

複素解析的葉層構造の特異点 II

北大 理(数) 諏訪 立雄

これは [I] の続きであり、まず何らかの第 1 種分をもつ葉層構造の開折 (unfolding) について述べ (第 6, 7, 8 節)、次に開折の横断性、葉層構造芽の有限既定性について考える (第 9 節)。記号、定義等は [I] に従う。

$F = (w)$, $w = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$, $f_i \in \mathcal{O}$, $\Sigma \mathbb{C}^n$ の 0 における余次元 1 の局所葉層構造 ([I] 参照) とするとき、 $f_1, \dots, f_n$ で生成される ideal $\Sigma J(w)$ とかく。これは又、 F の生成元 (および $\mathbb{C}^n$ の座標系) α とリフトによらなりの $J(F)$ とも書き、 F の Jacobian ideal ということにする。すなわち

$$I(w) = \{h \in \mathcal{O} \mid h dw = \eta \wedge w, \eta \in \Omega\}$$

とかくと、これは $\mathcal{O}$ の ideal で、 F の生成元 w のリフトによらなりの $I(F)$ ともかく。積分可能条件 $dw \wedge w = 0$ より $f_i dw = (df_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j) \wedge w$ となるので $J(F) \subset I(F)$ であり、 F の一次開折の同値類の集合 $\mathcal{U}(F)$ は

$$\mathcal{U}(F) = I(F)/J(F)$$

で与えられる ([I] 3.). 以下 F の特異点集合 $S(F)$ の $\mathbb{C}^n$ における余次元は常に 2 以上としておく.

6. 正則第 1 種分をもつ葉層構造. 葉層構造 $F = (\omega)$ が正則第 1 種分をもつとは, 正則関数 $f \in \mathcal{O}$ で

$$\omega \wedge df = 0$$

となるものが存在すること. このとき, $\text{codim } S(F) \geq 2$ より

$$(6.1) \quad g\omega = df, \quad g \in \mathcal{O}$$

と書けることが分る. もし g が $\mathcal{O}$ の単元なら F は Haefliger 葉層構造で生成元として df がとれる. このとき, $I(F) = 0$, $J(F) = J(f)$ (f の Jacobian ideal) である. 従って $\mathcal{O}/J(f)$ が有限次元なら, [I] 5 節の普遍性定理により $[u_1], \dots, [u_m]$ を $\mathcal{O}/J(f)$ の $\mathbb{C}$ -基底とすると, $\mathbb{C}^m = \{t_1, \dots, t_m\}$ をパラメータ空間とすると F の開折予 $\tilde{F} = (\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega} = d\tilde{f}$, $\tilde{f} = f + \sum_{i=1}^m u_i t_i$ は universal である.

(6.2) 注意. $F = (df)$ の開折理論は f の strict right-morphisms に関する開折理論と同値である ([19] 参照).

[I] の right-morphism は strict right-morphism に

あきかえり必要がある).

次に (6.1) の g が単元でない場合を考える. まず次の補題を示すのは難かしくない;

(6.3) 補題. f は $\mathcal{O}$ の単元でない元とし, g は $\mathcal{O}$ の元で $g = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$ と表わしてありとする. ただし k_i は自然数, f_i は $\mathcal{O}$ の元で (a) f_i は reduced, (b) f_i, f_j は互に素であるもの. このとき, もし $df = g\theta$, $\theta \in \Omega$, とかけらるなら, f は $f_1^{k_1+1} \cdots f_r^{k_r+1}$ で割り切れる.

さて g は (6.1) のものとし, (6.3) の条件を満たす f_i ととり $g = f_1^{k_1} \cdots f_r^{k_r}$ と表わす. そうすると,

$$f = f_1^{k_1+1} \cdots f_r^{k_r+1} f_{r+1}, \quad f_{r+1} \in \mathcal{O}$$

と書けるので

$$(6.4) \quad \omega = f_1 \cdots f_{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \quad \lambda_i = \begin{cases} k_i+1 & 1 \leq i \leq r, \\ 1 & i = r+1 \end{cases}$$

となる. 従ってこの場合は第 8 節で考えたものに帰着する.

