

# 粘土のクリープ特性に関する 2, 3 の考察

大 槻 正 紀

## ON THE CREEP CHARACTERISTICS OF CLAYS

By Seiki OHMAKI

### Synopsis

In this paper, the experimental results from triaxial drained creep tests and one dimensional consolidation tests of three kinds of soil samples are represented. And the viscoelastic constants of these samples are determined from experimental results by using three dimensional consolidation theory.

It is said that;

- a). A soil sample consolidated under one dimensional condition represents anisotropy even after isotropic compression, especially for undisturbed soil sample,
- b). from the comparison of settlements of two kinds of tests, it is impossible to consider that soil skeleton is elastic,
- c). from the shape of creep curves, creep behavior of soil is mainly caused by direct interaction between soil particles.

### 1. ま え が き

粘土のクリープ特性を明らかにすることは、地盤の圧密沈下、側方流動などの変形を考えていく上で重要である。粘土のクリープ特性または 2 次圧密に関する研究は主として一次元圧密の立場から多くの実験的研究が行なわれた。Taylor と Merchant<sup>1)</sup> が 2 次圧密が粘土の構造骨格の粘弾性的性質を考えることにより現象論的に説明できることを指摘して以来、構造骨格の粘弾性的特性を解明することが、多くの研究者によりなされてきた<sup>2), 3), 4), 5), 6)</sup>。一方、Biot は構造骨格が弾性の場合<sup>7)</sup> および線形粘弾性的の場合<sup>8)</sup> について 3 次元圧密理論を導びき、その弾性定数の決定法についても述べている<sup>9)</sup> が、これを用いて粘土の粘弾性定数を決定することは行なわれていない。粘土のこの分野における実験的研究は多くの場合一次的なものであり、3 次元圧密理論にもとづいた粘土の変形、あるいは一般化された粘土の応力～ひずみ～時間関係に関する解析は十分に行なわれていない。したがって、3 次元的な地盤に対する沈下解析も十分に行なわれているとは言えない。

著者は、粘土を土粒子構造骨格と非圧縮性の間隙水より成る 2 相系多孔質材料と考えて、構造骨格の粘弾性的性質を考慮に入れた 3 次元圧密理論を導びいた。本文ではこの 3 次元圧密理論をもとにして、粘土の 3 軸排水クリープ試験および標準圧密試験と同じ境界条件のもとにこれを解き、得られた解をもとにして両試験による粘土の粘弾性定数の決定法について述べる。さらに 3 種類の試料について行なった 3 軸排水クリープ試験と標準圧密試験の結果を示し、これから、これらの試料の粘弾性定数と試料の物性、試験方法、加えた外力のレベルなどの関係について考察する。

### 2. 線形粘弾性理論による粘土の粘弾性定数の決定

#### 2.1 理論に用いる仮定

粘土をつぎのような性質をもつ材料と仮定する。

- 1) 均質でひずみ, 速度, 応力の変化は微小である。
- 2) 粘土の間げきは完全に非圧縮性の水で飽和されている。
- 3) 間げき水の移動に関しては Darcy の法則が適用され, 透水係数  $k$  の性質は等方的で一定である。
- 4) 粘土の間げき率  $n$  は  $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta V v / \Delta V$  で各点で定義される。ここに,  $Vv$ ; 間げきの体積,  $V$ ; 土-水系の体積

5) 間げき水圧と有効応力の間には直交デカルト座標系において

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}' + u \delta_{ij} \dots \dots \dots (1)$$

が成立する。ここに,  $\tau_{ij}$ ,  $\tau_{ij}'$ ,  $u$  はそれぞれ全応力, 有効応力, 間げき水圧である。 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。応力テンソル  $\tau_{ij}$ ,  $\tau_{ij}'$  は  $x_1$  一面では Fig. 1 に示す方向を正とする。(垂直応力は圧縮を正にとる。) 他の面の応力も同様である。

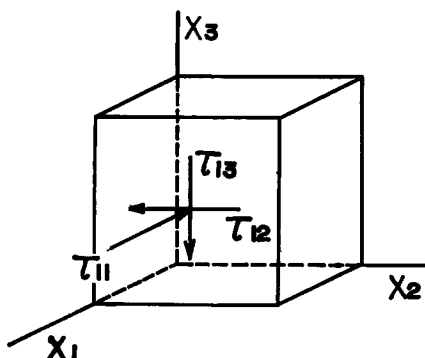


Fig. 1 Direction of Stress.

6) 有効応力～ひずみ関係は, 線形粘弾性理論にもとづくとする。すなわち, 等方性材料においてはつぎのように表わす<sup>10)</sup>。

クリーブ積分法則

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= s_{ij} * dH \\ e_{kk} &= \tau_{kk}' * dJ \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

緩和積分法則

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= \epsilon_{ij} * dE \\ \tau_{kk}' &= e_{kk} * dG \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

微分演算法則

$$\left. \begin{aligned} P_1(D)s_{ij} &= Q_1(D)\epsilon_{ij} \\ P_2(D)\tau_{kk}' &= Q_2(D)e_{kk} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ここに  $e_{ij}$  はひずみテンソルで, 向きは応力テンソルに対応するように決め, 圧縮を正とする。変位成分  $u_i$  との間には,

$$e_{ij} = -\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

の関係がある。また,  $\epsilon_{ij}$ ,  $\tau_{ij}'$  はそれぞれにひずみテンソルおよび応力テンソルの偏差成分で,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk} \\ s_{ij} &= \tau_{ij}' - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

また,  $H, J$  はせん断および等方圧縮に関するクリープ関数,  $E, G$  は同様の緩和関数である。\*印は Stieltjes の合成積で

$$\varphi * d\psi = \int_{-\infty}^t \varphi(t-\tau) d\psi(\tau)$$

$(-\infty, 0)$  で  $\psi \equiv \varphi \equiv 0$  のとき,  $[0, \infty)$  においては,

$$\begin{aligned} \varphi * d\psi &= \psi(0+) \varphi(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau) \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= (\psi(0+) \varphi(t) + \varphi * \psi^{(1)}) \end{aligned}$$

また,

$$E * dH = H * dE = h, \quad G * dJ = J * dG = h$$

ここに,  $h$  は単位段階関数で

$$h = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \infty \end{cases}$$

また,  $D$  は  $\frac{\partial}{\partial t}$  を示し,  $P_i(D), Q_i(D)$  ( $i=1, 2$ ) は  $D$  の多項式を示す。  $P_i(D), Q_i(D)$  と  $H, J, E, G$  の間にも特定の関係がある。

以上の仮定にもとづいた3次元圧密に関する基礎式は次式で表わさる<sup>11)</sup>。

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \frac{k}{a} \nabla^2 u_e = 0 \quad (6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} * dE + \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} * dK - 2 \nabla u_e + 2 \gamma_w \nabla (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) + 2F = 0 \quad (7)$$

ここに,  $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}$ : 構造骨格の変位ベクトルおよびその時間速度,  $u_e$ : 過剰間げき水圧,  $k$ : 透水係数,  $a$ :  $(2-n_0)\gamma_w$ ,  $n_0$ : 初期間げき率,  $\gamma_w$ : 水の単位体積重量,  $K=(E+2G)/3$ ,  $\mathbf{n}$ : 鉛直上向きの単位ベクトル,  $\mathbf{r}$ : 位置ベクトル,  $F$ : 自重を示すベクトル。なお, (7) 式の第4項は間げき水圧と過剰間げき水圧との差を示す項である。

## 2.2 円柱供試体に対する理論解

Fig. 2 に示すような円柱座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  を考え, この座標系の各座標軸方向の構造骨格の変位成分を  $(u_1, u_2, u_3)$  とする。さらにこれらの量をつぎのように無次元化する。

$$x_1 = ar, \quad x_2 = hz, \quad u_1 = au_r, \quad u_2 = hu_z$$

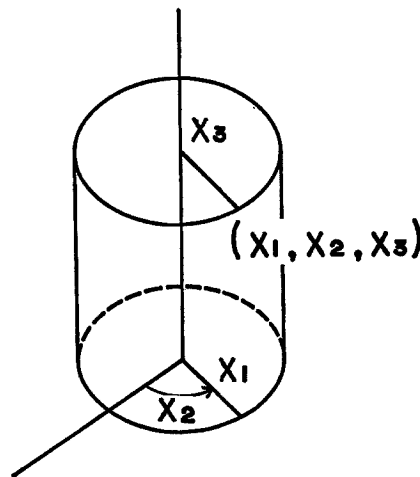


Fig. 2 Cylindrical coordinate.

