

実半単純Lie群上の Whittaker 超関数

東大 理 松本 久美

(Hisayosi Matumoto)

§1. 実半単純Lie群上の Whittaker Hyperfunction

以下 G を real semisimple Lie group with finite center で連結なものとする。さらに K を G のある maximal compact subgroup, $G = KAN$ を Iwasawa 分解とする。

$\psi: N \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を Lie group homomorphism (通常は generic, unitary などの条件をつけるが、ここでは任意とする) としたとき、

$$B(G/N, \psi) = \{f \in B(G) \mid f(gn) = \psi(n)f(g) \quad n \in N, g \in G\}$$

とおき、 $B(G/N, \psi)$ の元を G 上の Whittaker function (hyperfunction) といふ。ただし、 $B(G)$ は G 上の hyperfunction 全体とする。

real semisimple Lie group に対する Whittaker function の概念は、Jacquet によつて局所体上の Chevalley 群に対して初めて導入され、Schiffmann, Hashizume, Shahidi, Kostant, Goodman-Wallach によつて研究されてきた。

G の Lie algebra を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ の複素化の universal enveloping

algebra を $U(\mathfrak{g})$. その中心を $Z(\mathfrak{g})$ とおく. 球関数との analogy から. $Z(\mathfrak{g})$ の微分作用素としての action に対して 同時固有関数になるような Whittaker 超関数を elementary と言うことにする. 以下簡単のため $G: \text{real split}$ とする. すると A の Lie algebra $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra となるから. $Z(\mathfrak{g})$ の character は. Harish-Chandra homomorphism

$$\chi_\lambda: Z(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C} \quad (\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*)$$

によって与えられる.

そこで $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ に対して.

$$B(G/N, \psi; \mathfrak{M}_\lambda) = \left\{ f \in B(G/N, \psi) \mid \begin{matrix} Df = \chi_\lambda(D)f \\ D \in Z(\mathfrak{g}) \end{matrix} \right\}$$

とおく. ψ action で G -module となる.

以下本稿では. この空間の表現論的な性質を問題とする.

§2. $SL(2, \mathbb{R})$ の場合.

この場合 $K = SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$

$$A = \mathbb{R}_+ = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mid t > 0 \right\}$$

$$N = \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{R} \right\}$$

と表わせる. $\xi = \mathbb{C}$.

$$f\left(\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} g\right) = e^{im\theta} f(g)$$

ある $m \in \mathbb{Z}$ が存在するような K -finite な Whittaker function を考えよう. $G = KAN$ だから f の A への制限を調べればよい. ところで $SL(2, \mathbb{R})$ の場合は. $Z(\mathfrak{g})$ は Casimir 作用素によって

生成されるから. $A \cong \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ 上での常微分方程式を考えればよいことになる. 結局 x - y や座標を適当にとりかえると, 次のような古典的な Whittaker の微分方程式を得る.

$$z^2 \frac{d^2 W}{dz^2} + \left(-\frac{z^2}{4} + kz - \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) \right) W = 0$$

この方程式は $z=0$ を 確定特異点 に, $z=\infty$ を 不確定特異点 に持っている. よく知られているように, generic (特性方程式の根の差 $\notin \mathbb{Z}$) の場合は, 原点 (確定特異点) のまわりの 1 次独立な 2 つの巾級数解が得られ, それは,

$$M'_{k,\mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu-k+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\mu+n+1)\Gamma(\mu-k+\frac{1}{2})} \frac{z^n}{n!}$$

とおいたとき, $M'_{k,\mu}$ と $M'_{k,-\mu}$ に δ, ε とえられる.

$2\mu \in \mathbb{Z}$ のときは, $M'_{k,\mu}(z), M'_{k,-\mu}(z)$ は 1 次独立

ではない. もう一つの解は,

$$W_{k,\mu}(z) = \frac{e^{-z/2} z^k}{\Gamma(\mu-k+\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\mu-k-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{t}{z}\right)^{\mu+k-\frac{1}{2}} dt$$

($\operatorname{Re}(\mu-k+\frac{1}{2}) > 0$ のとき)
の表示.

と与えられる.

すると一般の μ に対して, $M_{k,\mu}$ と $W_{k,\mu}$ は 基底系 をなす.