7. 有理型第 1 積分をもつ葉層構造. 葉層構造 $\mathcal{F} = (\omega)$ が有理型第 1 積分をもつとは, 有理型関数 $\frac{f}{g}$ ($f, g \in \mathcal{O}$)

で

$$\omega \wedge d\left(\frac{f}{g}\right) = 0$$

となるものが存在する。このとき, $\text{codim } S(F) \geq 2$ より

$$(7.1) \quad h\omega = gdf - f dg, \quad h \in \mathcal{O}$$

と書けることが分る。

まず h は $\mathcal{O}$ の単元であるとして, F の生成元として $gdf - f dg$ かとし、以後 $\omega = gdf - f dg$ とおく。
 f と g で生成される ideal を (f, g) とすると次を得る
 ([19]):

$$(7.2) \text{ 補題 } I(F) = (f, g). \text{ 従って}$$

$$J(F) = (f, g) / J(F).$$

これを適用すると, 普遍性定理 ([I] 5.) の応用として次を得る。

(7.3) 定理. $F \in \mathbb{C}^n$ の $\mathcal{O}$ での余次元 1 の葉層構造で,
 $\omega = gdf - f dg$ ($f, g \in \mathcal{O}$) の形の生成元をもつとする。もし $\dim_{\mathbb{C}} (f, g) / J(\omega)$ が有限なら F は universal な開折をもつ。実際, $[u_1 g - v_1 f], \dots, [u_m g - v_m f]$ を $(f, g) / J(\omega)$ の $\mathbb{C}$ -基底とすると, 1^{st} x - y 空間が $\mathbb{C}^m$

$= \{(t_1, \dots, t_m)\}$ である F の開折 $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega})$,

$\tilde{\omega} = \tilde{g} d\tilde{f} - \tilde{f} d\tilde{g}$, $\tilde{f} = f + \sum_{k=1}^m u_k t_k$, $\tilde{g} = g + \sum_{k=1}^m v_k t_k$
 は universal である.

(7.4) 系. $F \in (7.3)$ のような葉層構造とすると, F の任意の開折は $\tilde{\omega} = \tilde{g} d\tilde{f} - \tilde{f} d\tilde{g}$ という形の生成元をもつ. ただし, $\tilde{f}, \tilde{g}$ はそれぞれ f, g の開折.

(7.5) 注意. $F = (\omega)$, $\omega = g df - f dg$ の開折理論は有理型関数 $\frac{f}{g}$ の開折理論と同値である (詳細は [19]).

つぎに (7.1) において $\mathcal{O}$ の単元である場合を考えた. 以下 f は reduced と仮定する. (7.1) は

$$(7.6) \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{h}{g^2} \omega$$

とも表わせる. f と g は互に素であるとしておくと, g が reduced だから f と h は互に素. 従って (7.6) より $\frac{f}{g} = c$ は h の零点集合の上で定数でなければならぬ. $h = f_1^{k_1} \dots f_r^{k_r}$ と表わしておく. ただし k_i は自然数で $i \neq j$ なら $k_i \neq k_j$, f_i は定数でない関数であり (6.3) の条件 (a), (b) を満たすものとする. そうすると

$$f - cg = f_1^{k_1+1} \dots f_r^{k_r+1} f_{r+2}, \quad f_{r+2} \in \mathcal{O}$$

と書ける. $f_{r+1} = g$ とおくと

$$\omega = f_1 \cdots f_{r+2} \sum_{i=1}^{r+2} \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \quad \lambda_i = \begin{cases} k_i+1 & \dots 1 \leq i \leq r, \\ -1 & \dots i = r+1, \\ 1 & \dots i = r+2 \end{cases}$$

となる. 従って, $r=0$ の場合は次節で考えるものに戻着下来了.

