

非平衡系の熱力学的極限 — Extensive Property, ゆらぎ, 非線型応答 —

東大・理 鈴木増雄

最近, 久保^{1),2)}によって提唱された巨視変数の extensive property に関する次の Ansatz を一般の場合 (Non-Markoffian) に拡張して, 証明できたので報告する。Kubo の Ansatz とは, 時刻 t における巨視変数 X の分布関数 $P(X, t)$ は, 系の体積 Ω が大きいとき, $x = X/\Omega$ として,

$$P(X, t) = C \exp [\Omega \phi(x, t)] \quad (1)$$

という漸近的な形をとることを主張するものである。ここでは, 簡単のために, 次のようなマスター方程式で記述される系

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\{\sigma_j\}; t) = \Gamma P(\{\sigma_j\}; t) \quad (2)$$

(但し, Γ は時間発展演算子, $\{\sigma_j\}$ は微視的な配位を表わすパラメータ; $\sigma_j = \pm 1$) と次のような Liouville 方程式で表わされる量子系を考える:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = [\mathcal{H}, \rho(t)]; \quad \text{tr} \rho = 1. \quad (3)$$

巨視変数 X に対する分布関数 $P(X, t)$ 又は $\rho(X, t)$ は次式で定義される:

$$\begin{aligned} P(X, t) &= \sum_{\{\sigma_j = \pm\}} \delta(\mathbf{X} - X) P(\{\sigma_j\}; t), \\ \rho(X, t) &= \text{Tr} \delta(\mathbf{X} - X) \rho(t) \end{aligned} \quad (4)$$

この巨視変数 X に対応する次の母関数を導入すると便利である:

$$\Psi(\lambda, t) = \begin{cases} \text{Tr} e^{\lambda \mathbf{X}} \rho(t) \dots\dots\dots (\text{quantal}) \\ \sum_{\{\sigma_j = \pm\}} e^{\lambda \mathbf{X}} P(t) \dots\dots\dots (\text{stochastic or classical}). \end{cases} \quad (5)$$

分布関数 $\rho(X, t)$ と $\Psi(\lambda, t)$ は, 次の関係にある:

$$\rho(X, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-\lambda X} \mathcal{Q}(\lambda, t) d\lambda. \quad (6)$$

従って, $\Psi(\lambda, t)$ が $\Psi(\lambda, t) = C_1 \exp[\mathcal{Q}\phi(\lambda, t)]$ という extensive property を持てば鞍点法により,

$$\rho(X, t) = C_2 \exp[\mathcal{Q}\{\psi(\lambda_0, t) - \lambda_0 X\}] \quad (7)$$

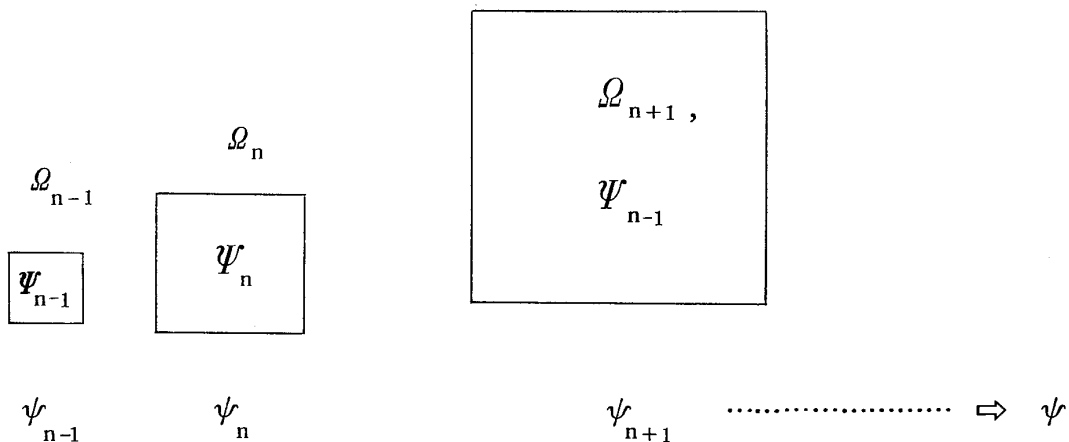
となり $\rho(X, t)$ も extensive property を持つことになる。但し, λ_0 は次式で決まる鞍点である:

$$\partial \psi(\lambda, t) / \partial \lambda = X. \quad (8)$$

以下において, 初期分布は $\rho(0) = \exp \mathcal{X}^{(i)}$ の形で表わされるものとする。多くの物理系で充されていることであるが, $\mathbf{X}, \mathcal{X}^{(i)}, \mathcal{X}$ は, “局所演算子” の和で表わされるものとする:

$$\mathbf{X} = \int \mathbf{X}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \mathcal{X}^{(i)} = \int \mathcal{X}^{(i)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \mathcal{X} = \int \mathcal{X}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (9)$$

