

Tutte 多項式と Jones 多項式の計算

東京大学・情報科学 関根京子 (Kyoko Sekine)

東京大学・情報科学 今井 浩 (Hiroshi Imai)

1 はじめに

Tutte 多項式はグラフ理論の分野において基本的かつ重要な不変量であり、結び目の分野における交代絡み目の Jones 多項式とも関係があることが知られている。本稿では、最近提示した Tutte 多項式を計算する新しいアルゴリズムを一般の絡み目の Jones 多項式の計算に応用する。さらに Jones 多項式の計算は #P-hard の問題であるが、このアルゴリズムにより交点数 100 以上の絡み目の Jones 多項式が計算可能となる例を示す。

2 bracket 多項式と Jones 多項式

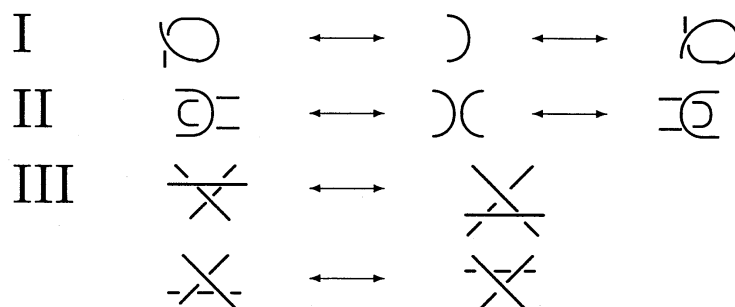
結び目は、 S^1 を S^3 へ埋め込んだものとみることができる。絡み目は、結び目の有限個の集まりをいう。一般に、絡み目 L は任意の交点において高々 2 曲線しか交わらないような平面への射影図を用いて表わされ、これをリンク・ダイアグラム $D(L)$ という。各交点での上下関係を例 1 のように下となる曲線に切れ目をいれて表わす。

例 1 三葉結び目のリンク・ダイアグラム。



このようなリンク・ダイアグラムで表わされた絡み目の同値性に関しては次の定理が古くから知られている。

定理 1 (Reidemeister) 2 つの絡み目が同値である。 $\iff$ 2 つの絡み目が次のライデマイスター移動 I, II, III を局所的に有限回適用することによって移りあえる。



しかしながら与えられた2つの絡み目が同値であるか否かを判定するのは容易ではない。このような観点からも、同値な絡み目に対して等しい値をもつ不変量は重要な意味をもっているといえる。結び目の分野において不変量を表わす多項式は数多く発見されたが、中でも Jones 多項式は有名である。最初に Jones 多項式と非常に関係の深い Kauffman の bracket 多項式を定義する。

定義 1 (bracket 多項式) *bracket* 多項式 $\langle D \rangle$ は与えられた絡み目のリンク・ダイアグラム D に次の3つの規則を適用することにより得られる1変数 A に関する多項式である：

- (i) $\langle U \rangle = 1$
- (ii) $\langle D U \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle D \rangle$
- (iii) $\langle \nearrow \searrow \rangle = A \langle \smile \rangle + A^{-1} \langle \frown \rangle$

ただし、 U は自明な結び目、 $D U$ は自明な結び目との *union* を表わすとする。また (iii) はリンク・ダイアグラムの各交点で局所的に適用する。

bracket 多項式はライデマイスター移動 II, III のもとで不変であるが ([6] 参照)、次式が示すようにライデマイスター移動 I のもとで不変ではない。

$$\begin{aligned} \langle \delta \rangle &= A \langle \smile \rangle + A^{-1} \langle \cup \rangle \\ &= -A(A^2 + A^{-2}) \langle \cup \rangle + A^{-1} \langle \cup \rangle \\ &= -A^3 \langle \cup \rangle \end{aligned}$$

