

$\mathbb{CP}^2$ 上の自己双対接続のモジュライ空間の計量について。

広島大学 理学部 小林 克洋 (Katuhiko Kobayashi)

複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ には, Fubini-Study 計量が入っているとし,

E は, $\mathbb{CP}^2$ 上の $SU(2)$ ベクトル束で $C_2 = -1$ であるものとする。

$\mathcal{M}$ を E 上の自己双対接続のモジュライ空間とすると, $\mathcal{M}$ は, $(\mathbb{CP}^2 \times [0, 1]) / (\mathbb{CP}^2 \times \{0\})$ と同相であることが知られている。(古田 [F], Buchdahl [B])

$\mathcal{M}$ に 3 種類の自然な計量を入れたとき, その計量は, $\mathbb{CP}^2 \times [0, 1]$ の座標で, どのように書けているかをみて, それを用いて, 断面曲率, 体積などを, 計算してみた。

$\mathcal{M}$ に定義する 3 種類の計量のうち, II 型とよばれるものは, 広島大学の土井英雄氏, 東京大学の古田幹雄氏によって, 計算されたものである。

上のベクトル束として,

$$\begin{aligned} E &= \mathbb{CP}^2 \text{ 上の 標準的直線束 } \mathcal{O}(-1) \\ &= \left\{ \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xi \right) \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{CP}^2, \xi \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

を採用することにする。

§1. 写像 $\mathbb{CP}^2 \times (0,1) \rightarrow M - \{\text{singular point}\}$ の定義

$\mathbb{CP}^2 \times (0,1)$ に座標を入れ、上の写像を、表示する。まず、 $\mathbb{CP}^2$ に座標を、

$$\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^2, \quad \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}, \quad W_1 = X_1 + iX_2, \quad W_2 = X_3 + iX_4.$$

で入れる。このとき、Fubini-Study 計量は、

$$\begin{aligned} \tau_L = \frac{1}{(1+r^2)^2} \{ & (1+|W_2|^2) d\bar{W}_1 \otimes dW_1 - W_1 \bar{W}_2 d\bar{W}_1 \otimes dW_2 - \bar{W}_1 W_2 dW_1 \otimes d\bar{W}_2 \\ & + (1+|W_1|^2) d\bar{W}_2 \otimes dW_2 \} \end{aligned}$$

$r^2 = |W_1|^2 + |W_2|^2$ と表わされる。

$E|_{\mathbb{C}^2}$ の section u を、

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$$

で定義し、この自明化により、接続等を表示する。

E 上の自己双対接続 $\nabla_\lambda (\lambda \in [0,1])$ を、 ∇_λ の local connection form を A_λ とすると、

$$\nabla_\lambda u = u A_\lambda$$

$$A_\lambda = \frac{1}{1+r^2-\lambda^2} \operatorname{Im} \{ (\bar{W}_1 dW_1 + \bar{W}_2 dW_2 + \bar{W}_1 W_2 d\bar{W}_2 - W_1 \bar{W}_2 dW_1 + W_1 d\bar{W}_2) \}$$

となり、更に、次のことがなりたつ。

定理 (古田 [F] Buchdahl [B])

$(SU(3)/U(2)) \times (0,1)$ と $M - \{\text{singular point}\}$ は、微分同相であり、

同相写像は、

$$([g], \lambda) \longmapsto [(g^{-1})^* V_\lambda] \quad (V_\lambda \text{ is reducible})$$

で与えられる。尚 $SU(3)$ は E に自然に作用させてある。 $(g^{-1})^* V_\lambda$ としたのは、 $SU(3)$ を M に左から作用させるようにしたためである。

上の写像を、local connection form を用いて詳しくみる。

$g \in SU(3)$ の E への作用は、束のひきもととし、ファイバーの同形に分解できる。詳しくかくと、

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & (g^{-1})^* E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ([X], X\Xi) & & ([X], g^{-1}X\Xi) & & ([g^{-1}X], g^{-1}X\Xi) \end{array}$$

