

36. 保存系におけるスペクトル特異指数 ゆらぎと多重エルゴード運動

早大・理工 菊地康裕, 相沢洋二

1. 概 要

保存系のカオス運動は、多様なローテーションナンバーをもつKAMトーラスに次々と巻付きながら運動する。この様子は、軌道のパワースペクトルをとれば多数のピークとして観測される。ピークの特異性から、KAMトーラスにへばりつく運動が長時間相関をもつことがわかる。このように、KAMトーラスのまわりの強い不変測度のあいだを渡り歩くカオス運動を、“多重エルゴード運動”とよび、保存系カオスの新しい特徴として提案する。また、パワースペクトルに存在する多数の特異指数のゆらぎを求める試みと、その意味するところについて議論したい。

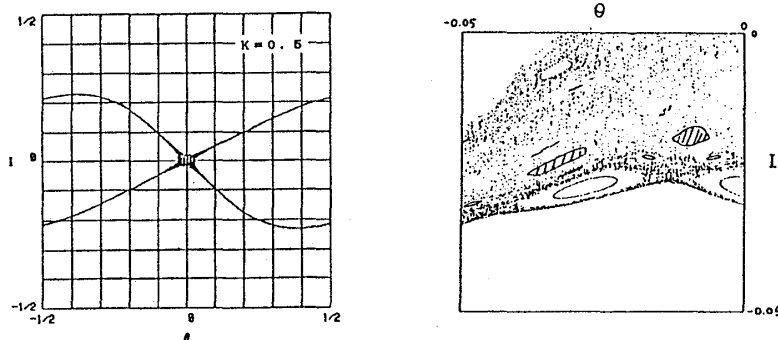
2. 保存系のカオス層の構造とカオス軌道

保存系のカオス層は、一般に双曲型不動点のまわりに生ずる。図1 aはスタンダードマップ

$$I_{n+1} = I_n + \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi \theta_n$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}$$

で $K=0.5$ としたときの、原点のまわりにおけるカオス層である。これを拡大した図1 bを見ると、いくつかの異なるローテーションナンバーをもった周期点を中心とする、KAMトーラス領域(島)が観測される。一般には、それらの島のまわりにはさらに小さな島があるというぐあいに階層構造をなしている。カオス領域は、階層構造をした島のあいだをうめつくすように広がっている。カオス領域を運動する軌道は、島の中に入り込むことはないが、島の表面の近くを通ることはある。そのようなとき、軌道は島の表面をなかなか離れ



a. 全体図

b. 拡大図

図1 原点のまわりのカオス層

られないで長時間そのまわりに滞在する。島の分布の階層構造が自己相似的であることを仮定すると(図2), KAMトーラスのまわりの滞在時間確率がベキ分布となることや, 軌道が $f^{-\nu}$ スペクトルを持つことなどが得られる。

3. パワースペクトルとその特異性

$K=0.5$ のスタンダードマップで, カオス軌道における θ 成分のパワースペクトルを計算したものが図3 aである。初期点 $\theta=0$, $I=10^{-4}$ から始まる長さ $N=20000$ の軌道の生スペクトルを, サンプル数 $M=1000$ 個について平均している。スペクトルのピークは島に捕えられている運動を示す。

たとえば図3 bは, 図1 bにおける斜線部の島の中のKAM

トーラスを運動する軌道

のスペクトルである。これをカオス軌道のそれと重ねあわせれば, 対応するピークにピタリと重なり合う。カオス軌道のスペクトルでは, 整合しない周波数のピークが共存

しているのである。

これは, カオス軌道が異なるローテーションナンバーを持つ島に, 次々と捕えられながら運動していることを示す。

さらに, これらのピークは, 一般的に特異性を持つことがわかった。図4 aお

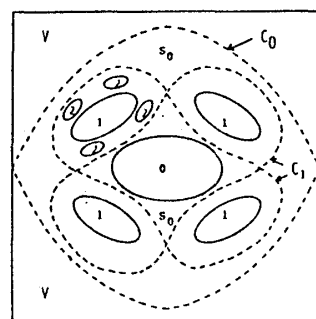
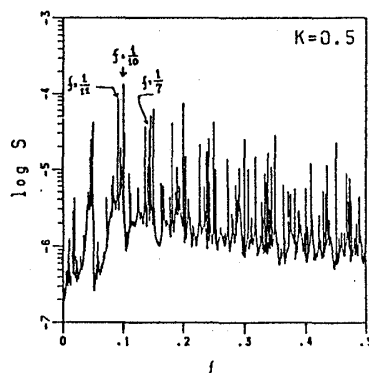
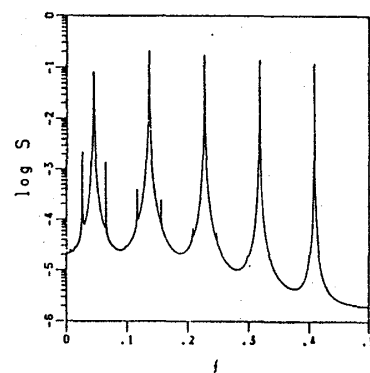


