

Analyticity of Solutions to Schrödinger Equations with Some Derivative Nonlinear Terms

東京理科大学理学部数理情報科学科 内田 英建 (Hidetake UCHIDA)
Department of Mathematical Information Science
Tokyo University of Science

1 Introduction

本講究録は, [9] で扱われた非線形 Schrödinger 方程式の解の解析性 ($s = 1$) の結果に対する一般の Gevrey 族 ($s \geq 1$) への拡張である.

次のような非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$(NLS) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mathcal{N}(u, \nabla u, \bar{u}, \nabla \bar{u}), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで, 非線形項は

$$\mathcal{N}(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = \sum_{\substack{2 \leq |\alpha| + |\beta| \leq l, \\ r \leq |\beta| \leq l}} \lambda_{\alpha\beta} u^{\alpha_1} \bar{u}^{\alpha_2} v^{\beta_1} \bar{v}^{\beta_2},$$

とし, $\lambda_{\alpha\beta}$, $l \geq 2$ とする. また, $N = 3, 4$ のときは $r \geq 1$, $N \geq 5$ のときは $r \geq 0$ とする.

Hayashi-Kato [3] と Kato-Taniguchi [7] は導関数を含まない非線形項を持った Schrödinger 方程式の解の解析性を示した. Hayashi-Kato は初期データが $x \cdot \nabla$ と ∇ に関して Gevrey 族にあるとき, 解が $s(\geq 1)$ の Gevrey 族であることを示した ($s = 1$ のとき解析的). また, Kato-Taniguchi は非線形項が t, x, u に関して Gevrey 族で, 初期データが $x \cdot \nabla$ に関して Gevrey 族であるとき, 解が $s(\geq 1)$ の Gevrey 族であることを示した.

一方, Hayashi-Naumkin-Pipolo [5] は導関数を含む非線形 Schrödinger 方程式の解の解析性を示した. ただし, 彼らが扱った非線形項は, gauge 不変性, すなわち,

$$(1) \quad \mathcal{N}(e^{i\theta} u, e^{i\theta} v, \overline{e^{i\theta} u}, \overline{e^{i\theta} v}) = e^{i\theta} \mathcal{N}(u, v, \bar{u}, \bar{v}) \quad \text{for any } \theta \in \mathbb{R} \text{ and } u, v \in \mathbb{C},$$

を満足するような 3 次の多項式である. Hayashi-Naumkin-Pipolo は, 初期データが $H^{3,0}$ で十分小さく, さらに無限遠方で指数的に減衰しているときに, 解が解析的であることを示した. また, Chihara は, Hayashi-Naumkin-Pipolo と同様に, (1) を満足するような 3 次の多項式を非線形項に持つ Schrödinger 方程式に対して, Hayashi-Naumkin-Pipolo の結

果と比べて初期データの Sobolev 空間の微分の階数が高いが、データが小さくなくても解が解析的であることを [1] で発表している。

さらに、楕円型-双曲型の Davey-Stewartson 方程式から導かれる非局所的な非線形項を持つ Schrödinger 方程式に関して、Hayashi-Naumkin-Uchida [6] が [5] と同様な方法を用いて解の解析性を示している。

また、Taniguchi [8] は、[7] と同様な条件の下で、非線形項に導関数を含む Schrödinger 方程式に対しても、解が $s(\geq 1)$ の Gevrey 族であることを示した。

本研究では、より一般的な非線形項を持った Schrödinger 方程式の解が Gevrey 族であることを述べる。

ここで関数空間と記号の定義をする。Sobolev 空間を

$$\mathbf{H}^{m,p} = \{\phi \in \mathbf{L}^p; \|(1 - \Delta)^{m/2} \phi\|_p < \infty, m \in \mathbb{R}^+\},$$

と定義する。簡単のために、ノルムについて $\|\cdot\|_2$ と $\|\cdot\|_{m,2}$ をそれぞれ $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_m$ と表す。 $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}$ として、 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ とする。