向きのついた絡み目 L とは絡み目の各成分に向きを与えたもので、リンク・ダイアグラムの各交点は下図にもとづいて符号が割り当てられる。



また、向きのついた絡み目 L のねじれ数 $\omega(D)$ とは、 L の向きのついたリンク・ダイアグラム D における交点の符号 (+1 または -1) の総和で表わされる。ねじれ数もライデマイスター移動 II, III のもとで不変であるが、ライデマイスター移動 I のもとで不変ではない。しかしながら、ねじれ数と Kauffman の bracket 多項式を組み合わせることによってライデマイスター移動 I, II, III のもとで不変な Jones 多項式が得られる。

任意の向きのついた絡み目 L のリンク・ダイアグラム D に対して、Jones 多項式 V_L と bracket 多項式 $\langle D \rangle$ は次式のような関係にある。

$$V_L(A^{-4}) = (-A^3)^{-\omega(D)} \langle D \rangle$$

3 Tutte 多項式

3.1 Tutte 多項式の recursive formula

$G = (V, E)$ を頂点集合が V 、辺集合が E であるような無向グラフとする。

Tutte 多項式は、2 変数 x, y を用いて定義されるグラフの不変量を表わす多項式である。 $y = 0$ のときには彩色多項式に、 $x = 0$ のときにはフロー多項式に対応している。また $x = 1, y = 1$ のときには全域木の数、 $x = 2, y = 1$ のときには森の数を表わしている。このように Tutte 多項式は単に不変量を表わすだけでなく、意味のある値を含んだ重要な多項式である。

Tutte 多項式は、次のような辺の縮約・削除の繰り返しにより計算することができる。 $G \setminus e$ はグラフ G から辺 e を削除して得られるグラフ、 G/e は G から辺 e を縮約 (辺 e を縮めて両端の頂点を 1 点にすること) して得られるグラフを表わすとする。また、ループは両端が同一の頂点であるような辺、橋はその辺を削除するとグラフの連結成分数が 1 増えるような辺を表わすとする。

定理 2 (Tutte) Tutte 多項式は次のような recursive formula をもつ。

$$T(G; x, y) = \begin{cases} xT(G/e; x, y) & e \text{ が橋のとき} \\ yT(G \setminus e; x, y) & e \text{ がループのとき} \\ T(G/e; x, y) + T(G \setminus e; x, y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし G が橋のとき $T(G; x, y) = x$ 、ループのとき $T(G; x, y) = y$ 、辺をもたないとき $T(G; x, y) = 1$ とする。

辺の縮約・削除を用いた Tutte 多項式の計算過程は図 1 のような計算木をトップダウンに計算することに相当する。この計算木において同一レベルに属するマイナー (辺の縮約・削除を繰り返すことにより得られるグラフ) の Tutte 多項式の和が、与えられたグラフの Tutte 多項式を表わす。従ってすべての葉の和が求める Tutte 多項式となっている。このとき葉の数は全域木の数、計算木の深さは辺の数である。