図2 自己相似モデル

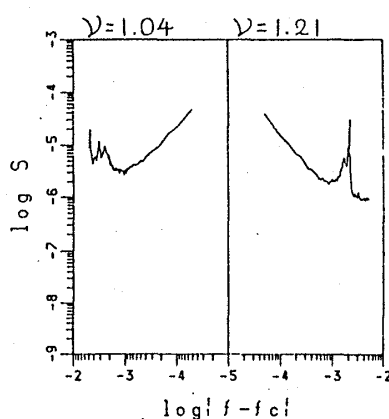


a. カオス軌道

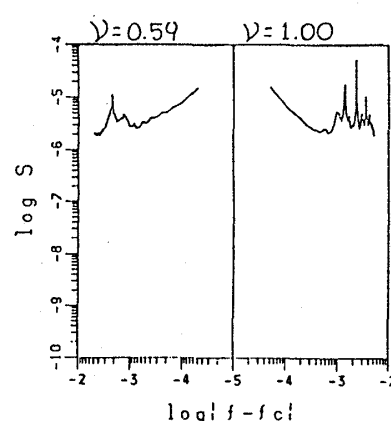


b. KAMトーラス軌道

図3 θ 成分のパワースペクトル



a. $f_c = 1/10$



b. $f_c = 1/7$

図4 ピークのまわりの特異性

よび b は、周波数がそれぞれ $1/10$, $1/7$ であるピークのまわりで $\log - \log$ プロットをとったグラフである。特異指数はあまり正確に決定はできないが、場所（周波数）によって異なっている。表 1 は、グラフの傾きから計算したいくつかの周波数に関する指数の値を示したものである。この中には 1 を越えるものも存在する。保存系のカオス運動には、非定常な過程が含まれているのである。

表 1 いろいろなピークのまわりの特異指数

f_c	ν 左	ν 右
$1/11$	0.37	0.58
$1/10$	1.04	1.21
$1/7$	0.59	1.00
$1/5$	1.00	1.12
$3/10$	1.18	1.08

4. 特異指数のゆらぎ

保存系の研究においてスペクトルを調べることの意義は、カオス領域に接する島に関する情報を引き出すことができるということにある。島の分布のしかたやその表面が軌道を捕える力（粘性）は、特異指数に反映する。では、数多く存在するピークの指数はどのようにゆらいでいるのか。それを示す量に指数スペクトル $f(\alpha)$ がある。その定義と意味および計算方法は付録に記した。図 5 a は、図 3 a で示したパワースペクトルに対して $f(\alpha)$ を計算した結果である。比較のために、アーノルドのキャットマップに同じ方法で計算した結果も示した。キャットマップの方はホワイトスペクトルなので、 $\alpha = f = 1$ に 1 点をうつだけである。他方、スタンダードマップでは、凸型の $f - \alpha$ 曲線が得られた。指数 α と特異指数 ν の関係は、ピーク付近のスペクトルの積分から $\nu = 1 - \alpha$ と考えられる。この図が $\alpha = f = 1$ でピークをもつのは、パワースペクトルがゼロになることは計算機的にはありえないということからくる。

カオス運動には、絶対連続なスペクトルを生む過程も共存している。スペクトルの特異性を調べるには、本来、絶対連続な成分を取り除く（ルベグ分解）必要があるが、それを実行す