ここで、解析性の証明で重要な役割をはたす作用素 P を定義する。 $P = x \cdot \nabla + 2t\partial_t$ とする。この作用素 P は (NLS) に作用させると、

$$(2) \quad \mathcal{L}P^\nu u = (P + 2)^\nu \mathcal{N}(u, \nabla u, \bar{u}, \nabla \bar{u}),$$

という性質を持つ。ただし、 $\mathcal{L} = i\partial_t + \Delta$ とする。さらに、

$$(3) \quad (P + 1)^\nu \partial_k v = \partial_k P^\nu v,$$

となる。これらを利用することが、本研究のポイントの1つである。

次に、今回得られた結果を述べる。

定理 1.1 (大域存在性). 初期データ u_0 は

$$\|u_0\|_{\mathbf{Z}_{m,A}}^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{2\nu}}{(\nu-1)!^{2s}} \sum_{|a|+b \leq 2} \|\Omega^a (x \cdot \nabla)^{b+\nu} \phi\|_{(m-2|a|-2b)}^2 \leq \varepsilon^2$$

を満足し、 ε は十分小さいものとする。ただし、 $(\nu-1)!$ は $\nu \geq 2$ のときは $(\nu-1)!$, $\nu < 2$ のときは 1 とし、作用素 Ω は $\Omega = (\Omega_{j,k})_{(1 \leq k \leq N)}$, $\Omega_{j,k} = x_j \partial_k - x_k \partial_j$ とする。また、 m は $m \geq [N/2] + 6$ を満たすものとし、 a は multi-index とする。このとき、方程式 (NLS) の解 $u \in C(\mathbb{R}; \mathbf{H}^m)$ は唯一つ存在し、この解 u は、

$$(4) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{2\nu}}{(\nu-1)!^{2s}} \|P^\nu u\|_{m,0}^2 \leq C\varepsilon^2.$$

を満足する。

定理 1.2 (解析性). u は, 定理 1.1 で存在が示された (NLS) の解とする. このとき $t \neq 0$ に対して, 不等式

$$\|a(x)^{|\mu|+2\kappa_1} \partial_t^{\kappa_1} \partial^\mu u\|_{\mathbf{H}^m} \leq C_{17} |t|^{-\kappa_1} \max\{1, |t|^{-|\mu|-\kappa_1}\} A_3^{|\mu|} A_8^{|\mu|+\kappa_1} A_9^{\kappa_1} (|\mu| + \kappa_1)!^s,$$

を満たす定数 C_{17} , A_3 , A_8 , A_9 が存在する. ここで, $\kappa_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a(x) = \langle x \rangle^{-N} = 1/(1+|x|^2)^{N/2}$, $\delta > 0$ とする. また, μ は multi-index とする.

2 定理 1.1 の証明の概略

この節では, (NLS) の解の存在を考える. t は $t \in [0, \infty)$ の場合のみで考える. $t \in (-\infty, 0]$ も同様に証明できる. 定理 1.1 の証明は, 縮小写像の原理を用いる (Hayashi - Miao-Naumkin [4] を参照). そのために解のエネルギー評価が必要となる. まず, 次のような線形化方程式を考える.

$$(LE) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mathcal{N}(v, \partial_1 v, \dots, \partial_N v, \bar{v}, \partial_1 \bar{v}, \dots, \partial_N \bar{v}), & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで, $\varepsilon = \|u_0\|_{\mathbf{Z}_{m,A}}$ とする. この方程式の表す写像 $u = \Phi(v)$ が次のような閉集合からそれ自身に移すことを示す.

$$\mathbf{Y}_{m,A,\rho} = \{\phi \in C([0, \infty); \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N)); \|\phi\|_{\mathbf{Y}_{m,A}} < \rho\},$$

とする. ただし, $m \geq [N/2] + 6$, $A > 0$, $\rho = C\varepsilon$ とし,

$$\|\phi\|_{\mathbf{Y}_{m,A}}^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{2\nu}}{(\nu-1)!^{2s}} \|P^\nu \phi\|_{\mathbf{X}_m}^2,$$

