

一次元基本セル・オートマトン Rule 150 と Rule 90 が 埋め込まれた対称二次元基本セル・オートマトンについて

京都教育大学教育学部数学科 川原田 茜*

Akane Kawaharada
Department of Mathematics, Kyoto University of Education

1 はじめに

一次元基本セル・オートマトンの Rule 150 と Rule 90 は極限集合がフラクタルになることで知られる線型セル・オートマトンである。本稿では、対称性を持つ二次元基本セル・オートマトンの軌道に Rule 150, Rule 90 の軌道が埋め込まれているケースをそれぞれ紹介する。

ここでは初期値として一点のみの状態が 1, その他の点の状態が 0 となるような場合のみを考えるため、対称二次元基本セル・オートマトンのうち、 $(T, L, C, R, B) = (0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ の次状態をそれぞれ 0, 1 と固定した 1024 個のセル・オートマトンを考える。数値計算の結果より、1024 個の対称二次元基本セル・オートマトンが生成する時間発展パターンは 346 種であることが分かっている [1]。この 346 種の時間発展パターンを調べると、時間発展パターンのタテヨコ断面が Rule 150 の時間発展パターンと一致するのは Table 2 の F_{S1}, F_{S2}, F_{S3} の 3 つのみであることが分かった。さらに F_{S3} については、ナナメ断面も Rule 150 と一致している。タテヨコ断面とナナメ断面がいずれも Rule 90 の時間発展パターンと一致するのは Table 2 の F_{S4} のみであるが、タテヨコ断面のみか、ナナメ断面のみが Rule 90 で表されるものは F_{S5} から F_{S10} までの 6 個が該当することが分かった。

Rule 150 と F_{S1}, F_{S2}, F_{S3} との関係については第 3 章, Rule 90 と F_{S4} から F_{S10} までのセル・オートマトンとの関係については第 4 章で論じる。

2 準備

各セルで二値 $\{0, 1\}$ をとるセル・オートマトンを考える。 d 次元の配置空間を $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ とおき、以下のような配置 $x_o \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ を考える。

$$(x_o)_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i = \mathbf{0} (= (0, 0, \dots, 0)), \\ 0 & \text{if } i \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}, \end{cases} \quad (1)$$

Definition 1. 一次元基本セル・オートマトン (1dECA) $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, F)$ の遷移規則は、配置 $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ に対して、

$$(Fx)_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

で与えられる。ただし $f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ は局所規則である。

1dECA は 256 個あるが、ここでは Rule 150 と Rule 90 について考える。これらの遷移規則は Table 1 のように与えられ、

$$(F_{150}x)_i = x_{i-1} + x_i + x_{i+1} \pmod{2}, \quad (3)$$

$$(F_{90}x)_i = x_{i-1} + x_{i+1} \pmod{2}, \quad (4)$$

とも表せる。

*E-mail: aka@kyokyo-u.ac.jp

Table 1: 1dECA Rule 150 と Rule 90 の遷移規則

$x_{i-1}x_i x_{i+1}$	111	110	101	100	011	010	001	000
$(F_{150}x)_i$	1	0	0	1	0	1	1	0
$(F_{90}x)_i$	0	1	0	1	1	0	1	0

Definition 2. (i) **二次元基本セル・オートマトン (2dECA)** $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}, F)$ の遷移規則は以下で与えられる. 配置 $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ に対して,

$$(Fx)_{i,j} = f \begin{pmatrix} & x_{i,j+1} & \\ x_{i-1,j} & x_{i,j} & x_{i+1,j} \\ & x_{i,j-1} & \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} T \\ LCR \\ B \end{pmatrix}, \quad (i, j) \in \mathbb{Z}^2. \quad (5)$$

(ii) 局所規則 $f : \{0, 1\}^5 \rightarrow \{0, 1\}$ が以下の条件 (上下左右対称, 回転対称) を満たすとき, 2dECA $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}, F)$ は**対称 2dECA (Sym-2dECA)** であるという.

$$f \begin{pmatrix} T \\ LCR \\ B \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} B \\ LCR \\ T \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} T \\ RCL \\ B \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} T \\ LCR \\ B \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} L \\ BCT \\ R \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} B \\ RCL \\ T \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} R \\ TCB \\ L \end{pmatrix}. \quad (6)$$

2dECA は 2^{32} 個あるが, そのうち 2^{12} 個が Sym-2dECA である. Table 2 は 10 個の Sym-2dECA の遷移規則であり, Table 中の * は 0, 1 いずれの値をとってもよいものとする (Result 1 より, これらの遷移は初期値 x_o からの時間発展に影響しない).