このとき、 $(g^{-1})^* V_\lambda$ の local connection form A' は、

$$g^{-1}u(W) = u(g^{-1}W)C$$

$$A' = C^{-1}dC + \text{Ad}(C^{-1})\{(g^{-1})^* A_\lambda\}$$

とかける。 $(g^{-1})^* A_\lambda$ は、form のひきもととしてである。

§2. 計量の定義

記号を、 $\text{ad}E = (E \text{ の同伴主束}) \times_{\text{Ad}} \mathfrak{su}(2)$, $C = \{ E \text{ の } SU(2) \text{ connections} \}$, $B = C/G$ (G はゲージ群), $\pi: C \rightarrow B$ $\Omega^p(\text{ad}E) = \Gamma(\text{ad}E \otimes \wedge^p(\mathbb{CP}^2))$ で定義する。

$\Omega^p(\text{ad}E)$ に内積を、

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{CP}^2} (-\text{Tr } u \wedge *v), \quad u, v \in \Omega^p(\text{ad } E)$$

で与えられる。これは、ゲージ不変である。

$\nabla \in \mathcal{C}$ に対し、共変微分 $d^\nabla: \Omega^p(\text{ad } E) \rightarrow \Omega^{p+1}(\text{ad } E)$, 余微分作用素 $\delta^\nabla: \Omega^p(\text{ad } E) \rightarrow \Omega^{p-1}(\text{ad } E)$ を、 ∇ の local connection form A_∇ を用いて、

$$d^\nabla s = ds + [A, s],$$

$$\delta^\nabla = - * d^\nabla *$$

で定義する。このとき、次の分解がある。以下 ∇ は既約であるとする。

$$\text{Tr } \mathcal{C} = \Omega^1(\text{ad } E) = \text{Im } d^\nabla \oplus \text{Ker } \delta^\nabla$$

さらに、 $\Omega^2(\text{ad } E)$ を L^2 ノルムで完備化して、

$$\Omega^2(\text{ad } E) = \overline{d^\nabla d^\nabla \Omega^0(\text{ad } E)} \oplus (d^\nabla d^\nabla \Omega^0(\text{ad } E))^\perp$$

$$(d^\nabla d^\nabla \Omega^0(\text{ad } E))^\perp \supset \text{Ker } \delta^\nabla \delta^\nabla.$$

上の分解は、 $\Omega^1(\text{ad } E)$ については、 $\text{Im } d^\nabla = \text{Tr}(G \cdot \nabla)$, $\text{Ker } \delta^\nabla = \text{Tr}(G \cdot \nabla)^\perp$, $\Omega^2(\text{ad } E)$ については、 $\overline{d^\nabla d^\nabla \Omega^0(\text{ad } E)}$ がゲージ orbit 成分となっている。

I 型の計量 g_E)

$\pi_*|_{\text{Ker } \delta^\nabla}: \text{Ker } \delta^\nabla \rightarrow \text{Tr } B$ は同型であるから、この同型写像により、 $\text{Ker } \delta^\nabla = \text{Tr}(G \cdot \nabla)^\perp$ の内積を、 $\text{Tr } B$ に与えられる。詳しくは

く、

$v_i \in \text{Top } B$ ($i=1,2$) に対し、 $v_i^h \in \text{Ker } \delta^p$ を、

$$\pi_* v_i^h = v_i \quad (i=1,2)$$

とと、て、I型の計量 $g(I)$ を、

$$g(I)(v_1, v_2) := \langle v_1^h, v_2^h \rangle$$

と定義する。この定義は、 $\pi(v)=[v]$ なる v のとり方によらない。

実際、 $\delta^{g^p}(g^*v) = g^*(\delta^p v)$, $g \in G$ であるから、 $v^h \in \text{Ker } \delta^p$ ならば、 $g^*v^h \in \text{Ker } \delta^{g^p}$ である。よって、 $\langle g^*v_1^h, g^*v_2^h \rangle = \langle v_1^h, v_2^h \rangle$ となる。