8. multiform 第1積分をもつ葉層構造. 葉層構造 F

$= (\omega)$ が multiform 第1積分をもつとは, $f_i \in \mathbb{C}$ と λ_i

$\in \mathbb{C}$ ($i=1, \dots, p$) で

$$\omega \wedge d(f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}) = 0$$

となるものが存在する. このとき $\text{codim } F(F) \geq 2$ より

$$g\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}, \quad g \in \mathbb{C}$$

と書けるが, ω は g は $\mathbb{C}$ の単元である. 従って

F の生成元として $f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ がとれるので以後 ω

$= f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ とする. f_i は regroup することによ

り, $i \neq j$ ならば $\lambda_i \neq \lambda_j$ としてよい. 更に, $\text{codim } F(F)$

≥ 2 より, 各 f_i は reduced かつ $i \neq j$ ならば f_i と

f_j は互に素であることが分る. 各 i に対し $F_i = f_1 \cdots \hat{f}_i \cdots f_p$

(f_i をのぞく) とおき, $(F_1, \dots, F_p)$ と $F_1, \dots, F_p$ と

生成した $\mathcal{O}$ の ideal を表す. また $\text{ht}(f_i, f_j, f_k)$ で f_i, f_j, f_k で生成した ideal の height を表すと次を得る ([20]).

(8.1) 補題. $df_1 \wedge \cdots \wedge df_p \neq 0$ かつ f_i, f_j, f_k が単元でないような任意の相異なる i, j, k に対し,
 $\text{ht}(f_i, f_j, f_k) = 3$ ならば $I(F) = (F_1, \dots, F_p)$ 従って

$$U(F) = (F_1, \dots, F_p) / J(F).$$

これを用いると, 普遍性定理 ([I] 5) の応用として次を得る.

(8.2) 定理. $F \in \mathbb{C}^n$ の $\mathcal{O}$ での余次元 1 の葉層構造で,

$$\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i} \text{ の形の生成元をとり, } f_1, \dots, f_p$$

は (8.1) の条件を満たすとする. もし $\dim_{\mathbb{C}} (F_1, \dots, F_p) / J(\omega)$ が有限ならば F は universal な開折をもつ. 実際,
 $[\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i^{(1)} F_i], \dots, [\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i^{(m)} F_i], u_i^{(k)} \in \mathcal{O}$, を
 $(F_1, \dots, F_p) / J(\omega)$ の $\mathbb{C}$ -基底とすると $\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ 空間
 $\mathbb{C}^m = \{(t_1, \dots, t_m)\}$ における F の開折子 $= (\tilde{\omega})$,

$$\tilde{\omega} = \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{d\tilde{f}_i}{\tilde{f}_i}, \quad \tilde{f}_i = f_i + \sum_{k=1}^m u_i^{(k)} t_k$$

は universal である。

(8.3) 系. $F \in (8.2)$ のような葉層構造とすると, F の任意の開折は $\tilde{\omega} = \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{d\tilde{f}_i}{\tilde{f}_i}$ という形の生成元をもつ. ただし各 $\tilde{f}_i$ は f_i の開折.

(8.4) 注意. $F = (\omega)$, $\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ の開折理論は多価関数 $f_1^{\lambda_1} \cdots f_p^{\lambda_p}$ の開折理論と同値である (詳細は [20]).

最後に, 正則第1積分をもつ葉層構造 (第6節後半参照) F で $\cup(F)$ に obstruct した元をもつ例をあげておく.

(8.5) 例. $F = (\omega) \in \mathbb{C}^2 = \{(x, y)\}$ の0での葉層構造で

$$\omega = y(3x+2y)dx + x(3x+4y)dy$$

で生成したものをとる. $f = x^2 y^3 (x+y)$, $g = x^2 y^3$ と

すると (6.1) が成り立ち, (6.4) により, $f_1 = x$,

$f_2 = y$, $f_3 = x+y$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ である.

但 $(f_1, f_2, f_3) = 2$ であるので (8.1) の条件は満たして

11. $h = 3x + 4y$ とする $\eta = 3dx$ に対し $h d\omega = \eta \wedge \omega$ とする ω の $[h]$ は $\cup(F)$ に λ , すなわち $\tilde{\omega}^{(1)} = (\tilde{\omega})$,

$$\tilde{\omega} = y(3x + 2y)dx + (3x^2 + 4xy + t)dy + (3x + 4y)dt$$
 は $[h]$ に対応する F の 1 次開折 ($[I]3$) であるが, $[h]$ に対応する開折が存在しない (上の $\tilde{\omega}$ に高次の項をつけ加えて積分可能条件を満たすようにすることが出来る) ことは容易にたしかめられる。