Table 2: Sym-2dECA の遷移規則

$\begin{smallmatrix} T \\ LCR \\ B \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 111 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 111 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 010 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 011 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 010 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 010 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 101 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 101 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 000 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 001 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 000 \\ 1 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 000 \\ 0 \end{smallmatrix}$
F_{S1}	1	0	*	*	0	1	0	*	0	0	1	0
F_{S2}	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
F_{S3}	1	0	*	0	0	1	0	1	*	1	1	0
F_{S4}	*	*	*	*	*	0	0	1	*	1	1	0
F_{S5}	*	*	*	*	*	0	0	*	*	0	1	0
F_{S6}	0	0	*	0	0	1	0	0	0	1	1	0
F_{S7}	0	0	*	0	0	1	0	0	1	1	1	0
F_{S8}	0	0	*	0	0	1	0	1	*	1	1	0
F_{S9}	0	0	0	1	1	1	0	1	*	1	1	0
F_{S10}	0	1	*	1	1	1	1	1	*	1	1	0

(* is 0 or 1.)

Sym-2dECA の対称性について以下が得られる.

Proposition 1. Sym-2dECA F の初期値 x が上下左右対称 (任意の $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ に対して $x_{i,j} = x_{i,-j}$ か $x_{i,j} = x_{-i,j}$ を満たす) で与えられるとき, 任意の時刻 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

(i) $F^n x$ は上下左右対称 ($(F^n x)_{i,j} = (F^n x)_{i,-j}$, $(F^n x)_{i,j} = (F^n x)_{-i,j}$) である.

(ii) $F^n x$ はナナメ対称 (任意の $s, t, i \in \mathbb{Z}$ に対して $(F^n x)_{s+i,t+i} = (F^n x)_{-s+i,-t+i}$, $(F^n x)_{s+i,t-i} = (F^n x)_{-s+i,-t-i}$ を満たす) である.

Proof. (i) 上下対称な初期値 x ($x_{i,j} = x_{i,-j}$) を考えると, 局所規則の対称性より $(Fx)_{i,j} = (Fx)_{i,-j}$ である. ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $(F^k x)_{i,j} = (F^k x)_{i,-j}$ とすると, $(F^{k+1} x)_{i,j} = (F(F^k x))_{i,j} = (F(F^k x))_{i,-j} = (F^{k+1} x)_{i,-j}$ となる. 左右対称も同様に示すことができる.

- (ii) ナナメ対称な初期値 x ($x_{s+i,t+i} = x_{-s+i,-t+i}$) を考えると、局所規則の対称性より $(Fx)_{s+i,t+i} = (Fx)_{-s+i,-t+i}$ である。ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $(F^k x)_{s+i,t+i} = (F^k x)_{-s+i,-t+i}$ とすると、 $(F^{k+1} x)_{s+i,t+i} = (F(F^k x))_{s+i,t+i} = (F(F^k x))_{-s+i,-t+i} = (F^{k+1} x)_{-s+i,-t+i}$ となる。もう一方のナナメ対称性 $(F^n x)_{s+i,t-i} = (F^n x)_{-s+i,-t-i}$ も同様に示すことができる。

□

初期値 x_o からの Sym-2dECA の軌道については以下の数値計算結果が得られている。

Result 1 ([1]). 数値計算結果より、時間ステップ $0 \leq n \leq 1024$ に対して以下が成り立つ。Table 2 の Sym-2dECA について、初期値 x_o からの軌道において、遷移が * となる近傍の状態組は出現しない。

Conjecture 1. Result 1 がすべての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について成り立つ。

3 Rule 150 が埋め込まれた Sym-2dECA

Sym-2dECA F_{S1} , F_{S2} , F_{S3} と 1dECA Rule 150 との関係について論じる。初期値 x_o からの Sym-2dECA の時間発展パターン 346 種のうち、断面に Rule 150 が埋め込まれているのは 3 つのみであった。これら 3 つの時間発展パターンのタテヨコ断面には Rule 150 が埋め込まれており、 F_{S3} のナナメ断面には Rule 150 が埋め込まれていることを示す。

3.1 Sym-2dECA F_{S1} と 1dECA Rule 150

Sym-2dECA F_{S1} の遷移規則は以下の式で与えられる。

$$(F_{S1}x)_{i,j} = C + T + R + B + L \pmod{2}. \quad (7)$$

このとき、 $f(T, L, C, R, B) = f(1, 0, 1, 0, 1) = f(0, 0, 1, 1, 1) = f(0, 1, 0, 1, 1) = 1$ としている点に注意する。(Conjecture 1 より、これらの遷移は初期値 x_o からの軌道に影響しない。) 初期値 x_o からの F_{S1} の軌道は Figure 1 のようになる。