ここに,  $a$  および  $h$  はそれぞれ円柱供試体の半径および高さである。いま, 間げき水圧と過剰間げき水圧の差および土の自重を無視すると, 土の構造骨格が弾性として境界条件;

$$\begin{aligned} r=1, 0 \leq z \leq 1 \quad (0 \leq t \leq \infty) \text{ で,} \\ \tau_{rr}' = p, \tau_{r\theta}' = 0, u_e = 0, \\ 0 \leq r \leq 1, z=0 \quad (0 \leq t < \infty) \text{ で,} \\ u_z = 0, \tau_{rz}' = 0, \frac{\partial u_e}{\partial z} = 0 \\ 0 \leq r \leq 1, z=1 \quad (0 \leq t < \infty) \text{ で,} \\ 2\pi \int_0^1 (\tau_{zz}' + u_e) r dr = \tau q, \tau_{rz}' = 0, \frac{\partial u_e}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

のもとに解いた円柱供試体の圧密理論解は

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{q-p}{3E} r - \frac{2p+q}{3} \left\{ \frac{r}{G} + 8E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\nu_n) r - 3J_1(\nu_n r)}{\nu_n \Theta_n J_0(\nu_n)} \exp(-\nu_n^2 T) \right\} \\ u_z &= -\frac{2(q-p)}{3E} z - \frac{2p+q}{3} \left\{ \frac{1}{G} - 16E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n \Theta_n J_0(\nu_n)} \exp(-\nu_n^2 T) \right\} \\ e_v &= (2p+q) \left\{ \frac{1}{G} - 8E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n r)}{\nu_n \Theta_n J_0(\nu_n)} \exp(-\nu_n^2 T) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

で表わされる。ここに,  $\nu_n$  は  $(2E+G)\nu J_0(\nu) - 4EJ_1(\nu)$  のゼロ点であり,  $J_0(\nu), J_1(\nu)$  は 0 次および 1 次の第 1 種 Bessel 関数である。また,  $\Theta_n = (2E+G)^2 \nu_n^2 - 8EG$ ,

$$T = \frac{k(2E+G)}{3a^2 \alpha} t \quad (t; \text{時間})$$

(8) 式において  $e_v$  を円柱供試体の全体積について積分すると

$$\frac{\Delta V}{V} = (2p+q) \left\{ \frac{1}{G} - 16E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n \Theta_n J_0(\nu_n)} \exp(-\nu_n^2 T) \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで, Bessel 関数に関する Dini の展開により得られる関係,

$$\frac{1}{G} = 16E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\nu_n)}{\nu_n \Theta_n J_0(\nu_n)} \exp(-\nu_n^2 T)$$

を用いると

$$u_z|_{z=1, t=0} = \frac{-2(q-p)}{3E}$$

一方, (9) 式より

$$\frac{\Delta V}{V} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{2p+q}{G}$$

いま,  $w_i = -u_z|_{z=1, t=0}$ ,  $e_{vf} = \Delta V/V|_{t \rightarrow \infty}$  で表わすと,

$$E = \frac{2(q-p)}{3w_i}, G = \frac{2p+q}{e_{vf}} \dots\dots\dots (10)$$

したがってこの関係式を用いると実験より  $E, G$  を決定することができる。さらにこれらの  $E, G$  を用いて (9) 式から全体積ひずみの半が実験曲線と理論曲線と等しくなるように透水係数を決めることができる。

一方, 円柱供試体に過剰間げき水圧がない場合を考えると, 供試体は線形粘弾性体として取り扱えばよいが, このとき変形の基礎方程式は,

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right) * dE - \frac{\partial e_v}{\partial r} * dK = 0 \\ \left( \frac{h^2}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{h^2}{a^2} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) * dE - \frac{\partial e_v}{\partial z} * dK = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

のようになる。これを境界条件;

$$r=1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (0 \leq t < \infty) \text{ で } \tau_{rr} = p, \tau_{rz} = 0$$

$$0 \leq r \leq 1, z=0, \quad (0 \leq t < \infty) \text{ で } u_r=0, \tau_{rz}=0$$

$$0 \leq r \leq 1, z=1, \quad (0 \leq t < \infty) \text{ で } 2\pi \int_0^1 \tau_{zz} r dr = \pi q, \tau_{rz}=0$$

で解く。ここに、

$$\left. \begin{aligned} e_v &= -\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \\ \tau_{rr} &= -\frac{\partial u_r}{\partial r} * dE + \frac{1}{3} e_v * d(G-E) \\ \tau_{zz} &= -\frac{\partial u_z}{\partial z} * dE + \frac{1}{3} e_v * d(G-E) \\ \tau_{rz} &= -\left(\frac{a}{h} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{h}{a} \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) * dE \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

この解は前と同様にして得られ、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{r}{3} \{ (q-p) * dH - (2p+q) * dJ \} \\ u_z &= -\frac{1}{3} \{ 2(q-p) * dH + (2p+q) * dJ \} \\ e_v &= (2q+q) * dJ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $H, J$  は前述したようにせん断および等方圧縮に関するクリープ関数である。いま、粘土の構造骨格の粘弾性モデルを Fig. 3 (a), (b) に示すようなバネと Voigt モデルを直列につないだものとする、これ

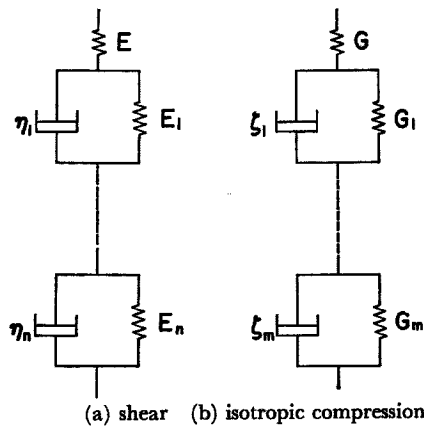


Fig. 3 Viscoelastic models of soil skeleton.

らのモデルのクリープ関数はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{E} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{E_i}{\eta_i} t\right) \right\} \\ J &= \frac{1}{G} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{G_i}{\zeta_i} t\right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、今後  $E, G$  はそれぞれ Fig. 3(a), (b) に示したようにせん断および等方圧縮に関する粘弾性モデルの単独バネのバネ定数を表わすことにする。また、 $E_i, \eta_i, G_i, \zeta_i$  はそれぞれの Voigt モデルの  $i$  番目のバネ定数および粘性係数を表わす。いま、 $w = -u_z|_{z=1}$ 、すなわち  $w$  を円柱供試体の上端面の無次元化された沈下量とすると、

$$w = \frac{1}{3} \left[ 2(q-p) \left\{ \frac{1}{E} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-\frac{E_i}{\zeta_i} t}) \right\} + (2p+q) \left\{ \frac{1}{G} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i} (1 - e^{-\frac{G_i}{\zeta_i} t}) \right\} \right] \\ e_v = (2p+q) \left\{ \frac{1}{G} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i} (1 - e^{-\frac{G_i}{\zeta_i} t}) \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$w$  はまた  $e_v$  を用いると

$$w = \frac{1}{3} \left[ 2(q-p) \left\{ \frac{1}{E} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-\frac{E_i}{\zeta_i} t}) \right\} + e_v \right]$$

とかける。(15) 式の第 2 式において、 $e_v$  は円柱供試体内の位置に無関係であるから、供試体全体の体積ひずみと各点のそれとは同じ形で表わされる。(15) 式を用いて実験から粘土供試体の粘弾性定数を決定するにはつぎのようにする<sup>12), 13)</sup>。等方圧縮に関する粘弾性定数を考える。2 次圧密部分において同じ桁をもつ時間 (以後、これを時間の log cycle という。) に対して 1 つの Voigt モデルを割り当てる。Voigt モデルの粘弾性定数の決定は、実験の最後の log cycle から行なう。いま、Voigt モデルの数を  $m$  個とし、第 1 番目の Voigt モデルの遅延時間がこの log cycle の時間と同程度とすれば、他の Voigt モデルの遅延時間はこの log cycle の時間より十分小さいから、この log cycle においては (15) 式の第 2 式の  $e_v$  は、

$$e_v \simeq (2p+q) \left\{ \frac{1}{G} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{G_i} + \frac{1}{G_m} (1 - e^{-\frac{G_m}{\zeta_m} t}) \right\}$$

のようにかける。いま、この log cycle において  $t=t_1, t_2$  の  $e_v$  の値をそれぞれ  $e_{v1}, e_{v2}$  とし、 $t_2=t_1+\Delta t$  ( $\Delta t > 0$ ) とすると、

$$e_{v2} - e_{v1} = \frac{2p+q}{G_m} e^{-\frac{G_m}{\zeta_m} t_1} (1 - e^{-\frac{G_m}{\zeta_m} \Delta t})$$

両辺の対数をとると

$$\log_e (e_{v2} - e_{v1}) = \log_e \left\{ \frac{2p+q}{G_m} (1 - e^{-\frac{G_m}{\zeta_m} \Delta t}) \right\} - \frac{G_m}{\zeta_m} t_1$$

したがって、 $\Delta t$  を一定として  $\log (e_{v2} - e_{v1}) \sim t_1$  曲線を直線とみなして、その切片および傾きから  $G_m, \zeta_m$  を決定することができる。つぎにこの log cycle の前の log cycle に対していま求めた  $G_m, \zeta_m$  を用いて、

$$e_v - \frac{2p+q}{G_m} (1 - e^{-\frac{G_m}{\zeta_m} t})$$

を計算し、

$$e_v - \frac{2p+q}{G_m} (1 - e^{-\frac{G_m}{\zeta_m} t}) = (2p+q) \left\{ \frac{1}{G} + \sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{G_i} (1 - e^{-\frac{G_i}{\zeta_i} t}) + \frac{1}{G_{m-1}} (1 - e^{-\frac{G_{m-1}}{\zeta_{m-1}} t}) \right\}$$