9. k -横断性, 有限既定性. この節では関数芽の場合の結果を葉層構造芽の場合に拡張することを試みる. 関数芽の場合は [15], [16], [18] 等を参照せよ. $\mathcal{Q}$ の元 f の Taylor 級数の k 次までの項の和を f の k -jet といい $j^k f$ で表わす. また Ω の元 $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ の k -jet $j^k \omega$ は

$$j^k \omega = \sum_{i=1}^n (j^{k-1} f_i) dx_i$$

により定義する. 正則 1 形式の芽の k -jet 全体を J^k で表わし $\pi_k: \Omega \rightarrow J^k$ ω に $j^k \omega$ を対応させる写像とする. 明らかに J^k は Euclid 空間の構造をもつ. さらに, $J^k(n)$ で $\mathbb{C}^n$ 上の正則 1 形式の芽の k -jet 全体を表わす. $J^k(n)$ は $J^k \times \mathbb{C}^n$ と同一視できる. 標準的全射 $J^k(n) \rightarrow J^k$ を π と書く. $\mathbb{C}^n$ の 0 を固定する局所双正則

写像の芽の k -jet のなる Lie 群 $L^k(n)$ で表わす; $L^k(n) = \{j^k \Phi \mid \Phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^n, d\Phi(0) \neq 0\}$. $L^k(n)$ の J^k の作用 $L^k(n) \times J^k \rightarrow J^k$ は $(j^k \Phi, j^k \omega) \mapsto j^k \Phi^* \omega$ により与えられる。

さて, $\mathbb{C}^n$ の 0 点の余次元 1 の葉層構造 $F = (\omega)$ に対して $\Omega(\omega) = \{\theta \in \Omega \mid \theta \wedge \omega = d\theta \wedge \omega - \theta d\omega, \theta \in \mathcal{O}\}$ とおく。右辺の条件は, $F = (\omega)$ の 1 次開折 $\tilde{F}^{(1)} = (\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega} \equiv \omega + \omega^{(1)}t + \theta dt \pmod{t^2, tdt}$ により $\omega^{(1)}$ の満たすべき条件である。 $\tilde{F} = (\tilde{\omega})$ が $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ の空間とする F の開折であるとき, 写像

$$j_1^k \tilde{\omega}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \rightarrow J^k(n)$$

と $j_1^k \tilde{\omega}(x, t) = j^k \omega_t(x)$ ($\omega_t = \tilde{\omega}|_{t=t}$ の x における芽の k -jet) により定まる。

(9.1) 定義. F の開折 $\tilde{F}$ が infinitesimally に k -横断的であるとは

$$\left[\bigcup_{\tilde{\omega}} d(\pi_* j_1^k \tilde{\omega})(T_0(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m)) \right]$$

$$+ T_z(L^k(n)(z)) = \pi_k \Omega(\omega), \quad z = j^k \omega$$

となること。ただし左辺第 1 項は $\tilde{\omega}|_{t=0} = \omega$ なるすべての $\tilde{F}$ の generator についての union で生成される $\mathbb{C}$ -

ポアンカレ空間, 第2項は $z = j^k \omega$ の $L^k(n)$ の作用の軌道の z における接空間で, J^k の z における接空間は J^k と同一視可.

一般に I が $\mathcal{O}$ の ideal でありとき

$$I * J(\omega) = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i d\psi_i + \sum_{i,j=1}^n \psi_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_j \mid \psi_i \in I \right\}$$

とある. さらに $\tilde{z} = (\tilde{\omega})$ が $\mathbb{C}^m = \{(t_1, \dots, t_m)\} \in \mathbb{R}^5 \times \mathbb{C}^m$ 空間とする $F = (\omega)$ の開折でありとき,

$$\tilde{\omega} = \omega + \sum_{l=1}^m \omega^{(l)} t_l + \sum_{l=1}^m h_l dt_l + \text{高次の項}$$

と書くことができる:

(9.2) 補題.

$$(1) \quad T_z(L^k(n)(z)) = \pi_k(m * J(\omega)) \quad (m \text{ は } \mathcal{O} \text{ の maximal ideal}).$$

$$(2) \quad d(\pi \circ j_1^k \tilde{\omega}) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = j^k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_j \right), \quad i=1, \dots, n,$$

$$d(\pi \circ j_1^k \tilde{\omega}) \left(\frac{\partial}{\partial t_l} \right) = j^k(\omega^{(l)}), \quad l=1, \dots, m.$$

証明は [18] 第7章 主要補助定理 III, IV と同様である.