Figure 1: Sym-2dECA F_{S1} の時間発展パターン $\{F_{S1}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

Theorem 1. Conjecture 1 が成り立つと仮定すると、 F_{S1} の初期値 x_o からの時間発展パターンのタテとヨコの断面 ($\{F_{S1}^n x_o\}_{n \geq 0} \mid_{0,j}$, $\{F_{S1}^n x_o\}_{n \geq 0} \mid_{i,0}$) は、それぞれ 1dECA Rule 150 の軌道 $\{F_{150}^n x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する。(Figure 2 (a) 参照。)

Proof. Proposition 1 (i) より、時間発展パターンは上下左右対称であるから、

$$(F_{S1}^{n+1} x_o)_{0,j} = (F_{S1}^n x_o)_{0,j} + (F_{S1}^n x_o)_{1,j} + (F_{S1}^n x_o)_{-1,j} + (F_{S1}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S1}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2} \quad (8)$$

$$= (F_{S1}^n x_o)_{0,j} + (F_{S1}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S1}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2}. \quad (9)$$

$j = 0$ のときも同様に示せるので、時間発展パターンのタテヨコ断面はそれぞれ 1dECA Rule 150 で表されることが分かる。

□

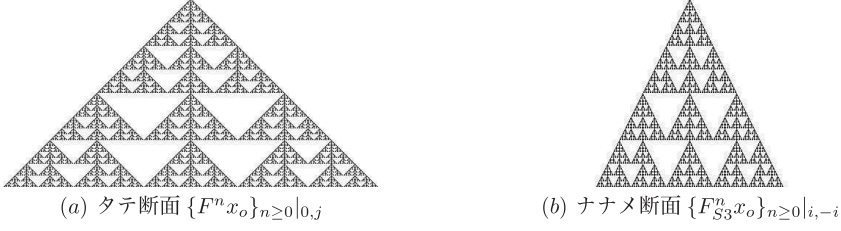


Figure 2: 初期値 x_o からの F_{S1} , F_{S2} , F_{S3} の時間発展パターン of タテ断面 $\{F^n x_o\}_{n \geq 0 | 0, j}$ と F_{S3} のナナメ断面 $\{F^n_{S3} x_o\}_{n \geq 0 | i, -i}$

3.2 Sym-2dECA F_{S2} と 1dECA Rule 150

Sym-2dECA F_{S2} の遷移規則は以下の式で与えられる.

$$(F_{S2}x)_{i,j} = (C + T + R + B + L) + (1 - C)(TR + RB + BL + LT) \pmod{2}. \quad (10)$$

初期値 x_o からの F_{S2} の軌道は Figure 3 のようになる.



Figure 3: Sym-2dECA F_{S2} の時間発展パターン $\{F^n_{S2} x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

Theorem 2. F_{S2} の初期値 x_o から時間発展パターンのタテとヨコの断面 ($\{F^n_{S2} x_o\}_{n \geq 0 | 0, j}$, $\{F^n_{S2} x_o\}_{n \geq 0 | i, 0}$) はそれぞれ 1dECA Rule 150 の軌道 $\{F^n_{150} x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する. (Figure 2 (a) 参照.)

Proof. Proposition 1 (i) より, 初期値 x_o からの時間発展パターンは上下左右対称であるから,

$$\begin{aligned} (F_{S2}^{n+1} x_o)_{0,j} &= ((F_{S2}^n x_o)_{0,j} + (F_{S2}^n x_o)_{1,j} + (F_{S2}^n x_o)_{-1,j} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j-1}) \\ &\quad + (1 - (F_{S2}^n x_o)_{0,j})((F_{S2}^n x_o)_{1,j}(F_{S2}^n x_o)_{0,j-1} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j-1}(F_{S2}^n x_o)_{-1,j} \\ &\quad + (F_{S2}^n x_o)_{-1,j}(F_{S2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j+1}(F_{S2}^n x_o)_{1,j}) \pmod{2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= ((F_{S2}^n x_o)_{0,j} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j-1} + (F_{S2}^n x_o)_{1,j}(1 - (F_{S2}^n x_o)_{0,j}) \\ &\quad \times ((F_{S2}^n x_o)_{0,j-1} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j-1} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j+1}) \pmod{2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$= (F_{S2}^n x_o)_{0,j} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S2}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2}. \quad (13)$$