の関係をを用いると前と同様にして新しい log cycle に対する  $G_{m-1}, \zeta_{m-1}$  を決めることができる。これを  $m$  回くり返し、すべての  $G_i, \zeta_i$  を決定し、最後に、

$$f(t) = e_v - (2p+q) \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i} (1 - e^{-\frac{G_i}{\zeta_i} t})$$

において、 $f(\infty) = \frac{2p+q}{G}$  から  $G$  を決定する。また、 $f(t)$  は全体積ひずみから 2 次圧密領域における体積ひずみを差し引いたものであるから、これを (9) 式における  $\Delta V/V$  とみなして、(9) 式より近似的に透水係数  $k$  を決定することができる。つぎに、せん断に関する粘弾性定数の決め方について述べる。載荷直後における供試体のせん断変形は一次圧密現象、すなわち脱水作用による供試体の体積変化とは無関係に生ずるものであるから、せん断に関する粘弾性定数のうち、単独バネのバネ定数は (10) 式の第 1 式と同様に円柱供試体の初期沈下の無次元量  $w_i$  から、

$$E = \frac{2(p-q)}{3w_i}$$

により決められる。つぎに、(15) 式の第 3 式は

$$3w - e_v = 2(q - p) \left\{ \frac{1}{E} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} (1 - e^{-\frac{E_i}{\eta_i} t}) \right\}$$

のようにかける。この式より、実験値  $(3w - e_v)$  から等方圧縮に関する粘弾性定数を決めたのと同様にして log cycle の大きい方から  $(n-1)$  個の  $E_i, \eta_i$  を決める。 $E_n$  はすでに  $E$  を決めているので、

$$(3w - e_v)_f = 2(q - p) \left( \frac{1}{E} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \right)$$

が成立するように決める。ここに、 $(3w - e_v)_f$  は  $(3w - e_v)$  の最終値である。また、 $\eta_n$  はこの  $E_n$  を用いて他の粘性係数の場合と同様に決める。

### 2.3 一次元圧密に対する理論解

$x_3$  軸を鉛直上方にとって、(6), (7) 式を一次元圧密の場合についてかく。いま、静水圧および自重を無視し、

$$e_3 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

を用いると、

$$\frac{\partial e_3}{\partial t} + \frac{k}{\alpha} \frac{\partial^2 u_e}{\partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial e_3}{\partial x_3} dL + \frac{\partial u_e}{\partial x_3} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $u_3$  は  $x_3$  軸方向の変位、 $e_3$  は同じ方向の鉛直ひずみで、

$$L = \frac{2E + G}{3} \dots\dots\dots (17)$$

の関係がある。(17) 式は 3 次元変形に関する緩和関数  $E, G$  と一次元変形の場合の緩和関数  $L$  との関係を与えるものである。ここで、 $L$  のモデルとして Fig. 4 のような単独パネと  $l$  個の Voigt モデルを直列につないだものを考えると

$$L = \frac{1}{F} + \sum_{i=1}^l \frac{1}{F_i} (1 - e^{-\frac{F_i}{\tau_i} t}) \dots\dots\dots (18)$$

とかける。いま、境界条件；

$$x_3 = 0; u_3 = 0, u_e = 0$$

$$x_3 = 2H; \tau_{33}' = \Delta p, u_e = 0$$

のもとに (16) 式の解を求める。 $l=0$  の場合は Terzaghi<sup>14)</sup> の場合と同様であり、また、 $l=1, 2$  の場合はそれぞれ Gibson と Lo<sup>13)</sup> および Schiffman ら<sup>5)</sup> により解が与えられている。同じ方法により (16) 式から試料の上端における沈下量を試料高さで割った値  $w = u_3|_{x_3=2H}/2H$  を求めるとつぎのようになる。

$l=0$  の場合；

$$w = \frac{\Delta p}{F} \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{j^2} \exp \left( -\frac{kL}{4\alpha} \frac{j^2 \pi^2}{H^2} t \right) \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$l=1$  の場合；

$$w = \Delta p \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) + \frac{2k \cdot \Delta p}{\alpha H^2} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{x_1 - D}{x_1(x_2 - x_1)} e^{-x_1 t} + \frac{x_2 - D}{x_2(x_1 - x_2)} e^{-x_2 t} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 $D = \frac{F + F_1}{\xi_1}$ 、また、 $x_1, x_2$  は、

$$s_2 + \left( \frac{kF}{4\alpha} \frac{j^2 \pi^2}{H^2} + D \right) s + \frac{k}{4\alpha} \frac{FF_1}{\xi_1} \frac{j^2 \pi^2}{H^2} = (s + x_1)(s + x_2) \quad (j=1, 3, \dots)$$

と表わせる。

$l=2$  の場合；

$$w = \Delta p \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) - \frac{2k \cdot \Delta p}{\alpha H^2} \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{x_1^2 - D_1 x_1 + D^2}{x_1(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} e^{-x_1 t} \right.$$

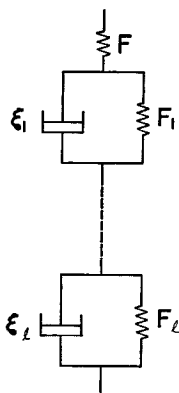


Fig. 4 Viscoelastic model of soil skeleton (one dimensional one).

$$+ \frac{x_2^2 - D_1 x_1 + D_2}{x_2(x_3 - x_2)(x_1 - x_2)} e^{-x_2 t} + \frac{x_3^2 - D_1 x_3 + D_2}{x_3(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} e^{-x_3 t} \} \dots (21)$$

ここに,

$$D_1 = \frac{F_1}{\xi_1} + \frac{F_2}{\xi_2} + F \left( \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} \right), \quad D_2 = \frac{F_1 F_2 + F(F_1 + F_2)}{\xi_1 \xi_2}$$

また,  $x_1, x_2, x_3$  は次式を満足する。

$$s^3 + \left( \frac{kF}{4\alpha} \frac{j^2 \pi^2}{H^2} + D_1 \right) s^2 + \left\{ \frac{kF}{4\alpha} \left( \frac{F_1}{\xi_1} + \frac{F_2}{\xi_2} \right) \frac{j^2 \pi^2}{H^2} + D_2 \right\} s + \frac{k}{4\alpha} \frac{F F_1 F_2}{\xi_1 \xi_2} \frac{j^2 \pi^2}{H^2} = (s + x_1)(s + x_2)(s + x_3)$$

$l=3$  の場合,

$$w = \Delta p \left( \frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} \right) + \frac{2k \cdot \Delta p}{\alpha H^2} \sum_{j=1,3,\dots} \left\{ \frac{x_1^3 - D_1 x_1^2 + D_2 x_1 - D_3}{x_1(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)} e^{-x_1 t} \right. \\ + \frac{x_2^3 - D_1 x_2^2 + D_2 x_2 - D_3}{x_2(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_1 - x_2)} e^{-x_2 t} + \frac{x_3^3 - D_1 x_3^2 + D_2 x_3 - D_3}{x_3(x_4 - x_3)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} e^{-x_3 t} \\ \left. + \frac{x_4^3 - D_1 x_4^2 + D_2 x_4 - D_3}{x_4(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)} e^{-x_4 t} \right\} \dots (22)$$

ここに,

$$D_1 = \frac{F_1}{\xi_1} + \frac{F_2}{\xi_2} + \frac{F_3}{\xi_3} + F \left( \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} \right), \\ D_2 = \frac{F_1 F_2 + F(F_1 + F_2)}{\xi_1 \xi_2} + \frac{F_2 F_3 + F(F_2 + F_3)}{\xi_2 \xi_3} + \frac{F_3 F_1 + F(F_3 + F_1)}{\xi_3 \xi_1} \\ D_3 = \frac{F_1 F_2 F_3 + F(F_2 F_3 + F_3 F_1 + F_1 F_2)}{\xi_1 \xi_2 \xi_3}$$

また,  $x_i (i=1, \dots, 4)$  は,

$$s^4 + \left( \frac{kF}{4\alpha} \frac{j^2 \pi^2}{H^2} + D_1 \right) s^3 + \left\{ \frac{kF}{4\alpha} \left( \frac{F_1}{\xi_1} + \frac{F_2}{\xi_2} + \frac{F_3}{\xi_3} \right) \frac{j^2 \pi^2}{H^2} + D_2 \right\} s^2 \\ + \left\{ \frac{kF}{4\alpha} \left( \frac{F_1 F_2}{\xi_1 \xi_2} + \frac{F_2 F_3}{\xi_2 \xi_3} + \frac{F_3 F_1}{\xi_3 \xi_1} \right) \frac{j^2 \pi^2}{H^2} + D_3 \right\} s + \frac{kF}{4\alpha} \frac{F_1 F_2 F_3}{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \frac{j^2 \pi^2}{H^2} \\ = (s + x_1)(s + x_2)(s + x_3)(s + x_4)$$

で表わされる。一方, 過剰間げき水圧のない場合の一次元沈下  $w$  (無次元量) は,



$$w = 4p \left\{ \frac{1}{F} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{F_i} (1 - e^{-\frac{F_i}{F} t}) \right\} \quad (23)$$