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{\mathbf{X}_m}^2 &= \sup_{t \in [0, \infty)} \|\Gamma^2 \phi\|_{m-4}^2 + \sup_{t \in [0, \infty)} \|\Gamma \Theta \phi\|_{m-4}^2 \\ &\quad + \sup_{t \in [0, \infty)} \|\Theta \phi\|_{m-2}^2 + \sup_{t \in [0, \infty)} \langle t \rangle^{-1} \|Q^2 \phi\|_{m-4}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \left\| \omega_k \mathcal{S} \sqrt{|\partial_k|} \Gamma^2 \partial_j^{m-4} \phi(\tau) \right\|^2 \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^{1/2+2\sigma}}. \end{aligned}$$

とする. ここで, $\Gamma = (P, \Omega, \Delta, 1)$, $\Theta = (Q, \Omega, \Delta, 1)$, $Q = x \cdot \nabla + 2it\Delta$, $\omega_j = \varepsilon \langle x_j \rangle \langle t \rangle^{-\mu} - \mu$ とする.

いま, $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\Gamma^2 \phi\|_{m-4}^2$ の評価を考える. この際, 線形化方程式 (LE) にエネルギー法を適用するとき

$$\begin{aligned} (5) \quad & \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, \infty)} \left\| \Gamma^2 \partial_t^{m-4} \frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s} u(t) \right\|_{m-2,0}^2 \\ & \leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^\infty \left\| \Gamma^2 \partial_t^{m-4} \partial_k \frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!^s} u(t) \right\|_{m-2,0}^2 dt, \end{aligned}$$

となる．ところが， $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left\| \Gamma^2 \partial_t^{m-4} \partial_k \frac{A^\nu P^\nu}{(\nu-1)!} u(t) \right\|^2$ の評価が得られていない．(NLS) のような非線形項を持つ方程式は，エネルギー法を適用すると，いわゆる derivative-loss が起きるので，通常の意味でのエネルギー法をそのまま用いることはできない．そこで，これを克服するために Hayashi-Miao-Naumkin [4] が行ったように方程式の持つ解の平滑効果を用いる (Chihara [1] と Doi [2] も参照のこと)．

次のような線形 Schrödinger 方程式の初期値問題

$$(6) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = f, & (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

に対する解の平滑効果を考える． $f = f(t, x)$ は与えられた関数とする．ここで，証明に重要な役割を果たす作用素 $\mathcal{S}(\varphi)$ を次のように定義する．

$$(7) \quad \mathcal{S}(\varphi) = \prod_{j=1}^n \mathcal{S}_j(\varphi_j).$$

ただし， $\mathcal{H}_j$ を j 成分の Hilbert 変換とすると， $\mathcal{S}_j(\varphi_j) = \cosh(\varphi_j) + \sinh(\varphi_j)\mathcal{H}_j$ として，関数 $\varphi(t, x) = (\varphi(t, x_1), \dots, \varphi(t, x_N))$ を

$$(8) \quad \varphi_j(t, x_j) = \varepsilon^2 \langle t \rangle^{-\sigma} \int_{-\infty}^{x_j \langle t \rangle^{-\mu}} \langle y \rangle^{-2\mu} dy,$$

とする．ただし， $\mu = 1/2 + \sigma$ ， $\sigma \in (0, 1/8)$ とする．

このとき，次の2つの補題が成立する．証明は Hayashi-Miao-Naumkin [4]，Uchida [9] を参照されたい．(6) に対して，次の補題が成り立つ．

補題 2.1. 初期値問題 (6) の解 u は不等式

$$\begin{aligned} & \|u(\tau)\|^2 + \sum_{j=1}^n \int_0^\tau \|\omega_j \mathcal{S}|\partial_j|^{1/2} u(\tau)\|^2 \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^{1/2+2\sigma}} \\ & \leq \|u_0\|^2 + C \int_0^\tau |\operatorname{Im}(\mathcal{S}u, \mathcal{S}f)| d\tau + C\varepsilon^2 \int_0^\tau \|u(\tau)\|^2 \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^{1+\sigma}} \end{aligned}$$