$j = 0$ のときも同様に示せるので, 時間発展パターンのタテヨコ断面はそれぞれ 1dECA Rule 150 で表されることが分かる. $\square$

3.3 Sym-2dECA F_{S3} と 1dECA Rule 150

Sym-2dECA F_{S3} の遷移規則は以下の式で与えられる.

$$(F_{S3}x)_{i,j} = x_{i,j} + \max(x_{i+1,j}, x_{i-1,j}, x_{i,j+1}, x_{i,j-1}) + x_{i+1,j}x_{i-1,j}x_{i,j+1}x_{i,j-1} \pmod{2}. \quad (14)$$

このとき, $f(T, L, C, R, B) = f(1, 0, 1, 0, 1) = 0$, $f(T, L, C, R, B) = f(1, 0, 0, 0, 1) = 1$ としている点に注意する. (Conjecture 1 より, これら 2 つの遷移は初期値 x_o からの軌道に影響しない.) 初期値 x_o からの F_{S3} の軌道は Figure 4 のようになる.



Figure 4: Sym-2dECA F_{S3} の時間発展パターン $\{F_{S3}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

Theorem 3. Conjecture 1 が成り立つと仮定するとき, 以下を得る.

- (i) F_{S3} の初期値 x_o から時間発展パターンのタテとヨコの断面 ($\{F_{S3}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$, $\{F_{S3}^n x_o\}_{n \geq 0|i,0}$) は, それぞれ 1dECA Rule 150 の軌道 $\{F_{150}^n x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する. (Figure 2 (a) 参照.)
- (ii) 偶数時刻 $n = 2k$ と奇数時刻 $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対する F_{S3} の初期値 x_o から時間発展パターンにおいて, それぞれのナナメ断面 ($\{F_{S3}^{2k} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$, $\{F_{S3}^{2k+1} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$) は 1dECA Rule 150 の軌道 $\{F_{150}^n x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する. (Figure 2 (b) 参照.)

Proof of Theorem 3 (i). 式 (14) において $i = 0$ とすると,

$$(F_{S3} x)_{0,j} = x_{0,j} + \max(x_{1,j}, x_{-1,j}, x_{0,j+1}, x_{0,j-1}) + x_{1,j}x_{-1,j}x_{0,j+1}x_{0,j-1} \pmod{2}. \quad (15)$$

Proposition 1 (i) より, 初期値 x_o のとき時間発展パターンは左右対称であるから

$$(F_{S3}^{n+1} x_o)_{0,j} = (F_{S3}^n x_o)_{0,j} + \max((F_{S3}^n x_o)_{1,j}, (F_{S3}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S3}^n x_o)_{0,j-1}) \\ + (F_{S3}^n x_o)_{1,j}(F_{S3}^n x_o)_{0,j+1}(F_{S3}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2} \quad (16)$$

$$= \begin{cases} (F_{S3}^n x_o)_{0,j} & \text{if } ((F_{S3}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S3}^n x_o)_{1,j}, (F_{S3}^n x_o)_{0,j-1}) = (0, 0, 0), (1, 1, 1), \\ 1 - (F_{S3}^n x_o)_{0,j} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (17)$$

式 (16) の 2 式目は以下のふたつの場合に分けられる. $((F_{S3}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S3}^n x_o)_{1,j}, (F_{S3}^n x_o)_{0,j-1}) = (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)$ のときは $(F_{S3}^{n+1} x_o)_{0,j} = 1 - (F_{S3}^n x_o)_{0,j}$ であり, $((F_{S3}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S3}^n x_o)_{1,j}, (F_{S3}^n x_o)_{0,j-1}) = (0, 1, 0), (1, 0, 1)$ のときは初期値 x_o からの時間発展には現れないので無視できる. よって $(F_{S3}^{n+1} x_o)_{0,j} = (F_{S3}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S3}^n x_o)_{0,j} + (F_{S3}^n x_o)_{0,j+1} \pmod{2}$ と表せるので, タテ断面の局所遷移規則は 1dECA Rule 150 に従っていることが分かる.

同様に, 初期値 x_o とするとき $j = 0$ に対して時間発展パターンは対称であるから $(F_{S3}^n x_o)_{i,1} = (F_{S3}^n x_o)_{i,-1}$ であり, ヨコ断面も Rule 150 で生成されていることが分かる. $\square$

Theorem 3 (ii) を示す. まず以下の Lemma を考える.