と表わされる。(19)式～(22)式は第1式がこのような粘弾性モデルによる沈下量を表わし、第2項が一次圧密による補正項を表わしている。(23)式を用いて標準圧密試験より粘土の粘弾性定数を決定する方法は2・2の等方圧縮に関する粘弾性定数の場合と同様である。また、実験より得られた沈下量から2次圧密量を引いて、これから(19)式を用いて近似的に透水係数を求めることもできる。

### 3. 実験結果

#### 3.1 試料および実験方法

実験には、A, B, Cの3種類の試料を用いた。これらの試料の物性をTable 1に、また、粒径加積曲線をFig. 5に示す。試料Bは、京都市伏見区藤の森で採取せられた市販粘土であり、試料Aはこの試料B

Table 1 Properties of soil sample.

| Sample | L.L.<br>(%) | P.I.<br>(%) | Gs.   | clay<br>(%) | silt<br>(%) | sand<br>(%) | classification |
|--------|-------------|-------------|-------|-------------|-------------|-------------|----------------|
| A      | 72.6        | 42.5        | 2.675 | 48.2        | 38.7        | 13.1        | clay           |
| B      | 43.6        | 17.5        | 2.648 | 17.5        | 50.8        | 31.7        | silty loam     |
| C      | 37.6        | 16.2        | 2.753 | 22.2        | 15.0        | 62.8        | sandy loam     |

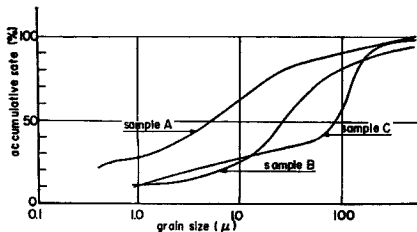


Fig. 5 Grain size accumulation curves.

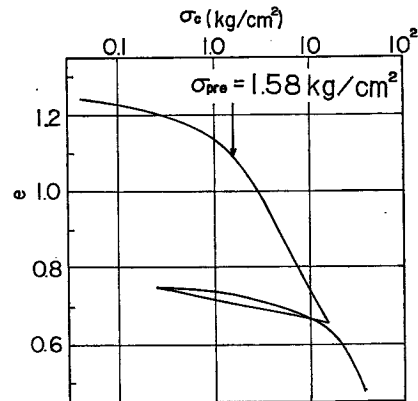


Fig. 6  $e \sim \log \sigma_e$  curve (Sample C).

と市販のベントナイトを半分づつ混合したものである。試料A, Bはいずれも液性限界以上で十分練り返した後直径25 cmの大型圧密リングにより最終圧密圧力0.5 kg/cm<sup>2</sup>で圧密した練り返し再圧密試料である。試料Cは岡山県水島地区の深さ10～12 mの沖積層から採取せられた不攪乱試料である。この試料の $e \sim \log \sigma_e$ 曲線をFig. 6に示す。これより求めた先行圧密圧力は1.58 kg/cm<sup>2</sup>である。試料A, B, Cの三角座標による分類はそれぞれ粘土、シルト質ローム、砂質ロームである。

実験は三軸排水クリープ試験と標準圧密試験を行なった。三軸排水クリープ試験はN.G.I.型三軸圧縮試験装置を用いて、供試体の周面排水、両端面非排水条件のもとにはじめ試料を0.5 kg/cm<sup>2</sup>で約2日間等方圧密し、その後試料Aは0.7 kg/cm<sup>2</sup>で、試料B, Cは1.0 kg/cm<sup>2</sup>でさらに2日間等方圧密した後、同じ排水条件のもとに所定の圧力状態にして、約2週間、クリープ試験を行なった。三軸排水クリープ試験の試験

条件を Table 2 に示す。表の  $\sigma_c$  はクリープ荷重載荷前の圧密圧力であり、 $p$  および  $q$  はクリープ時におけるこの圧密圧力からの側圧および軸圧の増分を示す。 $p$  および  $q$  は各試料においてある試験グループ毎に  $(2p+q)/3$  が一定になるようにとってある。つぎに標準圧密試験は圧密圧力  $0.5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $1.0 \text{ kg/cm}^2$  で約 1 日ずつ圧密し、その後、圧密圧力を  $\Delta p$  だけ増加して約 2 週間圧密を行なった。Table 3 に試験条件を示す。

Table 2 Test condition (Triaxial drained creep tests).

| Sample A |                                  |                           |                           |                  |
|----------|----------------------------------|---------------------------|---------------------------|------------------|
| Test No. | $\sigma_c$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $p$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $q$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\frac{2p+q}{3}$ |
| A-1      | 0.70                             | 0.7000                    | 0.7000                    | 0.70             |
| A-2      | 0.70                             | 0.6375                    | 0.8250                    | 0.70             |
| A-3      | 0.70                             | 0.5750                    | 0.9500                    | 0.70             |
| A-4      | 0.70                             | 1.4000                    | 1.4000                    | 1.40             |
| A-5      | 0.70                             | 1.3375                    | 1.5250                    | 1.40             |
| Sample B |                                  |                           |                           |                  |
| Test No. | $\sigma_c$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $p$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $q$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\frac{2p+q}{3}$ |
| B-1      | 1.00                             | 1.0000                    | 1.0000                    | 1.00             |
| B-2      | 1.00                             | 0.8750                    | 1.2500                    | 1.00             |
| B-3      | 1.00                             | 0.7500                    | 1.5000                    | 1.00             |
| B-4      | 1.00                             | 2.0000                    | 2.0000                    | 2.00             |
| B-5      | 1.00                             | 1.8125                    | 2.3750                    | 2.00             |
| B-6      | 1.00                             | 3.0000                    | 3.0000                    | 3.00             |
| B-7      | 1.00                             | 2.7500                    | 3.5000                    | 3.00             |
| Sample C |                                  |                           |                           |                  |
| Test No. | $\sigma_c$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $p$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $q$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\frac{2p+q}{3}$ |
| C-1      | 1.00                             | 1.000                     | 1.000                     | 1.00             |
| C-2      | 1.00                             | 0.875                     | 1.250                     | 1.00             |
| C-3      | 1.00                             | 0.750                     | 1.500                     | 1.00             |
| C-4      | 1.00                             | 2.000                     | 2.000                     | 2.00             |
| C-5      | 1.00                             | 1.875                     | 2.250                     | 2.00             |
| C-6      | 1.00                             | 1.750                     | 2.500                     | 2.00             |

Table 3 Test condition (One dimensional consolidation).

| Sample A |                                  |                                  | Sample B |                                  |                                  | Sample C |                                  |                                  |
|----------|----------------------------------|----------------------------------|----------|----------------------------------|----------------------------------|----------|----------------------------------|----------------------------------|
| Test No. | $\sigma_c$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\Delta p$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Test No. | $\sigma_c$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\Delta p$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Test No. | $\sigma_c$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\Delta p$<br>kg/cm <sup>2</sup> |
| SA-1     | 1.00                             | 0.50                             | SB-1     | 1.00                             | 0.50                             | SC-1     | 1.00                             | 0.50                             |
| SA-2     | 1.00                             | 1.00                             | SB-2     | 1.00                             | 1.00                             | SC-2     | 1.00                             | 1.00                             |
| SA-3     | 1.00                             | 1.50                             | SB-3     | 1.00                             | 1.50                             | SC-3     | 1.00                             | 1.50                             |
| SA-4     | 1.00                             | 2.00                             | SB-4     | 1.00                             | 2.00                             |          |                                  |                                  |

### 3.2 三軸排水クリープ試験の結果

実験は Table 2 に示したように3種類の試料につき行なったが、これらの試料のクリープ期間中の排水量より測定した体積ひずみ  $e_v$  および供試体上端面の沈下量をその高さで割った鉛直ひずみ  $w$  を時間の対数に対してプロットしたものの一例を Fig. 7~Fig. 9 に示す。Fig. 5 の粒径加積曲線から試料 A, B, C の順で試料の粒径が大きくなっているが、Fig. 7~Fig. 9 から一次圧密の終了時間はこの順に早くなっていることがわかる。また、これらの図からいずれも2次圧密領域においては時間の対数に対して直線的に変形が進行している。このように、粒度の分布に関係なく2次圧密領域では同様のパターンで変形が進行しているということはこの領域における変形が土粒子とそれ以外のものの相互作用により生ずるものではなく、土粒子相互間の直接的作用が基本になっていることを示唆するものである。八木<sup>15)</sup> は豊浦標準砂を用いて砂の三軸クリープ試験を行ない、砂の変形が時間の対数に対して直線的に変化することを示している。これは、このような考え方を裏づけるものといえよう。式 (15) の第3式において、 $p=q$  とすると  $3w=e_v$  となる。すなわち、等方圧縮においては鉛直ひずみの3倍が体積ひずみに等しくなることを示している。いま、等方圧縮条件下の試験の終了時における鉛直ひずみ  $w_f$  と体積ひずみ  $e_{vf}$ 、および  $3w_f/e_{vf}$  を示すと Table 4 のようになる。この表より試料 A, B では、 $3w_f/e_{vf}$  は90% 前後であるのに対し、試料 C では75% 前後にな

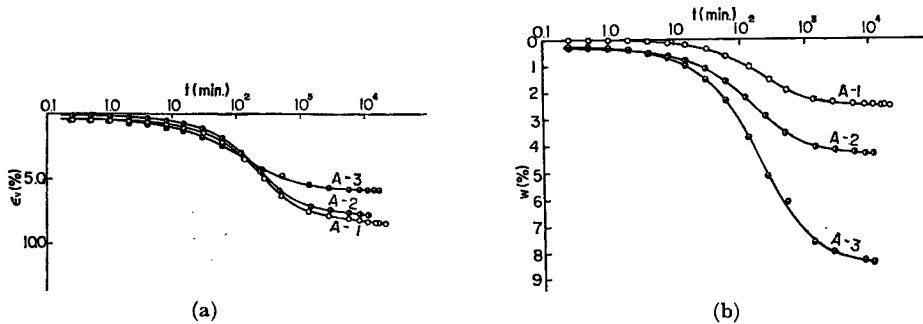


Fig. 7 Creep curves (Sample A).