I-II型の計量 $g(I-II)$

記号はI型と同じであるとする。I-II型の計量 g_{I-II} は、

$$g_{I-II}(v_1, v_2) := \langle d^p v_1^h, d^p v_2^h \rangle$$

で、定義する。この定義が、 $\pi(v)=[v]$ なる v のとり方によらないのは、等式 $g^*d^p v = d^{g^p} g^*v$, $v \in G$ に注意すれば、I型と同様にわかる。

II型の計量 $g(II)$

$pr: \Omega^p(\text{ad } E) \rightarrow (d^p d^p \Omega^0)^{\perp}$ も直交射影とする。接ベクトルを、

pr により、 $(d^p d^p \Omega^0)^{\perp}$ に、制限して計るのが II型計量である。

詳しくかくと、

$v_i \in \text{Tot } B$ ($i=1,2$) に對し, $v'_i \in \text{Tot } C$, $\pi_* v'_i = v_i$ ($i=1,2$) とし,
て, II 型計量 $g_{(II)}$ を,

$$g_{(II)}(v_1, v_2) := \langle \text{pr } d^V v'_1, \text{pr } d^V v'_2 \rangle$$

と定義する。この定義は, $v'_i \in \text{Tot } C$ および, $\pi([V]) = [V]$ のとり
方によらない。まず, $\text{Tot } C \ni v'_i, u'_i$, $\pi_*(u'_i) = \pi_*(v'_i) = v_i$ とす
ると, ある $X_i \in \Omega^0(\text{ad } E)$ ($i=1,2$) があって, $u'_i = d^V X_i + v'_i$ とかけ
る。よって, $\langle \text{pr } d^V u'_1, \text{pr } d^V u'_2 \rangle = \langle \text{pr } d^V (d^V X_1 + v'_1), \text{pr } d^V (d^V X_2 + v'_2) \rangle$
 $= \langle \text{pr } d^V v'_1, \text{pr } d^V v'_2 \rangle$ が成り立つ。次に, $\text{Tot } C \ni g^* v_i$ ($i=1,2$) と
する。このとき, $\text{pr } g^* v_i = g^* \text{pr } v_i$ ($i=1,2$) がいえる。よって, v_i を

$v_i = \lim_j d^V d^V X_{ij} + \text{pr } v_i$ と分解すると, $g^* v_i = \lim_j d^{g^* V} d^{g^* V} g^* X_{ij}$
 $+ g^* \text{pr } v_i$ であるが, このとき, $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \Omega^0(\text{ad } E)$ に對し,

$$\langle g^* \text{pr } v_i, \lim_j d^{g^* V} d^{g^* V} X_j \rangle = \lim_j \langle \text{pr } v_i, d^V d^V (g^*)^* X_j \rangle = 0.$$

より, $g^* \text{pr } v_i = \text{pr } g^* v_i$ である。

以上により, $C = \{\text{reducible connections}\} / G$ に計量が, 定義さ
れる。 $M = \{\text{singular point}\}$ には, $C = \{\text{reducible connections}\} / G$ の部分多
様体の計量が入る。

一般に, $\text{Tot } C \ni v' \rightarrow v \in \text{Tot } B$ のときに,

$$v^h = (v' \text{ の Her } d^V \text{ 成分})$$

と, とれることに, 注意しておく。

§3. 計算

微分同相写像 $\mathbb{CP}^2 \times (0,1) \rightarrow \mathcal{M} - \{\text{singular point}\}$ によって、 $\mathbb{CP}^2 \times (0,1)$ 上に、ひきもどされた、 $\mathcal{M}$ の計量 $g(I)$, $g(I-II)$, $g(II)$ をやはり、 $g(I)$, $g(I-II)$, $g(II)$ とかくことにする。

$u, v \in \Omega^p(\text{ad } E)$ に対し、

$$\int_{\mathbb{CP}^2} g^* u \wedge g^* v = \int_{\mathbb{CP}^2} g^* (u \wedge v) = \int_{\mathbb{CP}^2} u \wedge v \quad (g \in SU(3))$$