Lemma 1. F_{S3} の x_o からの時間発展パターンは, 任意の時刻 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $(F_{S3}^n x_o)_{l-m,\pm(m+1)} = (F_{S3}^n x_o)_{l-m+1,\pm m}$, $(F_{S3}^n x_o)_{-(l-m),\pm(m+1)} = (F_{S3}^n x_o)_{-(l-m+1),\pm m}$ ($0 \leq m \leq l$) である.

Proof. Proposition 1 (i) より, 初期値 x_o からの時間発展パターンは上下左右対称であるから $i, j \geq 0$ の場合のみを考えれば十分である. 帰納法によって次式を示す.

$$(F_{S3}^n x_o)_{l-m,m+1} = (F_{S3}^n x_o)_{l-m+1,m} \quad (0 \leq m \leq l). \quad (18)$$

初期値 x_o からの時間発展を計算すると,

$$(F_{S_3}^1 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (0,0), (1,0), (0,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (19)$$

$$(F_{S_3}^2 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (0,0), (2,0), (0,2), (1,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (20)$$

$$(F_{S_3}^3 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (0,0), (2,0), (0,2), (1,1), (3,0), (2,1), (1,2), (0,3), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (21)$$

より, $n \leq 3$ のとき式 (18) を満たす. ある時刻 $n = k (\geq 3)$ に対して式 (18) が成り立っていると仮定すると, $(F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m,m+1} = (F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m+1,m}$ となることを示す.

Table 3: $(F_{S_3}^k x_o)_{l-m,m+1}$, $(F_{S_3}^k x_o)_{l-m+1,m}$ が取り得る 8 種の近傍とその遷移結果 $(F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m,m+1}$, $(F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m+1,m}$

n	j	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
k	$m+2$	0	0	0	0	1	1	1	1
	$m+1$	000	100	010	110	001	101	011	111
	m	000	100	010	110	001	101	011	111
	$m-1$	0	1	0	1	0	1	0	1
$k+1$	$m+1$	0	1	1	0	1	0	0	1
	m	0	1	1	0	1	0	0	1

$(F_{S_3}^k x_o)_{l-m+1,m}$ の Von Neumann 近傍を考えると, 取り得る Von Neumann 近傍の状態組は Table 3 の太字で示した 8 種のみである. さらにそれらに対して $(F_{S_3}^k x_o)_{l-m,m+1}$ の Von Neumann 近傍の状態組も一意に決まる. これら 8 種すべての近傍に対して $(F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m,m+1} = (F_{S_3}^{k+1} x_o)_{l-m+1,m}$ が成り立っていることが分かる. よってすべての l, m ($0 \leq m \leq l$), $n \geq 0$ に対して式 (18) が成り立つことが示された. $\square$

Proof of Theorem 3 (ii). 4点 $(\pm i, 0)$, $(0, \pm i)$ を頂点とする正方形の周上の頂点集合を Q_i とおく. Lemma 1 より $(F_{S_3}^n x_o)_{i,i} = (F_{S_3}^n x_o)_{2i,0} = (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i}$ であり, Theorem 3 (i) よりタテヨコ断面は Rule 150 に従うので, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$(F_{S_3}^{n+2} x_o)_{i,i} = (F_{S_3}^{n+2} x_o)_{0,2i} \quad (22)$$

$$= (F_{S_3}^{n+1} x_o)_{0,2i-1} + (F_{S_3}^{n+1} x_o)_{0,2i} + (F_{S_3}^{n+1} x_o)_{0,2i+1} \pmod{2} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &= ((F_{S_3}^n x_o)_{0,2i-2} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i-1} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i}) \\ &\quad + ((F_{S_3}^n x_o)_{0,2i-1} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i+1}) \\ &\quad + ((F_{S_3}^n x_o)_{0,2i} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i+1} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i+2}) \pmod{2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$= (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i-2} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i} + (F_{S_3}^n x_o)_{0,2i+2} \pmod{2} \quad (25)$$

$$= (F_{S_3}^n x_o)_{i-1,i-1} + (F_{S_3}^n x_o)_{i,i} + (F_{S_3}^n x_o)_{i+1,i+1} \pmod{2}. \quad (26)$$

$\square$

4 Rule 90 が埋め込まれた Sym-2dECA

7 つの Sym-2dECA F_{S_4} から $F_{S_{10}}$ と 1dECA Rule 90 との関係について論じる. 初期値 x_o からの Sym-2dECA の時間発展パターン 346 種のうち, タテヨコ断面とナナメ断面が共に Rule 90 で表されるのは F_{S_4} のみであった. 時間発展パターンのタテヨコ断面のみ, もしくはナナメ断面のみに Rule 90 が現れる Sym-2dECA は F_{S_5} から $F_{S_{10}}$ までの 6 個あることが分かったので, その結果も示す.