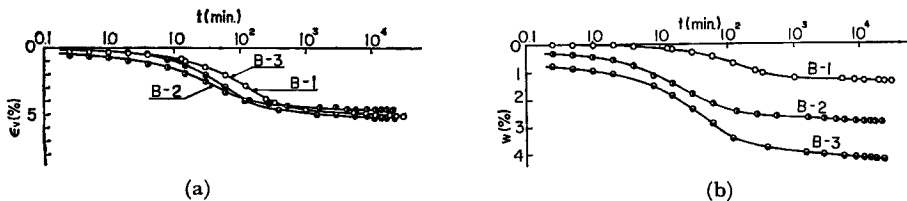


Fig. 8 Creep curves (Sample B).

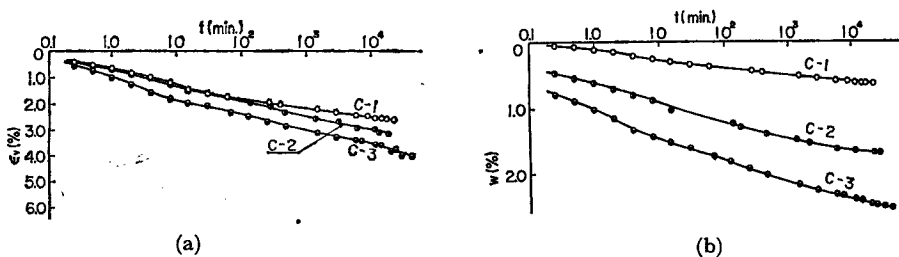


Fig. 9 Creep curves (Sample C).

Table 4 Test results (Isotropic compression).

| Sample | Test No. | $w_f$<br>(%) | $e_{vf}$<br>(%) | $3w_f/e_{vf}$<br>(%) | $G$<br>kg/cm <sup>2</sup> |
|--------|----------|--------------|-----------------|----------------------|---------------------------|
| A      | A-1      | 2.521        | 8.428           | 89.7                 | 24.9                      |
|        | A-4      | 4.224        | 14.115          | 89.8                 | 29.8                      |
| B      | B-1      | 1.373        | 5.062           | 81.4                 | 59.3                      |
|        | B-4      | 2.428        | 7.620           | 95.6                 | 78.7                      |
|        | B-6      | 3.257        | 9.567           | 102.1                | 94.1                      |
| C      | C-1      | 0.625        | 2.557           | 73.3                 | 117.3                     |
|        | C-4      | 1.750        | 6.676           | 78.6                 | 89.9                      |

っている。この比は等方性材料において無限小ひずみを考えれば100%になるべきものであり、有限変形を考慮してもほとんど100%にならなければならないことを考えると、これは試料の異方性を示しているものである。特に不攪乱試料Cは等方圧密終了後においてもその傾向が繰り返し再圧密試料よりも大きい。したがって、自然堆積地盤の変形解析において、地盤の異方性、特に層状の地盤のような積層異方性を考えることが重要と思われる。その解析法については付録で簡単に述べる。また、同表に、(10)式を用いて粘土の構造骨格が弾性とした場合の等方圧縮に関する弾性定数  $G$  を示す。また、Table 5 に偏差応力を加えた場合

Table 5 Test results (Shear).

| Sample | Test No. | $w_f$<br>(%) | $e_{vf}$<br>(%) | $G$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $E$<br>kg/cm <sup>2</sup> | Calculated<br>$w_f$ | (5)/(1)<br>(%) |
|--------|----------|--------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|---------------------|----------------|
|        |          | (1)          | (2)             | (3)                       | (4)                       | (5)                 | (6)            |
| A      | A-2      | 4.332        | 7.757           | 27.1                      | 40.5                      | 2.895               | 66.8           |
|        | A-3      | 5.862        | 6.806           | 30.9                      | 68.0                      | 2.619               | 44.7           |
|        | A-5      | 6.371        | 12.318          | 34.1                      | 70.2                      | 4.284               | 67.2           |
| B      | B-2      | 2.850        | 4.570           | 65.6                      | 89.6                      | 1.802               | 63.2           |
|        | B-3      | 4.220        | 5.150           | 58.3                      | 69.9                      | 2.432               | 57.6           |
|        | B-5      | 4.546        | 7.959           | 75.4                      | 52.9                      | 3.362               | 74.0           |
|        | B-7      | 6.640        | 10.540          | 85.4                      | 50.4                      | 4.504               | 67.8           |
| C      | C-2      | 1.671        | 3.100           | 96.8                      | 58.1                      | 1.463               | 87.6           |
|        | C-3      | 2.516        | 3.977           | 75.4                      | 75.8                      | 1.986               | 78.9           |
|        | C-5      | 2.285        | 4.779           | 125.6                     | 78.1                      | 1.913               | 83.7           |
|        | C-6      | 2.829        | 4.033           | 148.8                     | —                         | —                   | —              |

の実験終了時の鉛直ひずみ  $w_f$  と体積ひずみ  $e_{vf}$  および(10)式より求めた等方圧縮およびせん断に関する弾性定数  $G, E$  を示す。また、これらの弾性定数を用いて、(8)式より計算した試験終了時における鉛直ひずみ、およびその実験値に対する比を同表に示す。この表の第6欄より、計算値は実験値に比べかなり小さくなっているがこれはせん断に関する弾性定数を供試体の初期沈下のみから決定したことによるものであり、したがって、体積ひずみと鉛直ひずみの両者を忠実に表現するためには、少なくともせん断に関してはバネだけでは不十分であることを示している。Fig. 10 (a) (b) にそれぞれ試料 A, B の  $G$  および  $E$  と偏差

応力の平均応力に対する比  $\frac{q-p}{(2p+q)/3}$  との関係を示す。この図は、試料の応力～ひずみ関係の非線形性を示している。特に同じ平均主応力のもとにおいて、試料 A では  $G, E$  とともに偏差応力の増加に対し増加し、

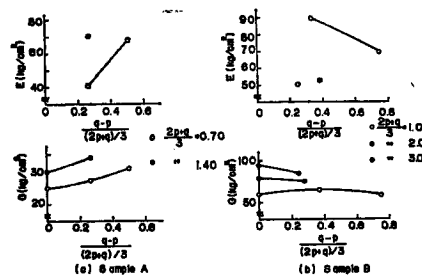


Fig. 10 Elastic constants v.s.  $\frac{q-p}{(2p+q)/3}$  relationship.

過圧密粘土の傾向を示しているのに対し、試料 B では逆に正規圧密粘土の傾向を示している。これは試料 A が先行圧密圧力  $0.5 \text{ kg/cm}^2$  の近くの  $\sigma_c = 0.7 \text{ kg/cm}^2$  で圧密した試料を用いたのに対し、試料 B は同じ先行圧密圧力に対して  $\sigma_c = 1.0 \text{ kg/cm}^2$  で圧密した試料を用いたことによるものと思われるが、正規圧密粘土においてもクリープ試験ではこのようにダイレイタンスーが正になることは今後、土の応力～ひずみ関係を考える上で考慮する必要がある。2.2 に述べた方法により (15) 式から粘弾性定数を求めた結果を Table 6 (a), (b) に示す。また、試験 B-4 の計算結果と実験結果の比較を Fig. 11 に示す。この図に示したように、2 次圧密領域の各 log cycle 毎に粘弾性定数を決めていけば、十分実験曲線を追跡できる。しかし、このような解析方法は土の粘弾性を不連続な遅延時間をもつ多数のモデルでおきかえて解析するものであるが、さらに排水クリープ試験の結果から一般的に遅延時間の分布を求めることは不連続な遅延時間をもった粘弾性モデルによる解析を進めていく上で重要なことと思われる。

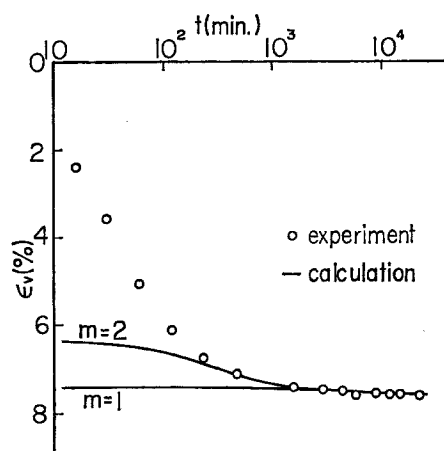
Table 6 Viscoelastic constants of soil sample (Triaxial drained creep).