を満たす．

次に非線形項の評価を考える．簡単のために $|\alpha| + |\beta| = 2$ のときを考える．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 2.2. 次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}
& |\operatorname{Im}(\mathcal{S}w\partial_j v, \mathcal{S}u)| \\
& \leq C\varepsilon(\langle t \rangle^{-1/4}\|u\| + \|\omega_j \mathcal{S}|\partial_j|^{1/2}u\|) \\
& \quad \times \left(\left\| \frac{w}{\omega_j^2} \right\|_{\infty} \|\omega_j \mathcal{S}|\partial_j|^{1/2}v\| + C \left(\left\| \frac{\partial_j w}{\omega_j} \right\|_{\infty} + \langle t \rangle^{-1/2} \left\| \frac{w}{\omega_j} \right\|_{\infty} \right)^{1/2-\theta} \right. \\
& \quad \times \left(\left\| \frac{\partial_j w}{\omega_j} \right\|_{\infty} + (1 + \langle t \rangle^{-1/2}) \left\| \frac{w}{\omega_j} \right\|_{\infty} \right)^{1/2+\theta} \|v\| + C\langle t \rangle^{-1/4} \left\| \frac{w}{\omega_j} \right\|_{\infty} \|v\| \Big) \\
& \quad + C(\|w_{x_j}\|_{\infty} + \langle t \rangle^{-1/2}\|w\|_{\infty})\|u\|\|v\|.
\end{aligned}$$

方程式 (LE) に上の補題を使うとき, 次のような評価を得る.

$$\begin{aligned}
(9) \quad & \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, \infty)} \left\| \Gamma^2 \partial_l^{m-4} \frac{A^{\nu} P^{\nu}}{(\nu-1)!^s} u(t) \right\|^2 \\
& + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N \int_0^{\infty} \left\| \omega_k \mathcal{S}|\partial_k|^{1/2} \Gamma^2 \partial_l^{m-4} \frac{A^{\nu} P^{\nu}}{(\nu-1)!^s} u(\tau) \right\|^2 \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^{1/2+2\sigma}} \\
& \leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, \infty)} \left\| \Gamma^2 \partial_l^{m-4} \frac{A^{\nu} P^{\nu}}{(\nu-1)!^s} u(t) \right\|^2 \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^{1+\sigma}} \\
& \quad + C\varepsilon^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^N \left\| \omega_k \mathcal{S}|\partial_k|^{1/2} \Gamma^2 \partial_l^{m-4} \frac{A^{\nu} P^{\nu}}{(\nu-1)!^s} u(\tau) \right\|^2 \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^{1/2+2\sigma}} + C\varepsilon^2
\end{aligned}$$

ここで, 十分小さな定数 ε を $1 - C\varepsilon^2 > 0$, となるようにとると,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, \infty)} \left\| \Gamma^2 \partial_l^{m-4} \frac{A^{\nu} P^{\nu}}{(\nu-1)!^s} u(t) \right\|^2 \\
& \leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, \infty)} \left\| \Gamma^2 \partial_l^{m-4} \frac{A^{\nu} P^{\nu}}{(\nu-1)!^s} u(\tau) \right\|^2.
\end{aligned}$$

を得る. よって,

$$(10) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, \infty)} \left\| \Gamma^2 \partial_l^{m-4} \frac{A^{\nu} P^{\nu}}{(\nu-1)!^s} u(t) \right\|^2 \leq C\varepsilon^2.$$

となり, 得たい評価が得られる. 他の評価も同様にして得られる. ゆえに, Φ は閉集合 $\mathbf{Y}_{m,A,\rho}$ から $\mathbf{Y}_{m,A,\rho}$ 自身に移す写像であることが示された. 同様に行うとき, 縮小写像であることも示され, (NLS) の解の存在が証明される.