(9.3) 系. $F=(\omega)$ の開折子 $=(\tilde{\omega})$ が k -横断的 である ことに注意

$\Omega(\omega) = [\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(l_m)}] + \mathcal{O}^* J(\omega) + \mathcal{O} \omega + \pi_e^{-1}(0) \cap \Omega(\omega)$ であることが必要十分. ただし右辺第1項は $\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(l_m)}$ で生成される $\Omega(\omega)$ の $\mathbb{C}$ -ベクトル部分空間である.

次に, 一次開折の空間 $\mathcal{U}(F) = I(\omega)/J(\omega)$ との関係は次のようになる.

(9.4) 補題.

$$I(\omega)/(J(\omega) + \{g \mid g d\omega = dg \lrcorner \omega\}) \simeq \Omega(\omega)/(\mathcal{O}^* J(\omega) + \mathcal{O} \omega).$$

同型対応は, $h \in I(\omega)$, $h d\omega = \eta \lrcorner \omega$ の類 $[h] = [dh - \eta]$ に対応させることにより得られる.

(9.5) 系. F が F の infinitesimally versal な開折ならば, 任意の k に対し infinitesimally k -横断的な開折である.

次に $F=(\omega)$ の有限既定性について考える.

(9.6) 定義. $F=(\omega)$ が k -既定であるとは, $j^k \omega' = j^k \omega$ なる生成元 ω' を持つ任意の葉層構造 F' に対し, $\mathbb{C}^n$ の 0 における局所双正則写像芽 Φ ($\Phi(0)=0$) と, $\mathcal{O}$ の単元 u で

$\pi^* \omega = u \omega'$ となるものが存在すること。 F が有限既定であるとは、ある k に対し k -既定となること。

周知のように、関数芽 f に対しては、次の Mather の結果がある：

$$m^k \subset m J(f) + m^{k+1} \quad \text{なら} \quad f \text{ は } k\text{-既定.}$$

これを適用すると、 $\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}/J(f))$ の有限性から f の有限既定性が出るわけである。そこで葉層構造芽の場合に次のようなことを考えてみよう。

(9.7) 問題. $\mathcal{U}(F) = \mathcal{I}(F)/J(F)$ が有限次元なら F は有限既定か？

これを示すには、関数芽 α ときの類似で

$$\pi_{k-1}^{-1}(0) \cap \Omega(\omega) \subset m^* J(\omega) + \mathcal{O}\omega + \pi_k^{-1}(0)$$

ならば F は k -既定

であることと証明すればよい。現在のところ、これは特別な場合（例えば ω が homogeneous α ときの）のみ証明できる。

ω が homogeneous の特殊な場合として $\omega = x_1 \cdots x_n \sum_{i=1}^n 1_i \frac{dx_i}{x_i}$ に対する有限既定性の結果がある。た (Cerveau - Neto [2], [17] Théorème B₅, 及び [I] 5 節 普遍性定理の系 (II) も参照。また (9.7) を肯定的に裏付ける α と

して $\omega = f_1 \cdots f_p \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{df_i}{f_i}$ に対する弱の意味の有限既定性 (Cerveau - Mattei [17] Théorème 2.1) 等がある。

References

[I] 諏訪立雄, 複素解析的葉層構造の特異点, 数理論究録「特異点とめぐる位相的解析の様相」1981年10月
以下は [I] の references の一つである。

- [16] Th. Bröcker, Differentiable Germs and Catastrophes, Cambridge University Press, Cambridge 1975.
- [17] D. Cerveau, Contribution à l'étude des formes intégrables singulières, Thèse, Dijon 1981.
- [18] 野口弘, 福田拓生, 初等カタストロフ, 共立全書208 共立出版, 1976.
- [19] T. Suwa, Unfoldings of meromorphic functions, preprint.
- [20] T. Suwa, Unfoldings of foliations with multiform first integrals, preprint.