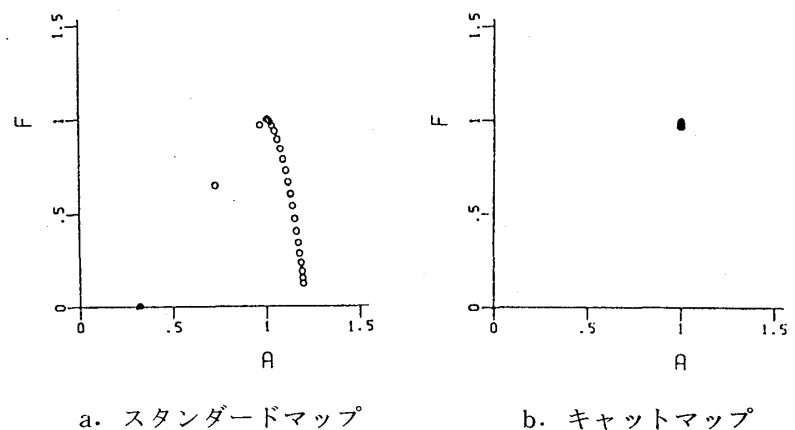


図 5 パワースペクトルの $f(\alpha)$

る具体的な方法はまだわからない。パワースペクトルに対するこのような解析はまだ始まったばかりであり、今後は、理論的な根拠やユニバーサリティーの存在などを詳しく調べる必要があるだろう。

5. ま と め

以上、2次元の保測マッピングをモデルとして、その多重エルゴード運動とスペクトル特異指数のゆらぎについて説明した。今回の結果は小数自由度系においてのものであるが、もしも大自由度系でこのような過程の存在が示されるならば、ハミルトン系のエルゴード性を基礎とする統計力学にも少なからず影響をおよぼすであろう。そのときには、このような非定常過程を含む過程のエルゴード理論が必要となる。その意味でも、今後は、多重エルゴード運動における確率論的な研究をめざしたい。

【付録】 特異指数スペクトル $f(\alpha)$ とその計算方法について²⁾

フラクタル測度における特異指数のゆらぎを示す量として、特異指数スペクトル $f(\alpha)$ が提案されている。以下では、その意味および計算方法について説明する。

空間を一辺 b のセルで区切ったときの i 番目のセルにおける分布確率を $p_i(b)$ であらわす。次の量は q 次の一般化次元と呼ばれる：

$$D_q = \lim_{b \rightarrow 0} (q-1)^{-1} \log \sum p_i(b)^q / \log b$$

D_0, D_1, D_2 はそれぞれフラクタル次元、情報量次元、相関次元に相等する。 $(q-1)D_q$ を $\tau(q)$ であらわすと後で便利である。ここで測度がフラクタルであることから、指数 α によって $p_i(b) \sim b^\alpha$ なる評価ができるとし、さらに α から $\alpha + d\alpha$ のあいだにある指数の数が $b^{-f} d\alpha$ で評価できると考える。 $f(\alpha)$ は指数 α を持つ場所全体のフラクタル次元という意味を持つ。統計力学における分配関数に相等する量を計算すると

$$Z_q(b) := \sum p_i(b)^q \sim \int b^{\alpha q} b^{-f} d\alpha$$

重要な仮定は、 $f(\alpha)$ が α に関して凸型であるということである。もしそうなら、鞍点法から τ と f がルジャンドル共役であることが導かれる。

$$Z_q(b) \sim b^{\min\{\alpha q - f\}} = b^{\tau(q)}, \quad q d\alpha - df = 0$$

この式から、まず、 α が q の関数として求まる：

$$d\tau = \alpha dq + q d\alpha - df = \alpha dq, \quad \alpha(q) = d\tau/dq$$

これより、 f は q を変数として

$$f(q) = q\alpha(q) - \tau(q)$$

とあらわされる。 q をパラメータとして $\alpha(q)$ と $f(q)$ をプロットすれば、 $f - \alpha$ 曲線を描くことができる。 $\tau(q)$ および $d\tau/dq$ は計算可能である。本研究において、実際の計算には次の方法を用いた：

$$Z_q(b) = A b^{\tau(q)} \text{ より } Z_q(2b)/Z_q(b) = 2 \text{ ゆえに}$$

$$\tau(q) = \{ \log Z_q(2b) - \log Z_q(b) \} / \log 2$$

また $Q_q(b) := \sum p_i(b)^q \log p_i(b)$ として

$$d\tau/dq = \{ Q_q(2b)/Z_q(2b) - Q_q(b)/Z_q(b) \} / \log 2$$

なお、 $p_i(2b)$ として、 $N = 10000$ 、 $M = 2000$ として求めた平均スペクトルによる分布確率を使った。

参考文献：

- 1) Y. Aizawa : Prog. Theor. Phys. 71 (1984), 1419.
- 2) I. Procaccia : *Dimensions and Entropys in Chaotic Systems*, ed. G. Mayer-Kress (Springer, 1986), 8.