$z \rightarrow +\infty$ での振るまいを調べる.

$$W_{k,\mu}(z) \sim e^{-\frac{z}{2}} z^k \left[1 + \frac{\mu^2 - (k-\frac{1}{2})^2}{1! z} + \dots \right]$$

となり $W_{K,\mu}(z)$ は急激に減少するが、他の解は急激に増大する。

原点での振る舞いは確定特異点だが、generic な場合、

$$M_{K,\mu}(z) \sim z^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(2\mu+1)}$$

となる。

★ $SL(2, \mathbb{R})$ の場合は、このように具体的に計算できてしまい、

K -finite vector についてはよくわかるのだが、一般の群では
 二うはいかない。そこで A 上に関数を制限したりせず G/N
 上の line bundle の section ($\equiv G/N$ の関数) と思ふ。

直接その上で方程式系

$$M_\lambda : Du = \chi_\lambda(b)u \quad (D \in Z(\mathfrak{g}))$$

を扱うことにする。そのためには、Kashiwara-Oshima
 により導入され、Oshima により拡張された確定特異点型
 の方程式系とその境界値の概念を使うことができる。

§3. Whittaker function における確定特異点型境界値

問題

まず $n = \dim A$ に対し G の real rank とする。 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を (N) に対して
 正 (負) の simple root, $H_1, \dots, H_n$ を σ の $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ に対する
 dual basis とする。

ここで $E = K \times \mathbb{R}^n$ とし、 $x = (k, t_1, \dots, t_n) \in E \times gG$

に対して.

$$g \cdot x = (K(gk), e^{-\alpha_1(H(gk))} \cdot t_1, \dots, e^{-\alpha_n(H(gk))} \cdot t_n)$$

で定まる。すなわち、これは C^W 上の G -action となる。

一方 $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}^n$ に対して.

$$\mathbb{R}_\varepsilon^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{sgn}(t_1, \dots, t_n) = \varepsilon\}$$

$$O_\varepsilon = K \times \mathbb{R}_\varepsilon^n$$

とおく。

$$\mathbb{E} = \bigcup_{\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}^n} O_\varepsilon$$

が $\mathbb{E}$ の orbital decomposition であることは直ちにわかる。

$$O_{(0)} = K \times \{(0, \dots, 0)\} \simeq G/N$$

が唯一の closed orbit であり、open orbit は、

$\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$ に対して 2^n 個あるが、 $\varepsilon = (1, \dots, 1)$ に対応する open orbit を、

$$ka \in N \longmapsto (k, a)$$

$$G/N \longrightarrow K \times \mathbb{R}^n = \mathbb{E}$$

$$\text{ただし } a_t = \exp\left(-\sum_{i=1}^n (\log t_i) H_i\right) \quad (t_1, \dots, t_n > 0)$$

において G/N と同一視する。

G/N は Iwasawa 分解により KA と同一視される。

ここで $f \in B(G/N, \psi, \mathcal{M}_\lambda)$ ($\lambda \in \alpha_C^*$) を KA 上に制限した関数を $\bar{f}$ とおく。 f は

$$Df = \chi_\lambda(D)f \quad (D \in Z(\mathfrak{g}))$$

という方程式系 $\mathcal{M}_\lambda$ の解だが、これに対応して $K \times A$ 上の方程式系 $\tilde{\mathcal{M}}_\lambda$ が得られ、 $\bar{f}$ はこの解となる。

Lemma 1. $\tilde{\mathcal{M}}_\lambda$ は $\mathbb{R}$ 全体に実解析的係数をもつ微分方程式系として一意的に拡張される。

Lemma 2. $\tilde{\mathcal{M}}_\lambda$ は $O(0, \dots, 0)$ において「確定特異点型 $+\alpha$ 」となる。

ここで「確定特異点型 $+\alpha$ 」については詳しくは述べないが、一般に次のようなことが成り立つ。([3], [4], [5])

$M : C^\omega$ -manifold. $e \in M$

$M \times \mathbb{R}^n \ni (e, 0)$ のある開近傍 U 上で定義される方程式系 $\mathcal{N}$ が「確定特異点型 $+\alpha$ 」とする。

1° すると, characteristic exponent という $M \times \{0, \dots, 0\} \cap U$ 上の関数の組 $(Sp_1, \dots, Sp_n)$ が $S_1, \dots, S_r$ と有限個定まる。

" Sp

★ ただし表現論への応用では、 $S_1, \dots, S_r$ は必ず定数である場合が重要であり、 $\hat{\mathcal{M}}_\lambda$ の場合もそうである。

$$2^\circ \mathbb{R}_+^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1 > 0, \dots, t_n > 0\}$$

$$(M \times \mathbb{R}_+^n) \cap U = U_+$$

とある。

U_+ における $\mathcal{N}$ の解 f は、“ $|||||x|^\lambda| = |||$ ” 次のおおな形をしている。(ただし characteristic exponent は整数差にならないとする)

$$x \in M, t \in \mathbb{R}_+^n \text{ に対して } U_+ \text{ 上で } t^{Sp} = t_1^{Sp_1} \dots t_n^{Sp_n}$$

