置換表現が multiplicity-free (すなわち同値な固有表現の直和となる) となることである。このとき、なにか $\mathcal{X}$ の multiplicity-free な置換表現の例が存在する。

例 4. (Group association scheme)

$G = \text{any finite group}$

$\mathcal{C}_0 = \{1\}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_d$ は G の共役類全体とし。

$X = G$, $(x, y) \in R_i \stackrel{\text{def}}{\iff} yx^{-1} \in \mathcal{C}_i$ と定義する。

$\mathcal{X}(G) = (G, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ は可換な association scheme である。

($\mathcal{X}(G)$ の Bose-Mesner algebra $\mathcal{A} \cong \mathbb{Z}[\mathbb{C}G]$.) [この例は $G \times G$

が G に可移に作用している例の特別な場合ともみなせる。]

以下の厚稿では association scheme という時は可換なもののことを考えることにする。Association scheme の Bose-Mesner algebra $\mathcal{Q} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ は可換な半単純な次数 $d+1$ の $\mathbb{C}$ 上の algebra であり、丁度 $d+1$ 個の原始巾等元 $E_0, E_1, \dots, E_d$ が (集合として) 一意的に定まる。この時、 $\circ$ は Hadamard 積 (行列の entry-wise の積) とする。

$$(IX|E_i) \circ (IX|E_j) = \sum_{k=0}^d q_{ij}^k (IX|E_k)$$

とあり $q_{ij}^k \in \mathbb{R}$ が存在し、 $q_{ij}^k \geq 0$ とあり (Krein condition)。

また、 $\mathcal{Q}$ の 2 つの bases $A_0, A_1, \dots, A_d$ と $E_0, E_1, \dots, E_d$ の変換行列 $P \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$ の指標表 (1st eigenmatrix) とよぶ。すなわち、

$$(A_0, A_1, \dots, A_d) = (E_0, E_1, \dots, E_d) \cdot P$$

であり、更に

$$(IX|E_0, IX|E_1, \dots, IX|E_d) = (A_0, A_1, \dots, A_d) Q$$

とありかつ、従って $PQ = QP = IX|I$ 。

さて、Bose-Mesner algebra は association scheme という組合せ論的実体の存在のみに存在したが、それを系代数的性質を抽出して得られた概念を次に定義する。

定義 (Bose-Mesner algebra at algebraic level)

不定元 $x_0, x_1, \dots, x_d \in \text{basis}$ とし、乗法

$$x_i x_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k x_k$$

により定義される可換・結合的な $\mathbb{C}$ の代数 $\mathcal{O} = \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$ が次の条件 (i) ~ (iv) を満たす時, $\mathcal{O}$ は Bose-Mesner algebra at alg. level とよぶ。

- (i) $p_{ij}^k \in \mathbb{R}, p_{ij}^k \geq 0,$
- (ii) $\exists$ bijection $\wedge : \{0, 1, \dots, d\} \rightarrow \{0, 1, \dots, d\}$ satisfying
 - (a) $\widehat{\widehat{i}} = i$
 - (b) $p_{\widehat{i}\widehat{j}}^{\widehat{k}} = p_{ij}^k$
- (iii) $p_{0j}^k = \delta_{jk}$ (i.e., $x_0 = \text{identity}$)
- (iv) $p_{ij}^k = \delta_{ij}^{\wedge} k_i$ with $k_i > 0$ (for k_i) 2 つあり.
 map $x_i \mapsto k_i$ ($i=0, 1, \dots, d$) は $\mathcal{O} = \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$ の一次元 (i.e., linear な) 表現を与える。

(注: この概念は本質的に Y. Kawada [5] (1942) ([2, §2.5] も参照) によつて character algebra と呼ばれるものである。

character algebra では $p_{ij}^k \in \mathbb{R}$ のみを仮定し, $p_{ij}^k \geq 0$ は仮定しない。従つて, Bose-Mesner alg. at alg. level は character algebra with non-negative type とも言えるものである。)