がなりたつから、 $g(A)$ ($A=I, I-II, II$) は、 $SU(3)$ 不変である。このことから、

$$g(A) = \varphi_A(\lambda) (d\lambda)^2 + \psi_A(\lambda) h$$

($A=I, I-II, II$, $\lambda \in (0,1)$, h は $\mathbb{CP}^2$ の Fubini-Study 計量)

とかけることがわかる。実際、 $\mathbb{CP}^2$ 上の $SU(3)$ 不変な計量は Fubini-Study 計量の定数倍だから、 $g(A)$ を $\mathbb{CP}^2 \times \{\lambda\}$ に、制限したところでは、 $g(A)|_{\mathbb{CP}^2 \times \{\lambda\}} = \psi(\lambda) h$ とかける。よって、

$$g(A) = \varphi_A(\lambda) (d\lambda)^2 + \psi_A(\lambda) h + \sum_{i=1}^4 C_i d\lambda \otimes dx_i$$

とかけるが、ここで特に、

$$h = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \in SU(3)$$

と置いて、 $h^* g_A = g_A$ を計算すれば、 $C_i = 0$ ($i=1 \sim 4$) がある。

計算は、まず、概略をのべて、詳しい計算は、あとで、まとめかくことにする。

i) I 型の計算.

$V \in T_{\mathbb{P}^1} \mathbb{C}$ に対し, $\pi_* V \in T_{\mathbb{C}} B$ を, やはり V とかくことにする.

$$\varphi_{\mathbb{I}}(\lambda) = g_{\mathbb{I}}(\partial_\lambda, \partial_\lambda) = g_{\mathbb{I}}(\partial_\lambda V_\lambda, \partial_\lambda V_\lambda)$$

$$\partial_\lambda V_\lambda = 2\lambda S^{-2} \operatorname{Im} \beta + (2\lambda^2 S^{-2} + S^{-1}) J r \quad \text{on } \mathbb{C}^2$$

$S = 1+r^2-\lambda^2$, $\beta = \bar{w}_1 dW_1 + \bar{w}_2 dW_2$, $r = -w_2 dW_1 + w_1 dW_2$ であるが,

ここで, 直接計算により, $\delta^{V_\lambda}(\partial_\lambda V_\lambda) = 0$ が, 得られ, よって

$$(\partial_\lambda V_\lambda)^h = \partial_\lambda V_\lambda$$

がわかる。よって,

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{I}}(\partial_\lambda V_\lambda, \partial_\lambda V_\lambda) &= -\int_{\mathbb{CP}^2} \operatorname{tr}(\partial_\lambda V_\lambda \wedge * \partial_\lambda V_\lambda) \\ &= \frac{8\pi^2(-(\log z)z^2 - 3(\log z)z - 3z^2 + 2z + 1)}{z(z-1)^3}. \end{aligned}$$

$z = 1-\lambda^2$, となる。

次に $\varphi_{\mathbb{I}}(\lambda)$ を求める。

$$g_t^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & \\ \sin t & \cos t & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in SU(3).$$

とおく。

$$v := \frac{d}{dt} g_t^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_0 = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tan t \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in T_0 \mathbb{C}^2$$

$$h(v, v) = 1.$$

より,

$$\varphi_{\mathbb{I}}(\lambda) = g_{\mathbb{I}}(v, v) = g_{\mathbb{I}}(V, V), \quad V = \partial_t (g_t^{-1})^* V_\lambda \Big|_0.$$

$(g_t^{-1})^* V_\lambda$ は §1 で示した, local connection form の表示を用

いると、

$$\begin{cases} (g_t^{-1})^* \nabla_\lambda u = u A^t \\ A^t = C^{-1} dC + A dC^{-1} \{g_t^{-1} A_\lambda\}. \end{cases}$$