3 解の解析性

この節は, 定理 1.2 の (NLS) の解の解析性の証明の概略にあてられる. 証明の方法として, Kato-Taniguchi [7], Taniguchi [8] も参照されたい. 証明は 5 段階に分けられる.

定理 1.1 の結果より、次の補題が得られる。

補題 3.1. u は、定理 1.1 で存在が示された (NLS) の解とする。このとき、 $t \neq 0$ に対して、不等式

$$(11) \quad \|a(x)^{|\mu|} \partial^\mu P^\nu u\|_m \leq C_2 \max\{1, |t|^{-|\mu|}\} A_2^{|\mu|+\nu} A_3^{|\mu|} (|\mu| + \nu)!^s,$$

を満たすような定数 C_2 , A_2 , A_3 が存在する。ただし、 $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし、 μ は multi-index とする。関数 $a(x)$ は、 $a(x) = \langle x \rangle^{-N} = (1 + |x|^2)^{-N/2}$ とする。

作用素 P の性質 (2) より、方程式から

$$t \Delta P^\nu u = -i P^{\nu+1} u + i(x \cdot \nabla) P^\nu + 2t(P+2)^\nu \mathcal{N}(u, \nabla u, \bar{u}, \nabla \bar{u})$$

を得るのでこれを用いる。このとき、右辺第二項を評価するときに $(x \cdot \nabla)$ が評価ができないので、関数 $a(x)$ の助けを借りる。さらに、例えば $|\alpha| + |\beta| = 2$ となるような非線形項を例にして考えるとき、

$$(P+2)^\nu(vw) = \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} \frac{\nu!}{\nu_1! \nu_2! \nu_3!} P^{\nu_1} v (P+1)^{\nu_2} w,$$

などと (3) を用いて非線形項を整理する。これらにより、補題 3.1 は定理 1.1 の不等式 (4) から数学的帰納法によって証明される。

補題 3.2. u は補題 3.1 を満たすとする。このとき、 $t \neq 0$ に対して、

$$(12) \quad \|a(x)^{|\mu|+2\sigma} \partial^\mu (x \cdot \nabla)^\sigma P^\nu u\|_m \leq C_{14} \max\{1, |t|^{-|\mu|-\sigma}\} A_3^{|\mu|} A_4^{|\mu|+\nu+\sigma} A_5^\sigma (|\mu| + \nu + \sigma)!^s,$$

となるような定数 C_{14} , A_3 , A_4 , A_5 が存在する。ただし、 $\nu, \sigma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし、 μ は multi-index とする。

証明は数学的帰納法による。不等式 (12) の左辺で、 $\sigma + 1$ の場合を考えると、

$$[\partial^\mu, (x \cdot \nabla)] = |\mu| \sum_{j=1}^N \partial_j \partial^\beta, \quad \text{for any multi-index } \beta \text{ with } \mu = \beta + \theta \text{ and } |\theta| = 1,$$

を用いると、補題 3.1 により、不等式の右辺のように上から評価することができ、補題 3.2 は示される。

補題 3.3. u は補題 3.2 を満たすとする. このとき, $t \neq 0$ に対して,

$$(13) \quad \|a(x)^{|\mu|+2\sigma+2\kappa}(t\partial_t)^\kappa \partial^\mu (x \cdot \nabla)^\sigma u\|_m \leq C_{15} \max\{1, |t|^{-|\mu|-\sigma-\kappa}\} \\ \times A_3^{|\mu|} A_5^\sigma A_6^{|\mu|+\sigma+\kappa} A_7^\kappa (|\mu| + \sigma + \kappa)!^s,$$

となるような定数 C_{15} , A_3 , A_5 , A_6 , A_7 が存在する. ただし, $\sigma, \kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし, μ は multi-index とする.

この補題は, 作用素 P の定義より,

$$(t\partial_t)^l = \frac{1}{2^l} \sum_{l_1+l_2=l} \frac{l}{l_1!l_2!} (x \cdot \nabla)^{l_1} P^{l_2}$$

となる. これを不等式 (13) の左辺に用いると, 補題 3.2 により不等式の右辺のように上から評価することができる. これにより, 補題 3.3 は成立する.