(a) Sample A

| Test No. | $m$<br>(=n) | $G$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $E$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $G_1$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\zeta_1$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^7$ | $E_1$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\eta_1$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^5$ | $G_2$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\zeta_2$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^5$ |
|----------|-------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------|
| A-1      | 0           | 24.9                      | —                         | —                           | —                                                    | —                           | —                                                   | —                           | —                                                    |
|          | 1           | 27.5                      | —                         | 257.2                       | 0.153                                                | —                           | —                                                   | —                           | —                                                    |
|          | 2           | 59.0                      | —                         | 257.2                       | 0.153                                                | —                           | —                                                   | 51.5                        | 0.222                                                |
| A-2      | 0           | 27.1                      | 40.5                      | —                           | —                                                    | —                           | —                                                   | —                           | —                                                    |
|          | 1           | 29.8                      | 40.5                      | 260.0                       | 0.140                                                | 7.9                         | 0.378                                               | —                           | —                                                    |
| A-3      | 0           | 30.9                      | 68.0                      | —                           | —                                                    | —                           | —                                                   | —                           | —                                                    |
|          | 1           | 35.2                      | 68.0                      | 281.0                       | 0.131                                                | 7.2                         | 0.303                                               | —                           | —                                                    |
| A-4      | 0           | 29.8                      | —                         | —                           | —                                                    | —                           | —                                                   | —                           | —                                                    |
|          | 1           | 34.0                      | —                         | 173.1                       | 0.292                                                | —                           | —                                                   | —                           | —                                                    |
|          | 2           | 55.4                      | —                         | 173.1                       | 0.292                                                | —                           | —                                                   | 87.8                        | 0.351                                                |
| A-5      | 0           | 34.1                      | 70.2                      | —                           | —                                                    | —                           | —                                                   | —                           | —                                                    |
|          | 1           | 35.2                      | 70.2                      | 974.5                       | 0.535                                                | 5.3                         | 0.351                                               | —                           | —                                                    |

## (b) Sample B

| Test No. | $m$<br>(=n) | $G$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $E$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $G_1$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\zeta_1$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^8$ | $E_1$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\eta_1$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^8$ |
|----------|-------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------------------|
| B-1      | 0           | 59.3                      | —                         |                             |                                                      |                             |                                                     |
| B-2      | 0           | 65.6                      | 89.6                      |                             |                                                      |                             |                                                     |
|          | 1           | 68.3                      | 89.6                      | 1665                        | 0.105                                                | 22.9                        | 0.155                                               |
| B-3      | 0           | 58.3                      | 69.9                      |                             |                                                      |                             |                                                     |
|          | 1           | 61.5                      | 69.9                      | 1100                        | 0.047                                                | 270.3                       | 0.184                                               |
| B-4      | 0           | 78.7                      | —                         |                             |                                                      |                             |                                                     |
|          | 1           | 80.9                      | —                         | 2958                        | 0.148                                                |                             |                                                     |
| B-5      | 0           | 75.4                      | 52.9                      |                             |                                                      |                             |                                                     |
|          | 1           | 76.6                      | 52.9                      | 4133                        | 0.362                                                | 31.5                        | 0.181                                               |
| B-6      | 0           | 94.1                      | —                         |                             |                                                      |                             |                                                     |
| B-7      | 0           | 85.4                      | 50.4                      |                             |                                                      |                             |                                                     |
|          | 1           | 91.4                      | 50.4                      | 1295                        | 0.044                                                | 23.2                        | 0.114                                               |

Fig. 11 Plots of calculated and experimental values v.s. log  $t$  (B-4).

## 3.3 標準圧密試験の結果

三軸排水クリープ試験と同じ3種類の試料 A, B, C について標準圧密試験を行なった。これらの試験条件は Table 3 に示した通りである。各試料について鉛直ひずみ  $w$  を時間の対数に対してプロットすると Fig. 12 (a), (b), (c) のようになる。これらの圧密曲線の形は三軸排水クリープ試験の場合と同様に試料 A, B, C の順に一次圧密領域が早く終了している。2.3 で述べた方法により (23) 式より各試料の粘弾性定数を求めると Table 7 (a), (b), (c) のようになる。また, SC-2 の場合, この粘弾性定数を用いて各モデル数に対して計算した沈下量を時間の対数に対してプロットすると Fig. 13 のようになる。この図より, モデルの増加とともに両者の近似はよくなっているが, モデルが 4 個以上では 3 個の場合と大差がないようである。Fig. 14 (a), (b), (c), (d) に増加圧力  $\Delta p$  に対する  $l=0$  の場合のバネ定数  $F$  と各 Voigt モデルのバネ

定数のプロットを示す。Fig. 14 (a) から  $F$  が  $dp$  に対して3種類とも平行に増加しているが、これは増加圧力  $dp$  に対して試料の沈下ひずみが原点を通る双曲線で表わされることを示している。Fig. 14 (b), (c) (d) はそれぞれ  $F_1, F_2, F_3$  を  $dp$  に対してプロットしたものであるが、いずれも  $dp$  の増加に対して増加す

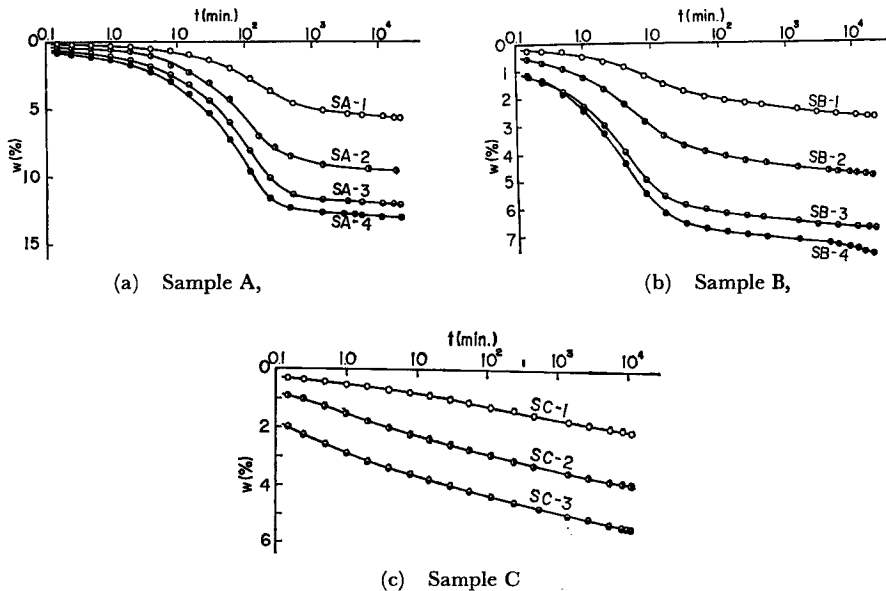


Fig. 12 Consolidation curves (one dimensional one).

Table 7 Viscoelastic constants of consolidation.

(a) Sample A

| Test No. | $l$ | $F$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $F_1$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_1$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^7$ | $F_2$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_2$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^5$ |
|----------|-----|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|
| SA-1     | 0   | 9.0                       |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 10.9                      | 46                          | 0.013                                              |                             |                                                    |
|          | 2   | 28.3                      | 46                          | 0.013                                              | 17.8                        | 0.039                                              |
| SA-2     | 0   | 10.8                      |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 10.9                      | 275                         | 0.154                                              |                             |                                                    |
|          | 2   | 13.8                      | 275                         | 0.154                                              | 51.2                        | 0.208                                              |
| SA-3     | 0   | 13.0                      |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 13.0                      | 423                         | 0.205                                              |                             |                                                    |
|          | 2   | 15.4                      | 423                         | 0.205                                              | 79.8                        | 0.258                                              |
| SA-4     | 0   | 15.4                      |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 15.8                      | 504                         | 0.313                                              |                             |                                                    |
|          | 2   | 17.2                      | 504                         | 0.313                                              | 195                         | 0.858                                              |

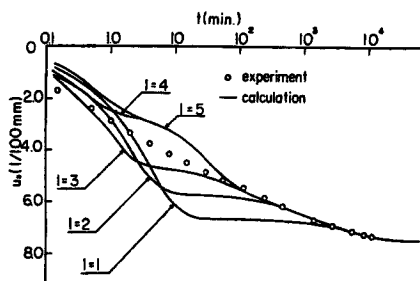
(b) Sample B

| Test No. | $l$ | $F$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $F_1$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_1$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^7$ | $F_2$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_2$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^6$ | $F_3$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_3$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^5$ |
|----------|-----|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|
| SB-1     | 0   | 19.0                      |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 20.2                      | 178                         | 0.128                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 2   | 23.1                      | 178                         | 0.128                                              | 160                         | 0.101                                              |                             |                                                    |
|          | 3   | 31.9                      | 178                         | 0.128                                              | 160                         | 0.101                                              | 84                          | 0.037                                              |
| SB-2     | 0   | 20.0                      |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 21.8                      | 338                         | 0.261                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 2   | 23.4                      | 338                         | 0.261                                              | 316                         | 0.175                                              |                             |                                                    |
|          | 3   | 28.1                      | 338                         | 0.261                                              | 316                         | 0.175                                              | 141                         | 0.077                                              |
| SB-3     | 0   | 24.5                      |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 23.0                      | 528                         | 0.410                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |
| SB-4     | 0   | 26.0                      |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 28.0                      | 217                         | 0.490                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 2   | 28.7                      | 217                         | 0.490                                              | 1027                        | 0.688                                              |                             |                                                    |
|          | 3   | 32.0                      | 217                         | 0.490                                              | 1027                        | 0.688                                              | 285                         | 0.117                                              |