$C = b/|b|$, $b = \cos t - w_1 \sin t$ とかける。

$$g_t^{-1} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^t \\ w_2^t \end{bmatrix} \text{ とおく。}$$

$$\partial_t w_1^t|_0 = 1 + w_1^2, \quad \partial_t w_2^t|_0 = w_1 w_2, \quad \partial_t d w_1^t|_0 = 2 w_1 d w_1$$

$$\partial_t d w_2^t|_0 = w_1 d w_2 + w_2 d w_1$$

となることに注意して、 V を計算すると、

$$V = \partial_t A^t|_0 = -2\lambda^2 S^{-2} \chi_1 \operatorname{Im}(\beta + j\lambda r) + \lambda S^{-1} \operatorname{Im}\{\lambda d w_1 + j d w_2\}.$$

とかける。このとき、次のことがなりたつ。(計算1), (計算2))

補題.

$$X = (S(\lambda^2 - 3))^{-1} \operatorname{Im}\{\lambda^2(\lambda^2 + 1) w_1 + 2j\lambda^3 w_2\} \text{ とすると,}$$

$$\delta^\vee d^\vee X = \delta^\vee V \text{ がなりたつ。}$$

上の補題により、 $V^h = V - d^\vee X$ であるから、(計算3)により、

$$\begin{aligned} g_I(V, V) &= - \int_{\mathbb{CP}^2} \operatorname{Tr} V_\wedge^h * V^h \\ &= \frac{4\pi^2(-6(\log z)z^2 + z^3 + 6z^2 - 9z + 2)}{(z^3 - 3z + 2)}, \quad z = 1 - \lambda^2 \end{aligned}$$

が得られる。

ii) II型の計量.

φ_{II} を求める.

$$d^V(\partial_\lambda A_\lambda) = d(\partial_\lambda A_\lambda) + A \wedge \partial_\lambda A_\lambda + \partial_\lambda A_\lambda \wedge A = \partial_\lambda F$$

であるから,

$$\varphi_{II}(\lambda) = g_{II}(\partial_\lambda, \partial_\lambda) = \langle \text{pr} d^V(\partial_\lambda A_\lambda), \text{pr} d^V(\partial_\lambda A_\lambda) \rangle = \langle \text{pr}(\partial_\lambda F), \text{pr}(\partial_\lambda F) \rangle$$

となる。ここで、 $F, \partial_\lambda F$ は $\mathbb{C}^2$ の表示を用いて,

$$F = (1 - \lambda^2) S^{-2} \{ f + 2j\lambda dW_1 dW_2 \}.$$

$$f = (1 + |W_2|^2) d\bar{W}_1 \wedge dW_1 + (1 + |W_1|^2) d\bar{W}_2 \wedge dW_2 - \bar{W}_1 W_2 d\bar{W}_2 \wedge dW_1 - W_1 \bar{W}_2 d\bar{W}_1 \wedge dW_2$$

$$\partial_\lambda F = 2\lambda(1 - \lambda^2 - r^2) S^{-3} f + 2\{4\lambda^2(1 - \lambda^2) + (1 - 3\lambda^2)S\} S^{-3} j dW_1 \wedge dW_2$$

とかけている。このとき、 $[f, j dW_1 \wedge dW_2] = 0$ より,

$$\delta^V \delta^V \partial_\lambda F = * d^V d^V * \partial_\lambda F = * d^V d^V \partial_\lambda F = * [F, \partial_\lambda F] = 0.$$

であるから、 $\text{pr}(\partial_\lambda F) = \partial_\lambda F$ である。よって,

$$\begin{aligned} \varphi_{II}(\lambda) &= \langle \text{pr}(\partial_\lambda F), \text{pr}(\partial_\lambda F) \rangle = - \int_{\mathbb{C}P^2} \text{tr}(\partial_\lambda F \wedge * \partial_\lambda F) \\ &= 16\pi^2 (z^2 - 2z + 6) / (15z^2) \end{aligned}$$

$z = 1 - \lambda^2$ が得られる。

次に、 $\varphi_{II}(\lambda)$ を求める。 $V = \partial_\lambda (g_t^{-1})^* V_2|_0$, $XF = \partial_t (g_t^{-1})^* F|_0$ とあくと,

$$\varphi_{II}(\lambda) = \langle \text{pr}(d^B V), \text{pr}(d^B V) \rangle = \langle \text{pr}(XF), \text{pr}(XF) \rangle$$