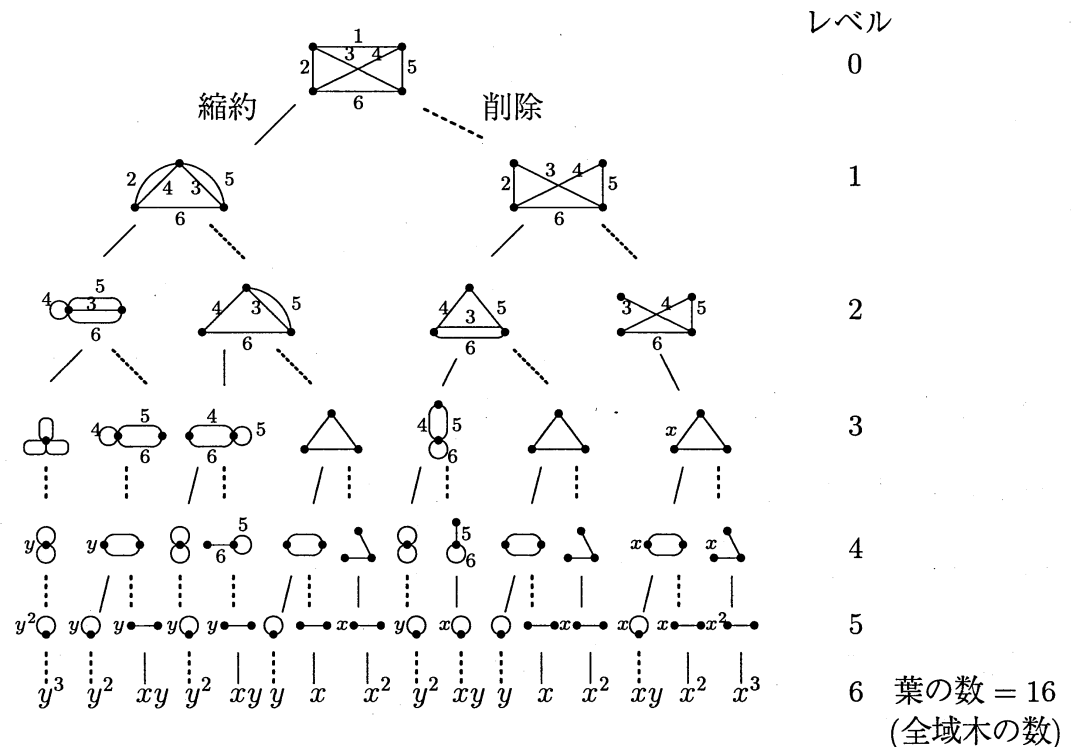


図 1: $T(K_4; x, y)$ の計算

3.2 Tutte 多項式の計算

Tutte 多項式を計算する問題は #P-hard である。実際、例えば頂点数 n の完全グラフ K_n の全域木の本数は n^{n-2} であるので、単純に辺の縮約・削除を繰り返して計算できるのはごく小さいグラフに限られてしまうことになる。これに対し、最近提示したアルゴリズム [3] を用いることによって、例えば頂点数 14 の完全グラフ K_{14} や 12×12 の格子グラフの Tutte 多項式が計算可能となる。このアルゴリズムは 2 同型なグラフ (サイクルの集合が等しいグラフ) の Tutte 多項式が等しいことを利用したもので、実際には与えられたグラフの辺に順序をつけ、辺の順序も含めて 2 同型なマイナーについてすべて統一している。このアルゴリズムによる計算過程は図 2 のようになる。

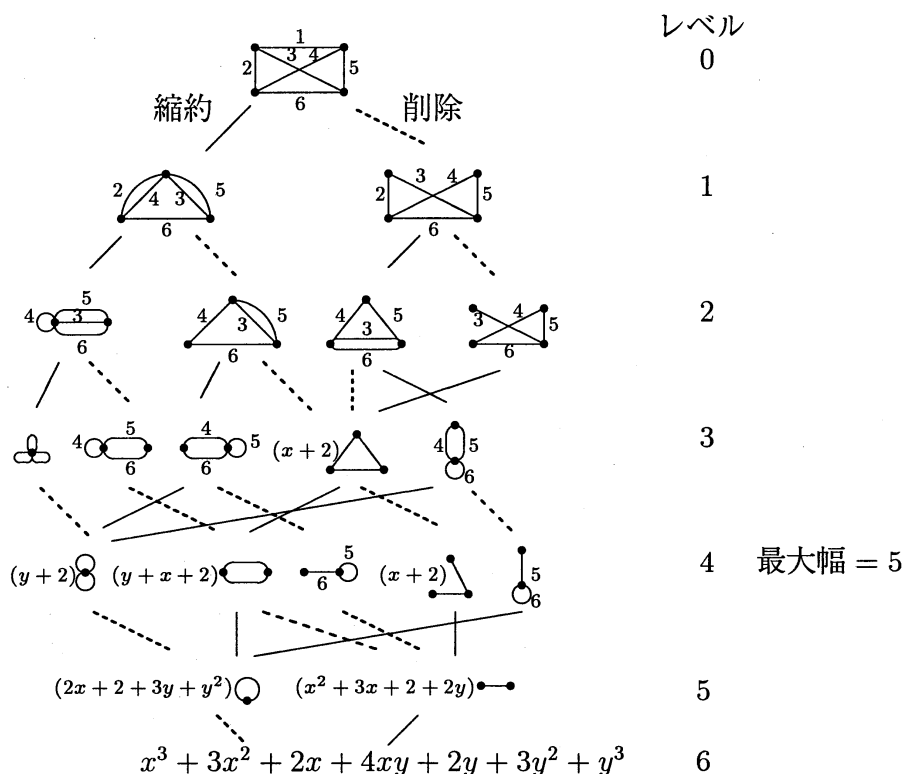
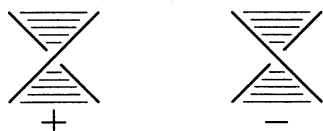