とある。

$$(\star) f(x, t) = \sum_{p=1}^r t^{Sp} (\varphi_{p,0}(x) + \varphi_{p,1}(x)t + \dots)$$

ここで、 $1 \leq p \leq r$ に対して、 $M \times \{0, \dots, 0\} \cap U$ 上の hyperfunction $\varphi_{p,0}(x)$ のこと、 Sp に関する f の 境界値 という。

Remark $(\star)$ のような表示は $\mathcal{N}$ の一般の解 f については、非合法であり本当は境界値は超局所的な議論によって定義される。しかし境界値が C^∞ となるような解 (例えば “ $\hat{\mathcal{M}}_\lambda$ の場合では K -finite function に対応する解など”) は、ideally analytic solution といえる。その場合表示 $(\star)$ は合法的である。

3° 境界値は, M 上の $\mathcal{O}$ line bundle の section として考えれば座標系のことになる。

4° 境界値がすべて 0 なら, 解も境界 $(= (M \times \{0, \dots, 0\}) \cap U)$ の $\mathcal{O}$ 近傍で 0.

W を $(\mathfrak{g}, \sigma)$ の Little Weyl group とする。

Lemma 3.

$\tilde{M}_\lambda$ の characteristic exponents は,

$$\{ \rho - w\lambda \mid w \in W \}.$$

$\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}^*$ に対して,

$$B(G/AN; L_\lambda)$$

$$= \{ f \in B(G) \mid f(gan) = e^{(\lambda - \rho)(\log a)} f(g), \quad g \in G, a \in A, n \in N \}$$

とおく。これは, 有限群の右 action による分解をさらにとると,

主系列の空間となる。 Δ^+ を $(\mathfrak{g}, \sigma)$ の正 root 系とする。

すると,

Lemma A. $2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \notin \mathbb{Z}$ for $\alpha \in \Delta^+$ のとき. (上 λ は generic)

G -equivariant な境界値写像 $\beta_{\lambda, w}$ ($w \in W$)

$$\beta_{w, \lambda}: B(G/N, \psi; \mathcal{M}_\lambda) \longrightarrow B(G/AN; L_{w\lambda})$$

が定義できる。また

$$\beta : \bigoplus_{w \in W} \beta_{\lambda, w} : B(G/N, \psi; \mathcal{M}_\lambda) \rightarrow \bigoplus_{w \in W} B(G/N; L_{w\lambda})$$

は単射。

★ λ が一般の場合でも次のようにとは言える。

Lemma B $|W| = r$, W の元は互いに互いに $w_1, \dots, w_r$ と番号をつけると、 $B(G/N, \psi; \mathcal{M}_\lambda)$ の G -submodule $X_0, \dots, X_r$ が、

$$B(G/N, \psi; \mathcal{M}_\lambda) = X_r \supseteq X_{r-1} \supseteq \dots \supseteq X_0 = \{0\}$$

かつ

X_i/X_{i-1} は $B(G/N; L_{w_i\lambda})$ の G -submodule に同型。とすることができる。

§4. Whittaker function の構成

★ 主系列関数から Whittaker function を作ることを考える。

①. Jacquet による方法

ψ は unitary character とする。

$f \in B(G/N; L_\lambda)$ が C^∞ -function であるとする。

w_0 : W の longest element とする。

$$\int_N f(gnw_0) \psi(n) d n$$

という積分を考へることは、

$$\int_N f(gnw_0) d n$$

という standard な intertwining operator が絶対収束するところでは収束し、他 λ については解析接続において定める。このような Whittaker function は "無限遠" での増大度をもつものとして特徴づけられることを、Wallach が示している。つまり $SL(2, \mathbb{R})$ における $W_{k, \mu}$ の拡張といえる。

② Goodman-Wallach の手法

これは、 $M'_{k, \mu}$ に対応するものといえる。

$f \in B(G/AN, L_\lambda)$ が、右からの $U(\mathfrak{g})$ -action に対して、

Verma module の highest weight vector としての振る舞いをすることに注目する。

たとえば $SL(2, \mathbb{R})$ のとき、 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

$$V_\lambda = U(\mathfrak{g}) / U(\mathfrak{g})N + U(\mathfrak{g})(H - \lambda)$$

$$\text{ただし、 } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{un}$$

とて、 $1 \in U(\mathfrak{g})$ の V_λ への projection を 1_λ とおく。

$$P_{\lambda, u} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(G-u)^m}{m! \Gamma(m-\lambda)} \bar{N}^m \quad (**)$$