となる。ここで、 $(g_t^{-1})^* F$ の表示式を F' とかくと,

$$F' = A d c^{-1} F t, \quad c = b/|b|, \quad b = \omega s t - w_1 \sin t$$

F_t は F の g_t^1 によるひきもどし, とかける。このとき,

$$\begin{aligned}\partial_t F|_0 &= \partial_t c^1|_0 F + F dc^1|_0 + \partial_t F_t|_0 \\ &= \partial_t F_t|_0 - [F, \text{Im} W_1]\end{aligned}$$

$$\partial_t F_t|_0 = (1-\lambda^2) \alpha + (1-\lambda^2) k (-6 S^{-2} \lambda X_2 dW_1 \wedge dW_2)$$

$$\alpha = -4f S^{-3} X_1 \lambda^2 - 2j \lambda S^{-3} X_1 (S + 4\lambda^2) dW_1 \wedge dW_2$$

$$\delta^p \delta^q \alpha = * d^p d^q * \alpha = * d^p d^q \alpha = * [F, \alpha] = 0$$

$$[F, \alpha] = -4k(1-\lambda^2) S^{-2} \lambda dW_1 \wedge dW_2$$

より,

$$p^* \chi F = (1-\lambda^2) \alpha$$

となることかわかる。よって

$$\begin{aligned}\varphi_{II}(\lambda) &= - \int_{\mathbb{CP}^2} p^* (\chi F \wedge * p^* \chi F) \\ &= 8(3z^2 + 4z - 12)(z-1) \pi^2 / (15z)\end{aligned}$$

が得られる。

iii) I-II 型

まず, φ_{I-II} より求める。

$$\begin{aligned}\varphi_{I-II}(\lambda) &= g_{(I-II)}(\partial_\lambda, \partial_\lambda) = g_{(I-II)}(\partial_\lambda \bar{V}_\lambda, \partial_\lambda \bar{V}_\lambda) \\ &= \langle d^p \partial_\lambda \bar{V}_\lambda, d^p \partial_\lambda \bar{V}_\lambda \rangle = \langle \partial_\lambda F, \partial_\lambda F \rangle = \varphi_{II}(\lambda)\end{aligned}$$

次に φ_{I-II} を求める。 V, v, V^h は, I型と同じであるとする。

$$\varphi_{I-II}(\lambda) = g_{(I-II)}(v, v) = g_{(I-II)}(V, V) = \langle d^{\bar{V}_\lambda} V^h, d^{\bar{V}_\lambda} V^h \rangle$$

$$= \frac{24}{5} \pi^2 \frac{(-z^5 + 2z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 8z + 8)}{z(z+2)^2}$$

を得る。

ここで、計算を I 型について、少し詳しくみてみることにする。まず、次の公式をあげておく。

$$dW_1 \wedge *d\bar{W}_1 = 2(1+|W_1|^2) Q^{-2} d_{1234}.$$

$$dW_1 \wedge *d\bar{W}_2 = 2W_1 \bar{W}_2 Q^{-2} d_{1234}.$$

$$dW_2 \wedge *d\bar{W}_1 = 2W_2 \bar{W}_1 Q^{-2} d_{1234}$$

$$dW_2 \wedge *d\bar{W}_2 = 2(1+|W_2|^2) Q^{-2} d_{1234}, \quad d * dW_i = 0, \quad dW_i \wedge *dW_j = 0$$

$$d_{1234} := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4, \quad Q = 1+r^2.$$

$$(\text{計算 1}) \quad d^p * V = 4\lambda^2 S^{-2} Q^{-2} (\text{Im } W_1 + j\lambda W_2) d_{1234}.$$