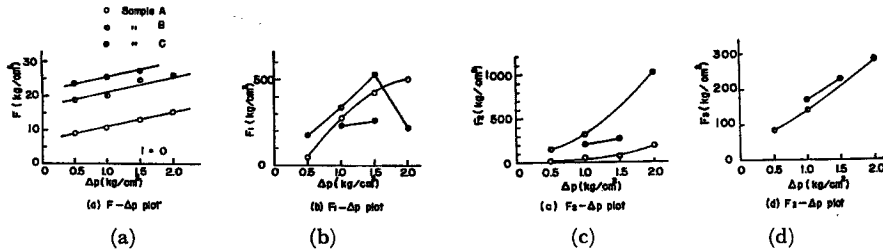
Table 7

(c) Sample C

| Test No. | $l$ | $F$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $F_1$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_1$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^7$ | $F_2$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_2$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^6$ | $F_3$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_3$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^5$ | $F_4$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_4$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^4$ | $F_5$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\xi_5$<br>kg min/cm <sup>2</sup><br>$\times 10^2$ |
|----------|-----|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------------|
| SC-1     | 0   | 23.8                      |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
| SC-2     | 0   | 25.6                      |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 28.2                      | 232                         | 0.140                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 2   | 32.8                      | 232                         | 0.140                                              | 201                         | 0.159                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 3   | 40.6                      | 232                         | 0.140                                              | 201                         | 0.159                                              | 171                         | 0.129                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 4   | 73.4                      | 232                         | 0.140                                              | 201                         | 0.159                                              | 171                         | 0.129                                              | 90.8                        | 0.237                                              |                             |                                                    |
|          | 5   | 194.1                     | 232                         | 0.140                                              | 201                         | 0.159                                              | 171                         | 0.129                                              | 90.8                        | 0.238                                              | 118                         | 0.881                                              |
| SC-3     | 0   | 27.5                      |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 1   | 29.8                      | 261                         | 0.237                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 2   | 33.4                      | 261                         | 0.237                                              | 274                         | 0.189                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |                             |                                                    |
|          | 3   | 39.1                      | 261                         | 0.237                                              | 274                         | 0.189                                              | 230                         | 0.165                                              |                             |                                                    |                             |                                                    |

Fig. 13 Plots of calculated and experimental settlements v.s. log  $t$  (SC-2).



Fig. 14 Plots of elastic constants v.s.  $\Delta p$ .

る傾向にある。 $F_i$  ( $i=1,2,3$ ) の値は遅延時間  $\varepsilon_i/F_i$  付近の log cycle における沈下量に対応するものであり、したがってこれらの図からそれぞれの log cycle における沈下量は  $\Delta p$  の増大に対して次第に減少することを示すものである。最後に、三軸排水クリープ試験より得られた粘弾性定数を用いて、(17)式により一次元圧密状態における沈下量を計算し、これを標準圧密試験から得られた沈下量と比較すると Table 8 (a), (b) のようになる。比較はいずれも試験終了時における鉛直ひずみ  $w_f$  を増加圧力  $\Delta p$  で割ったもので比較している。なお試料 A では静止土圧係数  $K_0$  を約 0.5 と考えて、増加圧力載荷前の圧密時における平均主応力が

Table 8 Comparison of settlement from triaxial and one dimensional tests.

(a) settlements calculated from triaxial drained creep tests

| Sample | Test No. | $w_f/\Delta p$ | $w_f/\Delta p$ |
|--------|----------|----------------|----------------|
|        |          | (1)<br>$m=n=0$ | (2)<br>$m=n=1$ |
| A      | A-2      | 0.0278         | 0.0751         |
|        | A-3      | 0.0180         | 0.0677         |
|        | A-5      | 0.0172         | 0.0684         |
| B      | B-2      | 0.0123         | 0.0294         |
|        | B-3      | 0.0151         | 0.0177         |
|        | B-5      | 0.0166         | 0.0262         |
|        | B-7      | 0.0161         | 0.0256         |

(b) final settlements from one dimensional consolidation tests.

| Sample | Test No. | $w/\Delta p$ |
|--------|----------|--------------|
| A      | SA-1     | 0.113        |
|        | SA-2     | 0.095        |
|        | SA-3     | 0.080        |
|        | SA-4     | 0.065        |
| B      | SB-1     | 0.055        |
|        | SB-2     | 0.049        |
|        | SB-3     | 0.045        |
|        | SB-4     | 0.039        |

両料試で等しくなるようにしている。また、試料 B では、両試験の圧密圧力が等しくなっている。Table 8 において、 $m=n=0$  の場合、すなわち土の構造骨格を弾性とした場合の三軸排水クリープ試験から求めた  $w_f/\Delta p$  の値は、標準圧密試験の結果の 1/3~1/4 になっている。これは三軸排水クリープ試験においてせん断に関する弾性定数を載荷直後における試料の沈下量のみから決定してその後の鉛直沈下を十分考慮に入れてないことによるものと思われる。Table 8 (a) の第 2 欄に  $m=n=1$  の場合、すなわち等方圧縮とせん断に対して単独バネに 1 つの Voigt モデルを入れた場合の  $w_f/\Delta p$  を示しているが、これは標準圧密試験の結果にかなり近くなっている。しかし、なお両者には差異があり、その原因として、試料の異方性、形状や透水条件の相違、荷重レベルの違いなどが考えられるが、現時点では明確にはわからない。

#### 4. 結 語

本文においては、3種の試料を用いて粘土の三軸排水クリープ試験と標準圧密試験を行ない、これらのクリープ特性を調べた。また、線形粘弾性理論を用いて両試験から得られた実験結果より、これらの試料の粘

弾性定数を決定した。本研究においてつぎのことがいえる。

1) (15)式を用いて、粘土の三軸排水クリープ試験からせん断および等方圧縮に関する粘弾性定数を決定することができる。さらに、(9)式により近似的に透水係数  $k$  も決定できる。

2) (23)式から 1) と同様にして一次元圧密に関する粘弾性定数も決定でき、(19)式を用いると透水係数も近似的に決定できる。

3) 一次元圧密をうけた試料では異方性を十分考慮した沈下解析が必要であり、特に不攪乱試料に対してはこのことが重要である。

4) 三軸排水クリープ試験およびこれと標準圧密試験結果との比較から土の構造骨格を弾性とした場合の沈下解析では不十分である。

5) 粒度の異なる土の三軸排水クリープ試験と標準圧密試験の結果から、土のクリープ現象は主として土粒子相互間の直接的作用が基本になっているものと思われる。

以上、本研究において得られた結果について述べたが今後これらの結果をふまえてさらに土のクリープ特性に関する実験および解析を進めていくと同時に、実際の粘土地盤の沈下解析へ応用するために、土槽による平面ひずみ条件のもとにおける載荷試験などを行ない、これらの実験データと 3 次元圧密理論を結びつけていきたいと思っている。

本研究において、終始柴田徹教授に御指導を頂いた。また、試料 A, B の標準圧密試験は京都大学工学部学生伊藤文平氏によるものである。ここにともに記して心からの謝意を表する次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) Taylor, D.W. and W. Merchant: A Theory of Clay Consolidation Accounting for Secondary Compression, Journ. Math., Vol. 19-3, p. 167.
- 2) 村山朔郎・柴田 徹: 粘土のレオロジー的特性について, 土木学会論文集第 40 号, 昭和 31 年, pp. 1-31.
- 3) Lo, K.Y.: Secondary Compression of Clays, A.S.C.E., SM4, 1961, pp. 61-87.
- 4) Tan, T.: Determination of the Rheological Parameters and the Hardening Coefficients of Clays, IUTAM symposium, Rheology and Soil Mechanics, Grenoble, 1964, pp. 256-270.
- 5) Schiffman, R.L., C.C. Ladd and A.T.-F. Chen: The Secondary Consolidation of Clay, IUTAM symposium, Rheology and Soil Mechanics, Grenoble, 1964, pp. 273-300.
- 6) Leonards, G.A. and A.G. Altschaeffl: Compressibility of Clay, A.S.C.E., SM5, 1964, pp. 133-155.
- 7) Biot, M.A.: General Theory of Three-dimensional Consolidation, Journ. Appl. Phys., Vol. 12, 1941, pp. 155-164.
- 8) Biot, M.A.: Theory of Deformation of Porous Viscoelastic Anisotropic Solid, Journ. Appl. Phys. Vol. 27, No 5, 1956, pp. 459-467.
- 9) Biot, M.A. and D.G. Willis: The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation, Journ. Appl. Mech., Vol. 79, 1957, pp. 594-601.
- 10) Gurtin, M.E. and E. Sternberg: On the Linear Theory of Viscoelasticity, Archi. Rat. Anal. Vol. 11, 1962, pp. 291-356.
- 11) 大槌正紀: 粘土の 3 次元圧密に関する一考察, 京都大学防災研究所年報第 14 号 B, 昭和 46 年, pp. 585-601.
- 12) Ishihara, K.: Effect of Rate of Loading on the modulus of Deformation of Materials Exhibiting Viscoelastic Behaviors, Trans. of J.S.C.E. No. 117, 1965, pp. 35-50.
- 13) Gibson, R.E. and K.Y. Lo: A Theory of Consolidation for Exhibiting Secondary Compression, N.G. I. Pub. No. 41, Oslo, 1961, pp. 1-16.
- 14) Terzaghi, K.: Theoretical Soil Mechanics, John Wiley, New York, 1943, pp. 265-296.
- 15) 八木則男: 京都大学工学研究科修士卒業論文, 第 186 号, 昭和 38 年