図 2: 2 同型マイナーを統一した $T(K_4; x, y)$ の計算

4 bracket 多項式の recursive formula

bracket 多項式を実際に計算するには、符号付きグラフを用いる方法がある。符号付きグラフは次のような方法 (Tait colouring) で得られる (例 2 参照)。

任意のリンク・ダイアグラム D に対して、隣り合う領域が同じ色にならないように黒と白の 2 色で塗り分ける。このとき無限領域を白とする。次に各黒領域において一点を選ぶ。もし 2 つの黒領域が隣接しているならばそれぞれの領域の選んだ点を辺で結び、この辺の符号を下図にもとづいて定める。このようにして符号付き平面グラフ S が得られる。



符号付きグラフ S に対して Tutte 多項式に類似した辺の縮約・削除公式が成り立つことが Thistlethwaite[4] によって示された ([5, 6] 参照)。これは例えば 2 つの隣接した黒領域を結ぶ辺 e が正であるとき、2 つの黒領域をつなげて 1 つにする操作は辺 e の縮約に、2 つの黒領域を隣接しないように分離する操作は辺 e の削除に相当するというものである。

$$\langle \text{---} \bowtie \text{---} \rangle = A \langle \text{---} \text{---} \text{---} \rangle + A^{-1} \langle \text{---} \text{---} \rangle$$

$$\langle S \rangle = A \langle S/e \rangle + A^{-1} \langle S \setminus e \rangle$$

また、辺 e が正の橋の場合には、 $S \setminus e$ は非連結 (すなわち $S \setminus e$ に対応する絡み目の成分数が 1 増加) となるが、 $S \setminus e$ と S/e は 2 同型であり、これらの間には次のような関係式が成り立つ。

$$\langle S \setminus e \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle S/e \rangle$$

従って辺 e が正の橋の場合には、

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= A \langle S/e \rangle + A^{-1} \langle S \setminus e \rangle && \text{規則 (iii) より} \\ &= -A^{-3} \langle S/e \rangle \end{aligned}$$

負の橋の場合やループの場合も同様であり、まとめると次のような recursive formula が成り立つ。

$$\langle S \rangle = \begin{cases} -A^{-3} \langle S/e \rangle & e \text{ が正の橋} \\ -A^3 \langle S/e \rangle & e \text{ が負の橋} \\ -A^3 \langle S \setminus e \rangle & e \text{ が正のループ} \\ -A^{-3} \langle S \setminus e \rangle & e \text{ が負のループ} \\ A \langle S/e \rangle + A^{-1} \langle S \setminus e \rangle & e \text{ が正 (otherwise)} \\ A \langle S \setminus e \rangle + A^{-1} \langle S/e \rangle & e \text{ が負 (otherwise)} \end{cases}$$