さて, association scheme から 2 通りの方法で Bose-Mesner algebra at alg. level が得られることを述べる。

例 5 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ は association scheme (必ずしも X は常に可換であるとは仮定しない)。

$$A_i \cdot A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k$$

$$(1X(E_i) \circ (1X(E_j)) = \sum_{k=0}^d q_{ij}^k (1X(E_k)) \quad \text{と} \quad \text{する。}$$

この時、

(a) $x_i x_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k x_k$ は Bose-Mesner algebra (at algebraic level) である。

(b) $x_i x_j = \sum_{k=0}^d q_{ij}^k x_k$ は Bose-Mesner algebra (at algebraic level) である。 ($m_i = \text{rank } E_i$ の B-M alg. at alg. level の定義の k_i に代える。) とする。

§ 1.3. Fusion alg. at alg. level と Bose-Mesner alg. at alg. level の間の対応

次の定理を述べる。

定理 A. Fusion algebras at alg. level と Bose-Mesner algebras at alg. level の間に自然な 1:1 対応が存在する。

(証明) $\mathcal{A} = \langle x_0, x_1, \dots, x_d \rangle$, $x_i x_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k x_k$ は B-M alg. at alg. level とする。この時

$$N_{ij}^k = \sqrt{\frac{k_k}{k_i k_j}} p_{ij}^k$$

と定義し、(新しい不定元 $x_0, x_1, \dots, x_d$ に代えて)

$x_i x_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k x_k$ と定義したものは fusion algebra at alg. level になる。逆に、 $p_{ij}^k = \sqrt{\frac{k_i k_j}{k_k}} N_{ij}^k$ となる

ことにより、fusion alg. at alg. level から B-M alg. at alg. level が出来る。

[もちろん、この対応により、integral という性質は保たれない。この association scheme (又は B-M alg. at alg. level) から integral な fusion algebra が生まれるかは、またこの fusion algebra (at alg. level) に対して対応する association scheme が存在するかは、意味ある問題であると思う。]

定理 A による対応の具体例、一つを次で見よう。

$\mathcal{K}(G)$ を group association scheme とする。この B-M alg の E_i は χ_i (G の既約指標) と 1:1 に対応する。(更にこの時 $m_i = \chi_i(1)^2$ となる。) この時、 $x_i x_j = \sum_{k=0}^d q_{ij}^k x_k$ で定義された例 5 (b) (§1.2) の B-M algs. at alg. level と例 1 (§1.1) の (integral な) fusion algebras at alg. level とが定理 A の 1:1 対応により対応している。

§ 1.4. 行列 S の対称性と Verlinde の公式

物理に与えられた fusion algebra に対しては、次のことが成り立つことが良く知られている。

$$N_i \stackrel{\text{def}}{=} (N_{ij}^k)_{\substack{0 \leq j \leq d \\ 0 \leq k \leq d}} \text{ と与える時. } \exists S = (S_i^j) \text{ satisfying}$$

$$S^{-1} N_i S = \begin{pmatrix} \lambda_i^{(0)} & & & 0 \\ & \lambda_i^{(1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i^{(d)} \end{pmatrix}$$

$$\text{with } \lambda_i^{(j)} = \frac{S_i^j}{S_0^j} \quad (\text{for } \forall i).$$

(注: このような行列 S は任意の fusion alg. at alg. level に対しても存在することが容易に示される。) また、次のことが Verlinde により示されている。

(Verlinde の公式)

$$N_{ij}^k = \sum_{n=0}^d \frac{S_i^n S_j^n \overline{S_n^k}}{S_0^n} \quad \text{--- (I)}$$

一方、association scheme の B-M algebra に対しては次のことが成り立つことが良く知られている。([2, Chap 2] 参照)。

$$B_i \stackrel{\text{def}}{=} (p_{ij}^k)_{\substack{0 \leq j \leq d \\ 0 \leq k \leq d}} \text{ と与える時. } \exists P = (P_{ij}) \text{ satisfying}$$

$$P^{-1} B_i P = \begin{pmatrix} P_{0i} & & 0 \\ & P_{1i} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & P_{di} \end{pmatrix} \quad (\text{for } b_i)$$