証明

$$\alpha_1 = S^{-2}(W_1 + \bar{W}_1)(\beta - \bar{\beta}), \quad \alpha_2 = S^{-1}(dW_1 - d\bar{W}_1)$$

$$\alpha_3 = S^{-2}(W_1 + \bar{W}_1)r, \quad \alpha_4 = S^{-1}dW_2$$

とおく。

$$V = \frac{-\lambda^2}{2} \alpha_1 + \frac{\lambda^2}{2} \alpha_2 + j \{ -\lambda^3 \alpha_3 + \lambda \alpha_4 \}.$$

$$\begin{cases} d * \alpha_1 = -4 S^{-2} \lambda^2 i Q^{-1} d_{1234}, & d * \alpha_2 = -4 d^{-2} \lambda^2 Q^{-1} d_{1234} i \\ d * \alpha_3 = -2 W_2 S^{-2} Q^{-2} d_{1234}, & d * \alpha_4 = -2 S^{-2} W_2 Q^{-1} d_{1234}. \end{cases}$$

$$B = (\beta + j)r \quad \text{とおく。}$$

$$[A, *V] = \frac{1}{S} [B, *V]$$

$$\begin{cases} [B, * \beta] = [B, * j r] = 0 \\ [B, * d w_1] = 2 j w_2 \lambda Q^{-2} d_{1234} \\ [B, * j d w_2] = (4 \lambda \operatorname{Im} w_1 Q^{-2} + 2 j w_2 Q^{-1}) d_{1234}. \end{cases}$$

以上により,

$$d^p * V = 4 \lambda^2 S^{-2} Q^{-2} (\operatorname{Im} w_1 + j \lambda w_2) d_{1234}$$

を得る。

$$(\text{計算 2}) \quad d^p * d^p \chi = d^p * V$$

証明

$$\beta_1 = \frac{1}{S} \operatorname{Im} w_1, \quad \beta_2 = j \frac{w_2}{S} \quad \text{と} \quad \text{お} \quad \text{く}.$$

$$\begin{cases} d * d \beta_1 = 2 \{ 4 S^{-3} r^2 Q^{-1} - 2 S^{-2} (1+Q) Q^{-2} - 2 S^{-2} Q^{-1} \} \operatorname{Im} w_1 d_{1234} \\ [A, * d \beta_1] = 2 S^{-2} Q^{-2} (j \lambda w_2) d_{1234} \\ d * [A, \beta_1] = 2 S^{-2} Q^{-2} (\lambda j w_2) d_{1234} \\ [A, * [A, \beta_1]] = -8 \lambda^2 S^{-3} Q^{-2} r^2 \operatorname{Im} w_1 d_{1234}. \end{cases}$$

より,

$$d^p * d^p \beta_1 = -12 S^{-2} Q^{-2} \operatorname{Im} w_1 d_{1234} + S^{-2} Q^{-2} (4 \lambda j w_2) d_{1234}$$

$$\begin{cases} d * d \beta_2 = 2 \{ Q^{-1} S^{-2} j w_2 + \lambda S^{-2} Q^{-2} (w_1 - \bar{w}_1) \} d_{1234} \\ [A, * d \beta_2] = \{ 4 S^{-3} r^2 Q^{-1} - 2 (1+Q) Q^{-2} S^{-2} - 2 S^{-2} Q^{-1} \} j w_2 d_{1234} \\ d * [A, \beta_2] = \{ S^{-2} Q^{-1} j w_2 + \lambda S^{-2} Q^{-2} (w_1 - \bar{w}_1) \} d_{1234} \\ [A, * [A, \beta_2]] = -4 \{ \lambda^2 r^2 Q^{-2} + r^2 Q^{-1} \} S^{-3} j w_2 d_{1234} \end{cases}$$

より,

$$d^p * d^p \beta_2 = \{-8S^{-2}Q^{-2}\}W_2 + 8\lambda S^{-2}Q^{-2} \operatorname{Im} W_1\} d_{1234}$$

以上により,

$$d^p * d^p \chi = 4\lambda^2 S^{-2}Q^{-2}(\operatorname{Im} W_1 + j\lambda W_2) d_{1234} = d^p * V$$