4.1 Sym-2dECA F_{S4} と 1dECA Rule 90

Sym-2dECA F_{S4} の遷移規則は以下で与えられる.

$$(F_{S4}x)_{i,j} = 1 - (TRBL + (1-T)(1-R)(1-B)(1-L)). \quad (27)$$

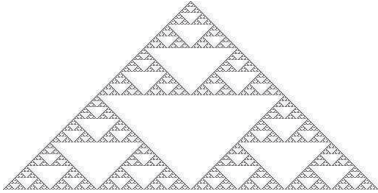
ただし, $f(T, L, C, R, B) = f(1, 1, 1, 1, 1) = 0$, $f(T, L, C, R, B) = f(0, 1, 1, 1, 1) = f(1, 0, 1, 0, 1) = f(0, 0, 1, 1, 1) = f(0, 0, 1, 0, 1) = f(1, 0, 0, 0, 1) = 1$ としている点に注意する. (Conjecture 1 より, これらの遷移は初期値 x_o からの軌道に出現しない.) 初期値 x_o からの F_{S4} の軌道は Figure 5 のようになる.



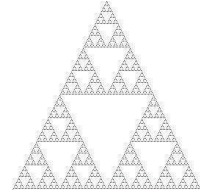
Figure 5: Sym-2dECA F_{S4} の時間発展パターン $\{F_{S4}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

Theorem 4. Conjecture 1 が成り立つと仮定するとき, 以下を得る.

- (i) F_{S4} の初期値 x_o からの時間発展パターンのタテとヨコの断面 ($\{F_{S4}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$, $\{F_{S4}^n x_o\}_{n \geq 0|i,0}$) は, それぞれ 1dECA Rule 90 の軌道 $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する. (Figure 6 (a) 参照.)
- (ii) 偶数時刻 $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対する F_{S4} の初期値 x_o から時間発展パターンにおいて, ナナメ断面 ($\{F_{S4}^{2k} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$) は 1dECA Rule 90 の軌道 $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する. (Figure 6 (b) 参照.)



(a) タテ断面 $\{F_{S4}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$



(b) ナナメ断面 $\{F_{S4}^n x_o\}_{n \geq 0|i,-i}$

Figure 6: 初期値 x_o からの F_{S4} の時間発展パターンのタテ断面 $\{F_{S4}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}$ とナナメ断面 $\{F_{S4}^n x_o\}_{n \geq 0|i,-i}$

Proof of Theorem 4 (i). F_{S4} の定義より, 式 (27) において $i = 0$ とすると,

$$(F_{S4}x)_{0,j} = 1 - x_{0,j+1}x_{1,j}x_{0,j-1}x_{-1,j} - (1 - x_{0,j+1})(1 - x_{1,j})(1 - x_{0,j-1})(1 - x_{-1,j}). \quad (28)$$

ここで Proposition 1 (i) より, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $(F_{S4}^n x_o)_{1,j} = (F_{S4}^n x_o)_{-1,j}$ であるから

$$\begin{aligned} (F_{S4}^{n+1} x_o)_{0,j} &= 1 - (F_{S4}^n x_o)_{0,j+1}(F_{S4}^n x_o)_{1,j}(F_{S4}^n x_o)_{0,j-1} \\ &\quad - (1 - (F_{S4}^n x_o)_{0,j+1})(1 - (F_{S4}^n x_o)_{1,j})(1 - (F_{S4}^n x_o)_{0,j-1}) \end{aligned} \quad (29)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } ((F_{S4}^n x_o)_{0,j+1}, (F_{S4}^n x_o)_{1,j}, (F_{S4}^n x_o)_{0,j-1}) = (0, 0, 0), (1, 1, 1), \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (30)$$

式 (30) の 1 式目について $(T, L, C, R, B) = (1, 1, 1, 1, 1)$, 2 式目について $(T, L, C, R, B) = (0, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 0, 1)$ は初期値 x_o からの時間発展には現れないので無視できる. よって $(F_{S_4}^{n+1}x_o)_{0,j} = (F_{S_4}^n x_o)_{0,j+1} + (F_{S_4}^n x_o)_{0,j-1} \pmod{2}$ と表すことができる.

同様に $j = 0$ とおくと, $(F_{S_4}^n x_o)_{i,1} = (F_{S_4}^n x_o)_{i,-1}$ より, ヨコ断面 $\{F_{S_4}^n x_o\}_{n \geq 0|_{i,0}}$ も Rule 90 で生成されていることが分かる. $\square$

次に Theorem 4 (ii) を示す. まずは以下の Lemma を考える.