また、 S が 1 本の辺からなる場合のリンク・ダイアグラムおよび bracket 多項式はそれぞれ次のようになる。

正の橋 C^+	負の橋 C^-	正のループ L^+	負のループ L^-

$$\langle C^+ \rangle = -A^{-3} \quad \langle C^- \rangle = -A^3 \quad \langle L^+ \rangle = -A^3 \quad \langle L^- \rangle = -A^{-3}$$

S の辺集合が空の場合は、bracket 多項式の定義における規則 (i) より 1 となる。

5 Jones 多項式への応用

交代絡み目とは、リンク・ダイアグラムの各々の曲線をたどると交点での上下が常に交互になるように表わすことができる場合をいう。このとき符号付きグラフが連結であれば、各辺の符号がすべて同一となり、しかも正となるようにリンク・ダイアグラムで表わすことができる。

このような交代絡み目においては Jones 多項式と Tutte 多項式の間に関係式が成り立つことが Thistlethwaite によって示された [5]。しかしながら交代絡み目でない一般の絡み目において

も、bracket 多項式を辺の縮約・削除を繰り返して計算する際に、Tutte 多項式を計算するアルゴリズム [3] を応用することができる。

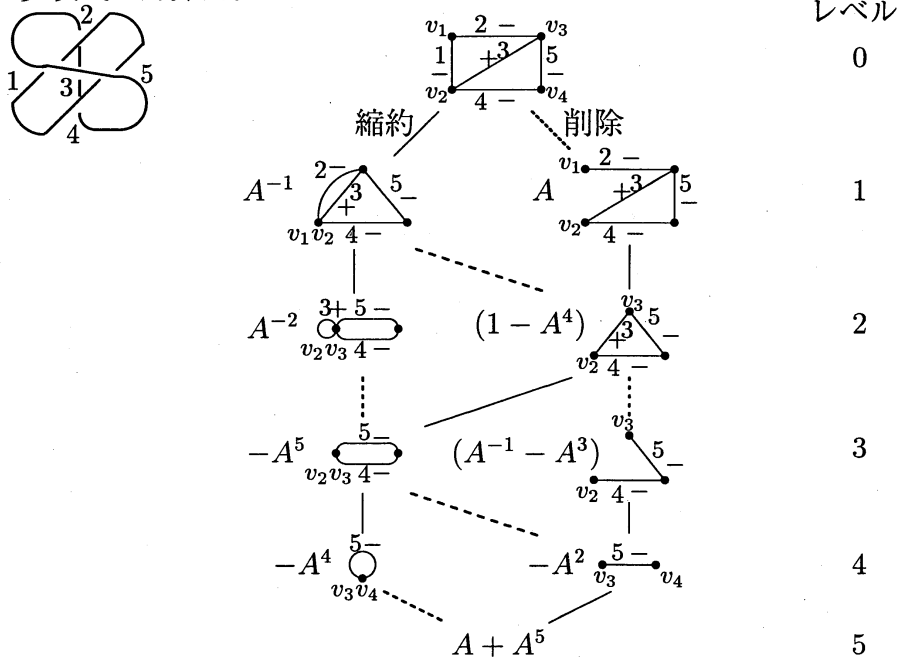
G の辺集合 E の辺の順序を $e_1, e_2, \dots, e_m$ とし、レベル i において既に縮約・削除をおこなった辺の集合を $E_i = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ 、まだ何もおこなっていない辺の集合を $\bar{E}_i = \{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_m\}$ とする。レベル i のエリミネーション・フロントとは、 E_i に属する辺および $\bar{E}_i$ に属する辺の両方に付随した頂点の集合をいう。エリミネーション分割とは、レベル i のエリミネーション・フロントにおいて、縮約により統一された頂点を同値類と見なした頂点分割をいう。

例えば例 2 のレベル 2 のエリミネーション・フロントは $\{v_2, v_3\}$ であり、一方のマイナーにおいてはこれら 2 つの頂点は縮約によって 1 つに統一されているので、このマイナーのエリミネーション分割は $\{\{v_2, v_3\}\}$ となり、もう一方のマイナーのエリミネーション分割は $\{\{v_2\}, \{v_3\}\}$ となる。一般的に次の定理が成り立つ。