この形式和は収束する。

$$N P_{\lambda, u} 1_{\lambda} = u P_{\lambda, u} 1_{\lambda}$$

つまり。実は $P_{\lambda, u}$ は ∞ 階の微分作用素と意味する。 $f \in B(G/N; L_{\lambda+\rho})$ の π に右から act させると Whittaker function を得る。

Goodman - Wallach は。 - G の quasi-split な G について。このような ∞ 階作用素をつくらねばならぬ。

$$\Omega_{\lambda}: B(G/N; L_{\lambda}) \rightarrow B(G/N, \psi; M_{\lambda})$$

この G -equivariant な map が得られる。

実は。

Lemma 4. λ : generic のとき。

$$\beta_{\lambda w'} \circ \Omega_{w\lambda} = \begin{cases} \text{Scalar} \neq 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$w = w'$$

$$w \neq w'$$

この結果を使うと。

Theorem A. λ : generic のとき。

$$\beta: B(G/N, \psi; M_{\lambda}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{w \in W} B(G/N; L_{w\lambda})$$

Theorem B. W の π を $w_1, \dots, w_r$ と適当に番号を付ける。

$A_K(G/N, \psi; \mathcal{M}_\lambda) = \{ B(G/N, \psi; \mathcal{M}_\lambda) \text{ の } K\text{-finite elements} \}$
 の $(\mathfrak{g}, K)$ -submodule $X_r, \dots, X_0$ である。

$$A_K(G/N, \psi; \mathcal{M}_\lambda) = X_r \supseteq X_{r-1} \supseteq \dots \supseteq X_0 = \{0\}$$

とすると $X_i/X_{i-1} \cong A_K(G/N; L_{w_i\lambda})$

" $\{ B(G/N; L_{w_i\lambda}) \text{ の } K\text{-finite elements} \}$

となるものが存在する。

Remark 1. Theorem B. のちがいは Goodman-Wallach の結果を用いないで示すことができる。

Remark 2. Theorem A. は G/K における Helgason 予想の類似といえるが、Helgason 予想の方程式系は、
 確定特異点型の楕円型境界値問題といえるのに対し、
 この場合は、~~確定特異点型~~ 双曲型初期値問題
 といえる。Goodman-Wallach は丁度基本解を作ったこと
 に対応している。
 の結果

§5. 境界値写像.

我々は境界値写像も、 ∞ 階の微分作用素において書ける
 これは初め、Kashiwara により示唆され、Matsumoto が

$SL(2, \mathbb{R})$ のときは real-split のときは Oshima によって得られた結果である。 $SL(2, \mathbb{R})$ のときは $(T=\lambda, z)$

$U^\infty(\mathfrak{g}) = \{G \pm \text{の左不変無限階微分作用素} \} \subset U(\mathfrak{g})$
 $z \neq 0$. $\Omega \in Z(\mathfrak{g})$ は Casimir 作用素である。

$$W_{u, \lambda} = U^\infty(\mathfrak{g}) / U(\mathfrak{g}) (-\Omega - \chi_{\lambda+1}(\Omega)) + U(\mathfrak{g}) (N-u) \quad (*)$$

ここで $\lambda \in \mathbb{Z}$ である

$$U^\infty(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} W_{u, \lambda} \cong (U^\infty(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V_\lambda) \oplus (U^\infty(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V_{-\lambda-2})$$

一般に $\lambda \in \mathbb{Z}$ である。 $\lambda \geq -1$ である

$$(W_{u, \lambda} = W_{u, -\lambda-2})$$

$$0 \rightarrow U^\infty(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V_\lambda \rightarrow U^\infty(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} W_{u, \lambda} \rightarrow U^\infty(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V_{-\lambda-2} \rightarrow 0$$

(exact)

これは一般に real split の場合である。 (*) に対応する Kostant の Whittaker module の $U^\infty(\mathfrak{g})$ による係数拡大は Verma module の直和の係数拡大となることを示す。

References

- [1] R. Goodman and N.R. Wallach : Whittaker vectors and conical vectors, J. Fund. Anal 39 (1980) 199-279

- [2] M. Kashiwara et.al : Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space , Ann of Math 107 (1978) 1-39
- [3] M. Kashiwara, T. Oshima, Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Ann. of Math. 106 (1977) 145-200.
- [4] T. Oshima, A definition of boundary value of solutions of partial differential equations with regular singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 19 (1983), 1203-1230
- [5] T. Oshima, Boundary value problems for systems of linear partial differential equations with regular singularities, Advanced Studies in Pure Math.
- [6] H. Matsumoto : Boundary value problems for Whittaker functions on real split semisimple Lie groups preprint. (1989)