Lemma 2. F_{S_4} の初期値 x_o からの時間発展パターンにおいて, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $(F_{S_4}^n x_o)_{l-m, \pm(m+1)} = (F_{S_4}^n x_o)_{l-m+1, \pm m}$, $(F_{S_4}^n x_o)_{-(l-m), \pm(m+1)} = (F_{S_4}^n x_o)_{-(l-m+1), \pm m}$ ($0 \leq m \leq l$) である.

Proof. Proposition 1 (i) より, 初期値 x_o からの時間発展パターン $F_{S_4}^n x_o$ は上下左右対称であるから, $i, j \geq 0$ の場合のみ考えれば十分である. まず帰納法によって次式を示す.

$$(F_{S_4}^n x_o)_{l-m, m+1} = (F_{S_4}^n x_o)_{l-m+1, m} \quad (0 \leq m \leq l). \quad (31)$$

初期値 x_o からの時間発展パターンを計算すると

$$(F_{S_4}^1 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (1,0), (0,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (32)$$

$$(F_{S_4}^2 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (2,0), (0,2), (1,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (33)$$

$$(F_{S_4}^3 x_o)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (1,0), (0,1), (3,0), (2,1), (1,2), (0,3), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (34)$$

より, $n \leq 3$ のとき, 式 (31) を満たしている. ある時刻 $n = k (\geq 3)$ に対して式 (31) が成り立っていると仮定すると, $(F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m, m+1} = (F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m+1, m}$ となることを示す.

Table 4: $(F_{S_4}^k x_o)_{l-m, m+1}$, $(F_{S_4}^k x_o)_{l-m+1, m}$ が取り得る 5 種の近傍とその遷移結果 $(F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m, m+1}$, $(F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m+1, m}$

n	j	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
k	$m+2$	0	0	0	1	1
	$m+1$	000	100	010	001	101
	m	000	100	010	001	101
	$m-1$	0	1	0	0	1
$k+1$	$m+1$	0	1	0	1	0
	m	0	1	0	1	0

$(F_{S_4}^k x_o)_{l-m+1, m}$ の Von Neumann 近傍を考えると, 取り得る Von Neumann 近傍の状態組は Table 4 の太字で示した 5 種のみである. さらにそれらに対する $(F_{S_4}^k x_o)_{l-m, m+1}$ の Von Neumann 近傍の状態組も一意に決まる. これら 5 種すべての近傍に対して $(F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m, m+1} = (F_{S_4}^{k+1} x_o)_{l-m+1, m}$ が成り立っていることが分かる. よってすべての l, m ($0 \leq m \leq l$), $n \geq 0$ に対して, 式 (31) が成り立つことが示された. $\square$

Proof of Theorem 4 (ii). 4 点 $(\pm i, 0)$, $(0, \pm i)$ を頂点とする正方形の周上の頂点集合を Q_i とおく. Lemma 2 より, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $(F_{S_4}^{2k} x_o)_{i,i} = (F_{S_4}^{2k} x_o)_{2i,0} = (F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i}$ であり, Theorem 4 (i) より, タテヨコ断面は Rule 90 に従うので,

$$(F_{S_4}^{2k+2} x_o)_{i,i} = (F_{S_4}^{2k+2} x_o)_{0,2i} \quad (35)$$

$$= (F_{S_4}^{2k+1} x_o)_{0,2i-1} + (F_{S_4}^{2k+1} x_o)_{0,2i+1} \pmod{2} \quad (36)$$

$$= ((F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i-2} + (F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i}) + ((F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i} + (F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i+2}) \pmod{2} \quad (37)$$

$$= (F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i-2} + (F_{S_4}^{2k} x_o)_{0,2i+2} \pmod{2} \quad (38)$$

$$= (F_{S_4}^{2k} x_o)_{i-1, i-1} + (F_{S_4}^{2k} x_o)_{i+1, i+1} \pmod{2}. \quad (39)$$

4.2 Sym-2dECA F_{S5} から F_{S10} と 1dECA Rule 90

前節と同様の議論により、以下の Corollary を得る. (Figure 7 は、 F_{S5} から F_{S10} までの初期値 x_o からの時間発展パターンである.)

Corollary 1. Table 2 の Sym-2dECA F_{S5} から F_{S10} について、以下が言える.