補題 3.4. u は補題 3.3 を満たすとする. このとき, $t \neq 0$ に対して,

$$(14) \quad \|a(x)^{|\mu|+2(\kappa_1+\kappa_2)} \partial_t^{\kappa_1} (t\partial_t)^{\kappa_2} \partial^\mu u\|_m \leq \frac{C_{16}}{|t|^{\kappa_1}} \max\{1, |t|^{-|\mu|-\kappa_1-\kappa_2}\} \\ \times A_3^{|\mu|} A_7^{\kappa_2} A_8^{|\mu|+\kappa_1+\kappa_2} A_9^{\kappa_1} (|\mu| + \kappa_1 + \kappa_2)!^s,$$

となるような定数 C_{16} , A_3 , A_7 , A_8 , A_9 が存在する. ただし, $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし, μ は multi-index とする.

$\kappa_1 = j$ のとき, (14) の不等式が成り立つと仮定する. このとき, $\kappa_1 = j+1$ のときを

$$t^{j+1} \partial_t^{j+1} (t\partial_t)^l = t^j [t, \partial_t^j] \partial_t (t\partial_t)^l + t^j \partial_t^j (t\partial_t)^{l+1} \\ = -j t^j \partial_t^j (t\partial_t)^l + t^j \partial_t^j (t\partial_t)^{l+1} \quad \text{for } j < l, j, l \in \mathbb{N},$$

を用いると, 補題 3.3 により上から評価することができる. これにより, 数学的帰納法が成立することにより, 補題 3.4 は示される.

補題 3.5. u は補題 3.4 を満たすとする. このとき, $t \neq 0$ に対して,

$$(15) \quad \|a(x)^{|\mu|+2\kappa_1} \partial_t^{\kappa_1} \partial^{|\mu|} u\|_{m,0} \leq \frac{C_{17}}{|t|^{\kappa_1}} \max\{1, |t|^{-|\mu|-\kappa_1}\} A_3^{|\mu|} A_8^{\kappa_1+|\mu|} A_9^{\kappa_1} (|\mu| + \kappa_1)!^s,$$

となるような C_{17} , A_3 , A_8 , A_9 が存在する. ただし, $\kappa_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし, μ は multi-index とする.

補題 3.4 で $\kappa_2 = 0$ とすれば成り立つ. これは, 定理 1.2 の結果である.

参考文献

- [1] H. Chihara, *Gain of analyticity for semilinear Schrödinger equations*, Proceedings of Sapporo Guest House Minisymposium on Nonlinear Wave Equations, (1999), 28–29.
- [2] S. Doi, *On the Cauchy problem for Schrödinger type equations and regularity of solutions*, J. Math. Kyoto Univ., **79** (1994), 319–328.
- [3] N. Hayashi and K. Kato, *Regularity in time of solutions to nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal., **128** (1995), 253–277.
- [4] N. Hayashi, C. Miao and P.I. Naumkin, *Global existence of small solutions to the generalized derivative nonlinear Schrödinger equation*, Asymptotic Analysis, **21** (1999), 133–147.
- [5] N. Hayashi, P.I. Naumkin and P.N. Pipolo, *Analytical smoothing effects for some derivative nonlinear Schrödinger equations*, Tsukuba J. Math., **24** (2000), 21–34.
- [6] N. Hayashi, P.I. Naumkin and H. Uchida, *Analytic smoothing effect and global existence of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system*, Adv. Differential Equations, **7** (2002), 469–492.
- [7] K. Kato and K. Taniguchi, *Gevrey regularizing effect for nonlinear Schrödinger equations*, Osaka J. Math., **33** (1996), 863–880.
- [8] K. Taniguchi, *Gevrey regularizing effect for a nonlinear Schrödinger equation in one space dimension*, J. Math. Soc. Japan, **50** (1998), 1015–1026.
- [9] H. Uchida, *Analicity of Solutions to Nonlinear Schrödinger Equations*, SUT J. Math., **37** (2001), 105–135.