(注: このような P は任意の B-M alg. at alg. level に於いても存在することが容易に示される。この行列 P はこの座標の §1.2 で出てきた κ の指標表と一致している。) またこの時

$$P_{ij}^k = \frac{1}{|X| \cdot k_k} \cdot \sum_{\nu=0}^d P_{\nu i} P_{\nu j} \overline{P}_{\nu k} m_{\nu} \quad \text{--- (II)}$$

が成り立つことが良く知られている。(c.f. [2], [5].) (注:

(II) 式は B-M alg. at alg. level に於いても成り立つ。) また、

定理 A の 1:1 対応により、fusion alg. at alg. level の行列 S と B-M alg. at alg. level の行列 P とは関連している筈である。事実、次が成り立つ。

命題 B.

$$S = \frac{1}{\sqrt{|X|}} \begin{pmatrix} \sqrt{k_0} & & 0 \\ & \sqrt{k_1} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \sqrt{k_d} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k_0}} & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{k_1}} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{1}{\sqrt{k_d}} \end{pmatrix}$$

(ここで $|X| \stackrel{\text{def}}{=} k_0 + k_1 + \cdots + k_d$).

定理 A の 1:1 対応から (II) に自然に対応する式が存在する筈で、それが (I) に与えてあると考えるのは自然であり、私も始めはそうであったと考えていた。しかし、実際は、定理 A (および命題 B) の対応を用いて (II) から得られる式は、

$$N_{ij}^k = \sum_{n=0}^d \frac{S_i^n S_j^n \bar{S}_k^n}{S_0^n} \cdot \frac{m_n}{k_n} \quad \text{--- (I)'}$$

であり、(I) とは異なる。

更に次が成り立つ。

定理 C. (1) $S = \text{unitary} \iff k_i = m_i \quad (\text{for } \forall_i)$
 (2) $S = {}^t S \iff P = \overline{Q}$

(注: 上の左辺の行列 S は fusion alg. at alg. level のそれであり、 k_i, m_i, P, Q 等は定理 A に与えられた B-M alg. at alg. level の対応するものである。 $P = \overline{Q}$ を満たす association scheme (又は B-M alg. at alg. level) を self-dual であるという。これは $p_{ij}^k = q_{ij}^k$ を満たす。 §1.5 (§1.2) で作り、2通りの B-M algebras at alg. level が一致するといえる。 (ただし一般に $p_{ij}^k = q_{ij}^k$ が $P = \overline{Q}$ を満たすかどうかは未解決である。))

このことから, fusion alg. at alg. level の行列 S が何時 unitary または対称であるかは (対称 $\Rightarrow$ unitary は成り立つ), association scheme (B-M. alg) の良く知られた概念で特徴づけられたわけである。一方, Verlinde は物理に於ける fusion algebra では (I) が成り立つ従って S は常に unitary かつ対称になることを証明している。良く知られているように, self-dual でない association schemes はいくつでも存在する。このことは fusion alg at alg. level では $S = \text{unitary}$ かつ対称および Verlinde の公理 (I) は一般に成り立たず, 従って Verlinde の公理 (I) の証明は物理的条件を用いた証明であることを示している。

[$S = {}^t S$ ならば 公理 (I) = 公理 (I)' は成り立つ。この逆も成り立つ, と思う。]

§ 2.1. Fusion algebras の新しい例を見出すことについて

さて, 我々は, 定理 A の 1:1 対応を用いて, association schemes から出発して, B-M alg, B-M. algebra at alg. level を経由して, 新しい integral な fusion algebra at alg. level を作れるかということを考えた。畢竟色んな例が作れる。その中でも特に性質:

(1) $S = \text{unitary}$ and ${}^t S = S$ (${}^t S = S \Rightarrow S = \text{unitary}$ は成り立つ) を満たすものが群に見つけ出したものであり。(物理的には ${}^t S = S$ が要請されていると見られる。) また、この (物理に於ける) fusion algebra が持つ性質:

(2) (modular invariance property):

$\exists T = \text{対角行列 s.t. } (ST)^3 = T^2$ (かつ $S^4 = I$) を満たすものが見つかるか不更に望ましいと考える。

初めに、有限群 G に對する group association scheme $\mathcal{A}(G)$ (3.4, §1.2) からこのようなものが見つかるか否かを考えた。 $G = \text{abel 群}$ の時はこのようなものが存在する (conformal field theory がその上に存在する) ことが知られている。以下 G は非abelであることを仮定する。いくつかの実験から、群 G の位数が小さい時 $S = \text{unitary}$ とは一致しない (すなわち、定理 C. (1) から $\chi_i(1)^2 = m_i$ と $|C_i| = k_i$ が集合として一致するものが存在しない) ことが群論的に容易にわかり、一番小さい可能性でも $|G| = 64$ になった。位数 64 の群は Hall-Senior の 1964 年の表で完全に決定されており、全部で 257 (abel のものも含めて) あることが知られている。更に表から、 $k_i = m_i$ (χ_i) を満たすものは #144 - #153 と書かれていた 10 個であることがわかった。ここで ${}^t S = S$

が否かも調べるには、 G の指標表を計算し、更に共役類、既約指標もどのような順序に並べるかを考えなければならぬが、このことを手で計算することは可能であらうがかなりかっかいで時間がかかると思われた。そのこともあって、この計算を Cayley を使えり当時大阪教育大(現九大)の宗政昭弘氏に頼んだ。事実、#144-#153のいずれをも integral なのか、 ${}^tS=S$ とする fusion alg. at alg. level を与えることが宗政氏により Cayley を用いて示された。例えば #153 は $S_2(8)$ の 3×2 群であり、この integral fusion alg. at alg. level の行列 S は次で与えられる。

8								14							
8	全部 1							2	2	2	2	2	2	2	2
								2	2	2	2	-2	-2	-2	-2
								2	2	-2	-2	-2	-2	2	2
								2	2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
								2	2	-2	-2	-2	-2	2	2
								-2	-2	2	2	-2	-2	2	2
								-2	-2	2	2	-2	-2	-2	2
								-2	-2	-2	-2	2	2	-2	-2
14	対称行列であり ここから決まる							4i	-4i						
								-4i	4i						
										4i	-4i				
										-4i	4i				
												4i	-4i		
												-4i	4i		
														4i	-4i
														-4i	4i

$i = \sqrt{-1}$

さて、こたらの10個の fusion algebras at alg. level の上には conformal field theory が乗っているか否かはまだ未確定であるが、その際に S が成り立っていることが望ましいと思われ、modular invariance property はその10個のいずれに対しても成立し得ないことが坂内俊子により計算で示された。

(${}^tS=S$ から modular invariance もともに満たす integral fusion algebras at alg. level はそれほど容易には見つからないようである。) この問題に関しては、宗政氏により、 ${}^tS=S$ を満たす integral fusion algebras at alg. level を与える association schemes はいくつか見つかったという。その大部分は modular invariance property を満たさないが、 $(\mathbb{Z}_2)^6$ (更に大きい elementary abelian 2-group) の Schur ring として出来るもので modular invariance property を満たすものも存在する。(ただしそれらの例では $(ST)^3 = S^2 = T^2 = I$ 。) いくつかの上で、association schemes から出発して物理が上に乗っているような fusion algebras (at alg. level) を見つけようとするのも、この追求に値すると思う。実際候補となる association schemes は色々沢山あるので、物理が上に乗っている(可能性があり)条件を代数的に導いて(あるいは組合せ論的に導いて)表わせるようなことが出来れば、この追求はもっと効果的であろう。これに関して、専門家の方々御教示を大願いしたい。

§ 2.2 Hamming association schemes $H(d, q)$ から出た fusion algebras at algebraic level の modular invariance

最後に, integral な条件を除いた fusion alg. at alg. level を考えよう. $tS=S$ かつ modular invariance を持つものは色々存在する. Self-dual な assoc. scheme として一番典型的なものとは Hamming association scheme $H(d, q)$ であり, これから (integral ではない) fusion alg. at alg. level はこの性質を満たすことを次に示す.