- (i) F_{S5} の時間発展パターンのタテヨコ断面 ($\{F_{S5}^n x_o\}_{n \geq 0|0,j}, \{F_{S5}^n x_o\}_{n \geq 0|i,0}$) は Rule 90 の軌道 $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する.
- (ii) $n = 2k$ と $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対する F_{S6}, F_{S7}, F_{S8} の時間発展パターンにおいて、それぞれのナナメ断面 ($\{F_{S6}^{2k} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}, \{F_{S6}^{2k+1} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$) は Rule 90 の軌道 $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する.
- (iii) $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対する F_{S9} の時間発展パターンにおいて、ナナメ断面 ($\{F_{S9}^{2k+1} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$) は Rule 90 の軌道 $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する.
- (iv) $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対する F_{S10} の時間発展パターンにおいて、ナナメ断面 ($\{F_{S10}^{2k} x_o\}_{k \geq 0|i,\pm i}$) は Rule 90 の軌道 $\{F_{90}^n x_o\}_{n \geq 0}$ と一致する.



(a) $\{F_{S5}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$



(b) $\{F_{S6}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$



(c) $\{F_{S7}^n x_o\}_{0 \leq n \leq 15}$

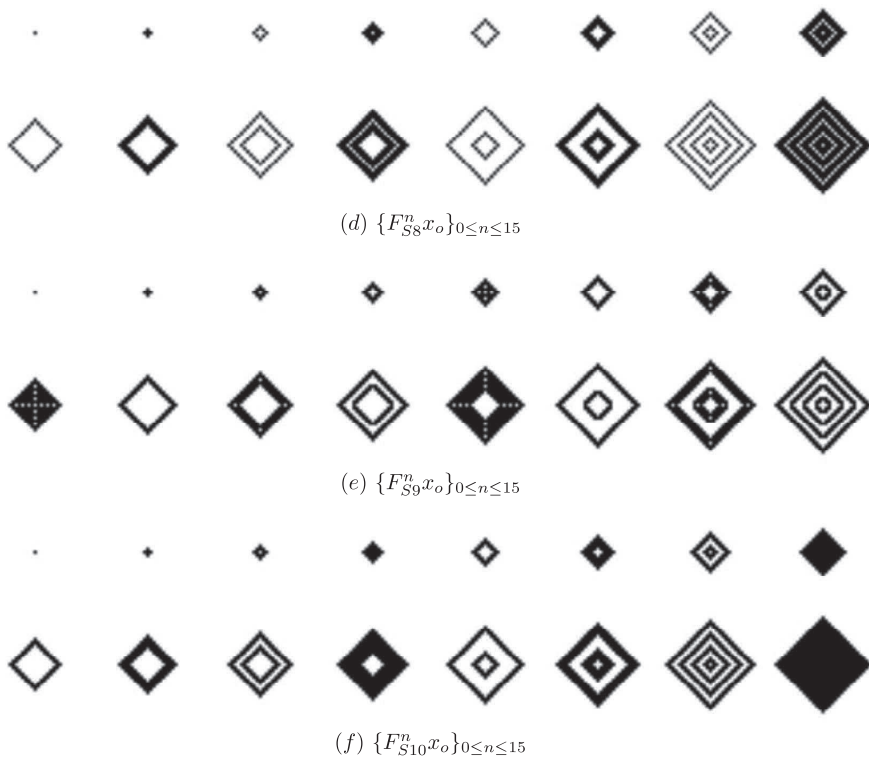


Figure 7: Sym-2dECA F_{S5} から F_{S10} の時間発展パターン

5 おわりに

Sym-2dECA の初期値 x_o からの軌道に Rule 150, Rule 90 が現れるケースをそれぞれ見てきた. Sym-2dECA の 346 種の時間発展パターンのうち, 時間発展パターンのタテヨコ断面が Rule 150 の時間発展パターンと一致するのは F_{S1} , F_{S2} , F_{S3} の 3 つであり, さらに F_{S3} はナナメ断面も Rule 150 と一致することを示した. Rule 90 に対しては, F_{S4} のタテヨコ断面とナナメ断面がいずれも Rule 90 の時間発展パターンと一致することを示した. 同様の議論により, タテヨコ断面のみかナナメ断面のみが Rule 90 で表されるものは F_{S5} から F_{S10} までの 6 個あることが分かった.

謝辞

本研究は科研費 (18K13457) の助成を受けたものである.

References

- [1] A. Kawaharada and T. Namiki. Relation between spatio-temporal patterns generated by two-dimensional cellular automata and a singular function. *International Journal of Networking and Computing*, 9(2):354–369, 2019.