

変換群の現状と問題点 1)

(ホモトピー-射影空間の上の S^1 , $\mathbb{Z}_p$, T^n -作用についての近況報告)

津田 塾大 吉田 朋好

序

ホモトピー-複素射影空間の上の S^1 , $\mathbb{Z}_p$, T^n -作用についての、主に Hsiang 兄弟, G.E. Bredon, T. Petrie による研究の結果を紹介する。以下 $\mathbb{C}P^n$ は複素 n 次元複素射影空間, $\mathbb{R}P^n$ は n 次元実射影空間をあらわす。

§1. 固定点集合の Cohomology ([7], [8], [10] 等)

以下で $X \sim_p Y$ とは $H^*(X; \mathbb{Z}_p) \cong H^*(Y; \mathbb{Z}_p)$

(p : 素数)

$X \sim_{\mathbb{Z}} Y$ とは $H^*(X; \mathbb{Z}) \cong H^*(Y; \mathbb{Z})$

を意味する。

定理. X を有限 CW 複体とホモトピー-同値な位相空間で、 $X \sim_p \mathbb{C}P^n$ とする。 $\mathbb{Z}_p$ が X の上に作用し、その固定点

集合を $F = \bigcup F_j$ (F_j は連結成分) とする。このとき、次のことが成り立つ。

$$a). F_j \sim_p \mathbb{C}P^{n_j} \text{ 又は } \mathbb{R}P^{n_j} \quad \exists n_j \leq n.$$

$$\sum (n_j + 1) = n + 1. \quad \text{又}$$

F_j の数は p をいえない。

ただし、 $p \neq 2$ のときは $\mathbb{R}P^{n_j}$ はあらわれない。

$$b). F_j \sim_p \mathbb{C}P^{n_j} \text{ ならば}$$

$$H^2(X; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^2(F_j; \mathbb{Z}_p) \quad (\text{制限写像})$$

証明は

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X \times_{\mathbb{Z}_p} E_{\mathbb{Z}_p} & \longrightarrow & B\mathbb{Z}_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ F & \longrightarrow & F \times B\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & B\mathbb{Z}_p \end{array}$$

に関するスホクトル系列による。ここに $E_{\mathbb{Z}_p} \rightarrow B\mathbb{Z}_p$ は
普遍 $\mathbb{Z}_p$ -バンドル。

定理 X を有限 CW 複体とホモトピー同値な位相空間で $X \sim_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}P^n$ とする。 S^1 が X に作用し、その固定点集合が $F = \bigcup F_j$ (F_j は連結成分) であるとする。このとき次のことが成り立つ。

$$F_j \sim_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}P^{n_j} \quad \exists n_j \leq n$$

$$\sum (n_j + 1) = n + 1, \text{ 又}$$

$$H^2(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^2(F_j; \mathbb{Z}) \quad (\text{制限写像})$$

これらの定理の証明は、 $X \rightarrow X \times_G EG \rightarrow BG$ ($G = \mathbb{Z}_p, S'$) に関する Cohomology スパクトル系列の初等的なものであるが、巧みな適用によってなされる。

§2. $(X \times_{S'} ES')$ の Cohomology (W. Y. Hsiang, [10] 参照)

定理 X を有限 CW 複体とす。モトロー同値な位相空間とし、 $X \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}P^n$ とする。 X に S' が作用していて、その固定点集合が F であるとする。 $j: F \rightarrow X$ を包含写像とする。このとき、

$$j^*: H^*(X \times_{S'} ES'; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(F \times BS'; \mathbb{Z})$$

は単射。又、

$$H^*(X \times_{S'} ES'; \mathbb{Z}) \cong H^*(BS'; \mathbb{Z}) [\alpha] \bigg/ \prod (\alpha - c_j t)^{n_j+1}$$

とわかる。2.2 に、

$$n_j \text{ は } F = \bigcup F_j \quad (F_j \text{ は連結成分}) \quad \text{で}$$

$$F_j \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}P^{n_j}$$

$$\alpha \text{ は } H^2(X \times_{S'} ES') \text{ の元で、制限写像によって}$$

$H^2(X)$ の生成元に写されるもの.

t は, $H^2(BS'; \mathbb{Z})$ の生成元.

c_j は, $j^*(\alpha) = c \otimes t + \dots \in H^2(F \times BS'; \mathbb{Z})$

$$c \in H^0(F; \mathbb{Z})$$

とした時 $c = \sum c_j \in H^0(F; \mathbb{Z}) = \sum H^0(F_j; \mathbb{Z})$

となる c_j をあらわす.