定理 3 H_1, H_2 を辺集合 $\bar{E}_i$ からなる S のマイナーとする。 H_1 と H_2 のエリミネーション分割が等しい必要十分条件は、 H_1 と H_2 が辺の順序も含めて同型であることである。

符号付きグラフ S において、辺 e の縮約・削除をおこなっても残りのどの辺の符号も変化しない。従って辺の順序も含めて同型なマイナーは、各辺の符号も含めて同型である。すなわち上記の定理をもとに、辺の順序も含めて同型なマイナーをすべて統一して計算することができる (例 2 参照)。

例 2 bracket 多項式の計算例。



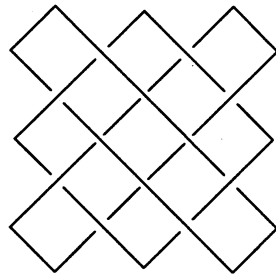
この計算過程において深さは辺の数であるので、実際にはレベルの最大幅が重要となる。符号付きグラフは一般に平面グラフであるので、その代表例である $k \times k$ 格子グラフについて、このアルゴリズムによるレベルの最大幅と全域木の数 (単純に辺の縮約・削除を繰り返した場合の最大幅) を比較すると表 1 のようになる。

Jones 多項式の計算は #P-hard の問題であるが、表 1 は符号付きグラフが格子グラフとなるような絡み目において、交点数 100 以上の絡み目の Jones 多項式がこのアルゴリズムにより計算可能であることを示している。

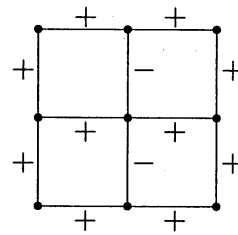
表 1: $k \times k$ 格子グラフの計算量

k	$ V $	$ E $	最大幅	幅の総和	全域木の数
2	4	4	2	8	4
3	9	12	5	47	192
4	16	24	14	252	100352
5	25	40	42	1260	557568000
6	36	60	132	6002	$\approx 3.26 \times 10^{13}$
7	49	84	429	27646	$\approx 1.99 \times 10^{19}$
8	64	112	1430	124330	$\approx 1.26 \times 10^{26}$
9	81	144	4862	549382	$\approx 8.32 \times 10^{33}$
10	100	180	16796	2395385	$\approx 5.69 \times 10^{42}$
11	121	220	58786	10336173	$\approx 4.03 \times 10^{52}$
12	144	264	208012	44232654	$\approx 2.95 \times 10^{63}$

例 3 符号付きグラフが格子グラフとなる絡み目の例。格子グラフの各辺の符号の組合せにより対応する絡み目は異なり、例えばすべての辺の符号が正の場合には交代絡み目に対応する。



(a) 交点数 12 の絡み目

(b) 対応する符号付きグラフ
(3×3 の格子グラフ)

参考文献

- [1] A. Kawauchi: 結び目理論, Springer-Verlag Tokyo, 1990.
- [2] K. Murasugi: 結び目理論とその応用, 日本評論社, 1993.
- [3] K. Sekine, H. Imai and S. Tani: Computing the Tutte Polynomial of a Graph of Moderate Size. *Proceedings of the 6th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'95)*, Lecture Notes in Computer Science, 1995.
- [4] M. B. Thistlethwaite: A Spanning Tree Expansion of the Jones Polynomial. *Topology* Vol.26, pp297-309, 1987.
- [5] D. J. A. Welsh: *Colouring and Knot Polynomials*. Report No. 90664-OR, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, 1990.
- [6] D. J. A. Welsh: *Complexity: Knots, Colourings and Counting*, London Mathematical Society Lecture Note Series 186, Cambridge University Press, 1993.