但し, “局所演算子” とは, 中心 $\mathbf{r}$ のまわりの半径 b (有限) の中の場の演算子のみの汎関数演算子のことである。このとき, 図のように一辺の長さ $L_n = 2^n \times$ (単位長さ) の d 次元立方体の列を考える ($n = 1, 2, 3, \dots$)。長さ L_n の体積に対応する母関数を $\mathcal{Q}_n$ とし, それから作られる関数 $\psi_n = \mathcal{Q}_n^{-1} \log \Psi_n$ の関数列を考える ($\mathcal{Q}_n \propto L_n^d$)。



この関数列にコーシーの収束条件を適用して, すなわち, $n > n_0$ に対して,

$$|\psi_{n+m}(\lambda, t) - \psi_n(\lambda, t)| < \varepsilon \quad (\text{for } \varepsilon > 0 \text{ and for any positive integer } m) \text{ を導くことに}$$

鈴木増雄

より、次の定理が証明できる。^{3) 4) 5) 6)}

定理 I (quantal) : 局所演算子が適当な期待値の意味で有界ならば、 $\psi_n(\lambda, t)$ は $n \rightarrow \infty$ ($\Omega \rightarrow \infty$) のとき一様収束して、その極限值 $\psi(\lambda, t)$ が存在する。但し、時間 t は有限に固定しておく。こうして、 $\Psi(\lambda, t)$ は extensive property を持ち、 $\rho(X, t)$ も (7) の性質を示す。

同様に、(2) で記述される確率過程に対しては、もっと条件が具体的になり、次の定理が証明される。分布関数が、

$$P(\dots, -\sigma_j, \dots, t) \leq C_3 P(\dots, \sigma_j, \dots, t), \quad (10)$$

の性質を持つ (C_3 は Ω に依存しない) とき、 P は “normal” であると呼ぶことにすると、

定理 II (stochastic) : Γ を $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ と任意に分割したとき、 $P(t') \equiv \exp[t'(\Gamma_1 + \mu\Gamma_2)] \exp \mathcal{A}^{(i)}$ が $0 \leq t' \leq t$, $0 \leq \mu \leq 1$ に対して、normal ならば、

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \psi_{\Omega}(\lambda, t) = \psi(\lambda, t) = \text{存在 (一様収束)}, \quad (11)$$

である。但し、 t も λ も有限とする。故に、 $\Psi(\lambda, t)$ と $P(X, t)$ は extensive property を示す。

次に、こうして、存在の証明された関数 $\psi(\lambda, t)$ がわかっているとして、非線型緩和とゆらぎの問題を考察する。まず Kubo¹⁾ にならって $x = y(t) + z$ とおき、 $\phi(x, t) \equiv \psi(\lambda, t) - \lambda x$ を z で展開して、その一次の項を零にする (local minimum) ことによって、次の結果が得られる：

定理 III a : 大きな Ω に対して、

$$y(t) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} = \langle x \rangle_t; \quad \langle X \rangle_t = \int X \rho(X, t) dX = \text{Tr } X \rho(t) \quad (12)$$

さらに、 z^2 の項を調べることによって、 x の $y(t)$ のまわりの分散 $\sigma(t)$ は、次のように与えられる。

定理 III b : 大きな Ω に対して、

$$\sigma(t) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right)_{\lambda=0} = \Omega^{-1} \langle (X - \langle X \rangle_t)^2 \rangle_t = \Omega \langle (x - \langle x \rangle_t)^2 \rangle_t \quad (13)$$

その他, z^n までの係数と, n 次のキュムラント (ゆらぎ) との関係, 非線型応答の表式等が得られているが, これらについては, 文末の文献を参照して欲しい。 $\mathcal{M}$ が時間に依存する一般の場合にも, 上の結果は拡張できることが, わかっている。また, 厳密に解けるモデルでの具体的な結果については文献 5) と 7) を, 一次元超伝導体での super-current のゆらぎについては, 文献 8) を参照して下さい。

参 考 文 献

- 1) R. Kubo, in Synergetics (Proc. Symp. Synergetics, 1972, Schloss Elmau), ed. H. Haken (B. G. Teubner, Stuttgart) (1973).
- 2) R. Kubo, K. Matsuo and K. Kitahara, J. Stat. Phys. **9** (1973) 51.
- 3) M. Suzuki, Phys. Letters **50A** (1974) 47.
- 4) M. Suzuki, プログレスに投稿中。
- 5) M. Suzuki, 基研, 数理研主催の ISMPTP 国際会議 (1975 年 1 月 23 日 ~ 29 日) の予稿。
- 6) 物性研究「統計力学における数学的問題」研究会報告。
- 7) M. Suzuki, to be submitted to Progress. T. P.
- 8) N. Ohata and M. Suzuki, preprint.

非平衡系におけるスピニコヒーレント表

柴田文明, 高橋慶紀

量子力学的な演算子を, c -数の関数に射影して, 演算子の方程式の代わりに, c -数の方程式を考える方法¹⁾は, レーザー系の量子統計力学的な記述に広く用いられている。

スピン系に対しても, Schwinger の方法を用いて, コヒーレント表示²⁾を導入し, 演算子の方程式と同値な c -数の方程式を得ることができる。この表示をスピン緩和の現象に応用すれば, classical limit をとることによって, Kubo-Hashitsume³⁾が現