定義 (Hamming scheme $H(d, q)$)

F = 有限集合, $|F|=q \geq 2$

$$X = \underbrace{F \times F \times \cdots \times F}_d, \quad d \geq 2$$

$x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in X$ に対して

$$(x, y) \in R_i \iff \#\{j \mid x_j \neq y_j\} = i$$

と定義したとき $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ は (可換な) assoc. scheme となる. これは Hamming assoc. scheme $H(d, q)$ と書く.

この時次のことが成り立つ.

$H(d, q)$ の指標表は

$$P = P_{ij} = (K_j(i))$$

ここで $K_j(\theta)$ は Krawtchouk poly と呼ばれる直交多項式で

$$K_j(\theta) = \sum_{u=0}^i (-q)^u (q-1)^{j-u} \binom{d-u}{j-u} \binom{\theta}{u}.$$

定理 D (Bannai-Bannai [1])

行列 $P \in H(d, q)$ の指標表とする。 行列 $T \in$

$$T = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \alpha^1 & & & \\ & & \alpha^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha^d \\ & & 0 & & & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

に α^2 α と α_0 は

$$\alpha^2 + (q-2)\alpha + 1 = 0, \quad \alpha_0^3 = \frac{q^{\frac{d}{2}}}{(1+(q-1)\alpha)^d}$$

で決まる数 (従って 6 通りの T が存在する) とする。

$$(PT)^3 = q^{\frac{3d}{2}} I$$

を満たす。

系 (1) $H(d, q)$ から出ると (必ずしも integral ではない) fusion alg. at alg. level は modular invariance property を持つ。
(つまり S 、 S' $\in$ fusion alg. at alg. level の行列 S とすると上の (6 通りの) T に対して $(ST)^3 = S^2 = I$ が成り立つ。)

この行列 S の例は次の通り。

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$H(2, 2)$ の時。

$$S' = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$H(3, 2)$ の時。

同様の結果は一般の self-dual な P -and Q -polynomial (symmetric) assoc. schemes についても成り立つのを期待しているが、今の所極く特別な場合にしか証明出来ていない。

参考文献

1. E. Bannai and E. Bannai : Modular invariance of the character table of Hamming association scheme $H(d, q)$, (preprint)
2. E. Bannai and T. Ito : Algebraic Combinatorics I, Benjamin/Cummings, 1984.
3. R. Dijkgraaf and E. Verlinde : Modular invariance and the fusion algebra, Nucl. Phys. B. (Proc. suppl.) 5 (1988), 87-97.
4. R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde and H. Verlinde : The operator algebra of orbifold models, Comm. Math. Phys. 123 (1989), 485-526.
5. Y. Kawada : Über den dualitätssatz der Charaktere nichtcommutativer Gruppen, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) 24 (1942), 97-109.
6. T. Kohno : Fusion algebras and mapping class groups,

数理研究錄 768 代数的組合論. pp 60-66, 1991.

7. G. Lusztig: Leading coefficients of character values of Hecke algebras, Proc. Symp. Pure Math. 47(1987), 253-262.
8. C. Moore and N. Seiberg: Classical and quantum conformal field theory, Comm. Math. Phys. 123(1989), 177-254.
9. E. Verlinde: Fusion rules and modular transformations in 2 dimensional conformal field theories, Nucl. Phys. B. (FS22), 300(1988), 360-376.

(17. 上)