上の定理は, $X \times_{S'} ES'$ の Cohomology に関しては, $\mathbb{CP}^n$ 上の線型作用と, 一般の $X \simeq \mathbb{CP}^n$ なる X 上の S' -作用とは区別のないことを示している.

§3. ホモトピー $\mathbb{CP}^n$ 上の S' -作用 (T. Petrie の結果 [11], [13], [14], [15])

ここでは ホモトピー $\mathbb{CP}^n$ 上のなめらかな S' -作用に関する, T. Petrie の結果について紹介する.

X を ホモトピー $\mathbb{CP}^n$ であるなめらかな多様体. $h: X \rightarrow \mathbb{CP}^n$ を ホモトピー同値を与えるなめらかな写像とする. H を $\mathbb{CP}^n$ 上の Hopf line bundle とし, h による H の引きもとし E . η であらわす.

次の仮定をおく

仮定 (*) X の上に S' がなめらかに作用し, 固定点集合は.

$(n+1)$ 個の離散的な点集合 $\{p_i\}_{0 \leq i \leq n}$ とする。

整数の組 $\{a_i\}_{0 \leq i \leq n}$, $\{x_{ij}\}_{0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ を次のように定義する。

$\{a_i\}$: X 上の S' -作用が η のバンドル-作用に lift できることを使って、 η を S' -バンドルとする。このとき、 $\eta|_{p_i}$ での η のファイバーへの S' の表現を t^{a_i} とする (ここには $K(S')$ の basic character)。

$\{x_{ij}\}$: X の接バンドルを TX とし、 $TX|_{p_i}$ における S' の表現を $\sum_{j=1}^n t^{x_{ij}}$ とする。

注: X 上の S' -作用が η に lift できることは $H^1(X; \mathbb{Z}) = 0$ による。[18], [19] 参照。lift の仕方は一意的ではない。したがって、 $\{a_i\}$ は一意に定まらないが、差 $\{a_j - a_i\}$ は一意に定まる。

定理 $A(X) = \prod (\delta_i / 2) (\sinh \delta_i / 2)^{-2}$
 (ここには δ_i^2 の symmetric function = Pontryagin class)

は、 η と $\{x_{ij}\}$ によってきまる。

系

$$\xi_i(t) = \prod_{j \neq i} (t^{-(a_j - a_i)/2} - t^{(a_j - a_i)/2}) \prod (t^{-x_{ij}/2} - t^{x_{ij}/2})^{-1}$$

とおく。

$\xi_i(t)$ が i によらないならば、 $h^* \hat{A}(\mathbb{C}P^n) = \hat{A}(X)$

この定理と、系によって仮定 (*) をみたすような、 S^1 -作用を許すホモトピー $\mathbb{C}P^n$ は かなり限られたものになることがわかる。

$\{a_i\}$ と $\{x_{ij}\}$ の関係については、 $\{a_j - a_i\}_{j \neq i}$ と $\{x_{ij}\}$ とが (i を固定して) 一致するかどうかという W. Y. Hsiang による問題があったが、T. Petric は [11] に於て、両者が一致しない例を $\mathbb{C}P^3$ 上に構成した。
 $\{a_i\}$ と $\{x_{ij}\}$ の関係については 次の定理がある。

定理: $\prod_{j \neq i} (a_j - a_i) = \pm \prod_{j=1}^n x_{ij}$

この定理は Cohomological な手段によって証明される。
([10] VII).