## 付 録

## 積層異方性材料の軸対称境界値問題の解

層状に堆積した自然堆積地盤のように、積層異方性を示す材料の解析には材料の異方性を考慮に入れた応力～ひずみ関係にもとづく変形解析が必要である。ここではこのような材料の円柱供試体が軸方向と半径方向に一定の外圧をうける場合の変形を等方性材料の場合と同様にして示す。

積層異方性粘弾性材料の応力～ひずみ関係は円柱座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  を本文の Fig. 1 のようにとり、 $x_3$  軸を積層面に垂直方向にとると線形粘弾性材料では線形弾性材料の場合 (cf. マトリックス有限要素法, O.C ツィエンキーヴィッツ, Y.K. チューン著, 吉識雅夫訳 p. 56) と同様に考えて

$$(\tau^{11}, \tau^{33}, x_1^2 \tau^{22}) = \left( e_{11}, e_{33}, \frac{e_{22}}{x_1^2} \right) * d \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_2 & B_4 & B_2 \\ B_3 & B_2 & B_1 \end{bmatrix} * d F^{-1} \dots \dots \dots (1)$$

$$(x_1 \tau^{12}, x_1 \tau^{23}, \tau^{31}) = \left( \frac{e_{12}}{x_1}, \frac{e_{23}}{x_1}, e_{31} \right) * d \begin{bmatrix} B_5 & 0 & 0 \\ 0 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & B_6 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

とかける。ここに、 $\tau^{ij}$ ,  $e_{ij}$  はそれぞれ応力およびひずみのテンソルで

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \{K_2 * dG_2 * d(G_2 + 2K_2) * d(G_1 + 2K_1) - K_1 * dG_1 \\ &\quad * d(K_3 - G_2) * d(K_3 - G_2) * d(K_3 - G_2)\} * dG_1 \\ B_2 &= 3K_1 * dK_2 * dG_1 * dG_2 * d(K_2 - G_2) \\ B_3 &= \{K_2 * dG_2 * d(K_1 - G_1) * d(G_2 + 2K_2) + K_1 * dG_1 \\ &\quad * d(K_3 - G_2) * d(K_3 - G_2)\} * dG_1 \\ B_4 &= 3K_2 * dK_2 * dG_2 * dG_2 * d(2G_1 + K_1) \\ B_5 &= G_1/2 \\ B_6 &= G_3/2 \\ F &= G_2 * dK_2 * d(2G_1 + K_1) * d(G_2 + 2K_2) - 2G_1 * dK_1 \\ &\quad * d(K_3 - G_2) * d(K_2 - G_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ここに \* 印は Stieltjes の合成積を示し、 $G_1, K_1$  は積層面内の変形に関する緩和関数、 $G_2, G_3, K_2$  は積層面に垂直な方向に関する緩和関数である。

軸対称条件下における力のつり合い式は、それぞれ  $x_1, x_2, x_3$  軸方向においてつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau^{11}}{\partial x_1} + \frac{\tau^{11}}{x_1} + \frac{\partial \tau^{13}}{\partial x_3} - x_1 \tau^{22} &= 0 \\ \frac{\partial \tau^{31}}{\partial x_2} + 3 \frac{\tau^{31}}{x_1} + \frac{\partial \tau^{23}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial \tau^{31}}{\partial x_1} + \frac{\tau^{31}}{x_1} + \frac{\partial \tau^{33}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ここで、変位ベクトルのテンソル成分  $u_i (i=1, 2, 3)$  とひずみテンソル  $e_{ij}$  の関係；

$$\begin{aligned} e_{11} &= -\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, e_{22} = -x_1 u_1, e_{33} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, e_{23} = e_{31} = 0, \\ e_{12} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

を用いて (4) 式を変位で表わして、変位ベクトル成分および変数を無次元化した

$$u_1 = a \cdot u_r, u_3 = h u_z, x_1 = ar, x_3 = hz$$

の  $u_r, u_z, r, z$  を用いると、変位で表わした  $r$  軸方向および  $z$  軸方向の力のつり合い式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) * d B_1 * d F^{-1} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{h^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} * d B_6 = 0 \\ & \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} * d B_4 * d F^{-1} + \frac{h^2}{2a^2} \left( -\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) * d B_6 \\ & + \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) * d \left( B_2 * d F^{-1} + \frac{B_6}{2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \tau^{11} &= - \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} * d B_1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} * d B_2 + \frac{u_r}{r} * d B_3 \right) * d F^{-1} \\ \tau^{22} &= - \frac{1}{a^2 r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} * d B_3 + \frac{\partial u_z}{\partial z} * d B_2 + \frac{u_r}{r} * d B_1 \right) * d F^{-1} \\ \tau^{33} &= - \left\{ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) * d B_2 + \frac{\partial u_z}{\partial z} * d B_4 \right\} * d F^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

(5) 式を境界条件 ;

$$0 \leq r \leq 1, z=0 \quad \text{で} \quad u_z=0, \tau_{13}=0$$

$$0 \leq r \leq 1, z=h \quad \text{で} \quad 2\pi \int_0^1 \tau^{33} r dr = \pi q, \tau^{13}=0$$

$$r=1, 0 \leq z \leq 1 \quad \text{で} \quad \tau^{11}=p, \tau^{13}=0$$

のもとに解く。境界条件より,  $u_r, u_z$  をそれぞれ  $z$  および  $r$  に無関係とすると, (5) 式は,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \\ & \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となり, これより,  $u_r = C_1 r, u_z = C_2 z$  となる。(6) 式を用いて境界条件から  $C_1, C_2$  を決定すると

$$C_1 = (p * d B_4 - q * d B_2) * d \{ 2 B_2 * d B_2 - B_4 * d (B_1 + B_3) \}^{-1}$$

$$C_2 = \{ q * d (B_1 + B_3) - 2 p * d B_2 \} * d \{ 2 B_2 * d B_2 - B_4 * d (B_1 + B_3) \}^{-1}$$

となる。したがって, 変位  $u_r, u_z$  は

$$\left. \begin{aligned} u_r &= (p * d B_4 - q * d B_2) * d \{ 2 B_2 * d B_2 - B_4 * d (B_1 + B_3) \}^{-1} r \\ u_z &= \{ q * d (B_1 + B_3) - 2 p * d B_2 \} * d \{ 2 B_2 * d B_2 - B_4 * d (B_1 + B_3) \}^{-1} z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

また体積ひずみを

$$e_v = - \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

から計算すると

$$e_v = - \{ 2 p * d (B_4 - B_2) + q * d (B_1 - B_2 + B_3) \} * d \{ 2 B_2 * d B_2 - (B_1 + B_3) * d B_4 \}^{-1} \dots\dots\dots (9)$$

ここに,  $\alpha$  を緩和関数とし,  $\beta = \alpha^{-1}$  とすると

$$\alpha * d \beta = \beta * d \alpha = h$$

$h$  は本文において述べた単位段階関数である。これらを(3)式で用いて  $G_1, G_2, G_3, K_1, K_2$  で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{r}{9} \left[ (2p+q) * d \{ K_1 * d K_2 * d (G_1 - G_2) - (K_1 + 2K_2) * d G_1 * d G_2 \} \right. \\ & \quad \left. + (q-p) * d \{ K_1 * d K_2 * d (2G_1 + G_2) + 2(K_2 - K_1) * d G_1 * d G_2 \} \right] \\ & \quad * d (K_1 * d K_2 * d G_1 * d G_2)^{-1} \\ u_z &= - \frac{z}{3} \{ (2p+q) * d K_2^{-1} + 2(q-p) * d G_2^{-1} \} \\ e_v &= - \frac{1}{3} \left[ 2 \{ K_1 * d K_2 * d (G_2 - G_1) - (K_1 + 2K_2) * d G_1 * d G_2 \} \right. \\ & \quad \left. - K_1 * d G_1 * d G_2 \right] * d (G_1 * d G_2 * d K_1 * d K_2)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$