Petrie は equivariant K -理論 $K_S^*(?)$ を用いて、さらに詳しい次の定理を得た ([11])。

定理 整数 $m (> 0)$ に対して、

$n_i(m) = m \mid (a_j - a_i)$ であるような $j (\neq i)$ の数

$d_i(m) = m \mid x_{ij}$ であるような j の数

とおき、

$$\delta_i(m) = n_i(m) - d_i(m)$$

とおく。このとき

$\delta_i(m) \geq 0$, $\delta_i(p^r) = 0$ if p^r : 素数の中、
が成り立つ。

§4 ホモトピー- $\mathbb{C}P^n$ 上の T^n -作用. ([12])

T^n を n 次元トーラスとし、ホモトピー- $\mathbb{C}P^n$ 上のなめらかな T^n -作用についての Petrie [12] の結果を紹介する。

定理. X をホモトピー- $\mathbb{C}P^n$. $h: X \rightarrow \mathbb{C}P^n$ をホモトピー同値を与える、なめらかな写像とする。 n 次元トーラス T^n が X になめらかに、かつ、効果的に作用しているならば

$$h^* \mathcal{A}(\mathbb{C}P^n) = \mathcal{A}(X)$$

が成り立つ。

この定理は、 T^n の適当な部分群 S' に §3 に述べた定理の系を適用することによって得られる。

問題

1) $h: X \rightarrow \mathbb{C}P^n$ 向きを保つホモトピー同値写像 (X はなめらかな閉じた多様体)。もし、 X が、自明でない S' -作用をもつならば $h^*A(\mathbb{C}P^n) = A(X)$ か？

2) M : なめらかな閉じた多様体

$\max \{ n \mid T^n \text{ が なめらかに、かつ、効果的に } M \text{ に } \}$
はたらく

を求めること。

3) とくに、ホモトピー $\mathbb{C}P^3$ 上の効果的 T^2 -作用はどの程度存在するか？

4) 問題 1) に於ける $h^*A(\mathbb{C}P^n) = A(X)$ は、 X が効果的な T^n -作用をもつための十分条件か？

1. Atiyah M.F. : "K - Theory" Benjamin New York 1967
2. Atiyah M.F. and Hirzebruch F. Spin-manifolds and group actions, Essays on Topology and Related Topics pp.18 — 28 Springer-Verlag, Berlin and New York 1970.
3. Atiyah M.F. and Segal G.B. : The index of elliptic operators II Ann.of Math. 87 (1968) 531 — 545
4. Atiyah M.F. and Segal G.B. : Equivariant K-theory and completion, J. Differential Geometry 3 (1969) 1 — 18
5. Atiyah M.F. and Singer I.M. : The index of elliptic operators I. Ann. of Math. 87 (1968) 484 — 530.
6. Atiyah M.F. and Singer I.M. : The index of elliptic operators III. Ann. of Math. 87 (1968) 546 — 604.
7. Bredon G.E. : The cohomology ring structure of a fixed point set. Ann. of Math. 80 (1964) 524 — 537
8. Bredon G.E. : Cohomological aspects of transformation groups, "Proc. Conf. Transformation Groups, New Orleans 1967" pp 245 — 280. Springer Verlag 1968
9. Bredon G.E. : Representations at fixed points of smooth actions of compact groups. Ann. of Math. 89 (1969) 515 — 532
10. Bredon G.E. : "Introduction to Compact Transformation Groups" New York-London ; Academic Press 1972
11. Petrie T. : Smooth S^1 -actions on homotopy complex projective spaces and related topics. Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972)
12. Petrie T. : Torus actions on homotopy complex projective spaces. Inventiones math. 20. (1973) 139 — 146.
13. Petrie T. : Smooth S^1 -actions and bilinear forms. Bull. A.M.S. 79 1056 — 1059

- 14. Petrie T. : Exotic S^1 -actions on CP^3 and related topics. Inventiones math. 17 317-328.
- 15. petrie T. : Induction in equivariant K-theory and geometric applications Proc. Conference on Algebraic K-theory III Springer Lecture Note 343
- 16. Petrie T. : Real algebraic actions on complex projective spaces — a survey Ann. l'Inst. Fourier (to appear)
- 17. Petrie T. : A setting for smooth S^1 -actions with applications to real algebraic actions on CP^{4n-1} (to appear)
- 18. Stewart T.E. : Lifting group actions in fibre bundles Ann. of Math. 74 (1961) 192-198.
- 19. Su J.C. : Transformation groups on cohomology projective spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963) 305-318.