となる。

$$(\text{計算 3}) \quad \langle V^h, V^h \rangle = \frac{4(-6(\log z)z^2 + z^3 + 6z^2 - 9z + 2)\pi^2}{(z^3 - 3z + 2)}$$

証明.

$$A(\alpha, \beta) := \int_{\mathbb{C}^2} r^2 S^{-\alpha} Q^{-\beta} d_{1234}, \quad B(\alpha, \beta) := \int_{\mathbb{C}^2} S^{-\alpha} Q^{-\beta} d_{1234}$$

とおく。次の公式がなりたつ。

$$A(\alpha, \beta) = \pi^2 \lambda^{(2-2(\alpha+\beta))} \int_{1-\lambda^2}^1 y^{-\alpha} (1-y)^{\alpha+\beta-4} (y-(1-\lambda^2))^2 dy$$

$$B(\alpha, \beta) = \pi^2 \lambda^{(2-2(\alpha+\beta))} \int_{1-\lambda^2}^1 y^{-\alpha} (1-y)^{\alpha+\beta-3} (y-1+\lambda^2) dy.$$

$$\langle V^h, V^h \rangle = \langle V - d^p \chi, V - d^p \chi \rangle = \langle V, V \rangle - \int r \chi \wedge d^p * V$$

であるから、 $\langle V, V \rangle$ から求める。

$$V = \frac{\lambda^2}{S^2} \operatorname{Im} \xi + j \frac{\lambda}{S^2} \eta, \quad \xi = S dW_1 - 2X_1 \beta, \quad \eta = -2X_1 \lambda^2 \gamma + dW_2 S$$

とおく。

$$\begin{cases} -\operatorname{tr} V_{e1} * V_2 = -2 \operatorname{Re} V_{21} * V_2 = \frac{\lambda^4}{S^4} \operatorname{Re} \xi_1 * \bar{\xi} + \frac{2\lambda^2}{S^4} \operatorname{Re} \eta_1 * \bar{\eta} \\ \xi_1 * \bar{\xi} = 2(S^2(1+|W_1|^2) + 4X_1^2 Q(Q^2-1)) Q^{-2} d_{1234}. \\ \eta_1 * \bar{\eta} = 2(4X_1^2 \lambda^2 (\lambda^2-1) Q + S^2(1+|W_2|^2)) Q^{-2} d_{1234} \end{cases}$$

がなりたつ。そこで、 $\int \frac{X_i^2}{S^\alpha Q^\beta} d_{1234} = \frac{1}{4} \int \frac{r^2}{S^\alpha Q^\beta} d_{1234}$ ($i=1,2,4$) に

注意すると、

$$\int_{\mathbb{CP}^2} \operatorname{Re} \frac{\xi \wedge \bar{\xi}}{S^4} = 2(B(2,2) + \frac{1}{2}A(2,2) + (\lambda^2 - 1)A(4,1))$$

$$\int_{\mathbb{CP}^2} \operatorname{Re} \frac{\eta \wedge \bar{\eta}}{S^4} = 2\lambda^2(\lambda^2 - 1)A(4,1) + 2B(2,2) + A(2,2)$$

次に、 $\int_{\mathbb{CP}^2} \operatorname{tr} X \wedge d^*V$ を求める。(計算1), (計算2) より、

$$\operatorname{tr} X \wedge d^*V = \frac{-8}{\lambda^2 - 3} S^{-3} Q^{-2} [\lambda^4(\lambda^2 + 1)X_2^2 + 2\lambda^6|W_2|^2] d\zeta_3 d\zeta_4$$

であるから、

$$\int_{\mathbb{CP}^2} \operatorname{tr} X \wedge d^*V = -\frac{10\lambda^6 + 2\lambda^4}{\lambda^2 - 3} A(3,2)$$

となる。以上をまとめて、

$$\langle V^h, V^h \rangle = \frac{4(-6(\log z)z^2 + z^3 + 6z^2 - 9z + 2)\pi^2}{(z^3 - 3z + 2)}$$

$z = 1 - \lambda^2$ となる。

§ 曲率

$\mathbb{CP}^2 \times (0,1)$ に座標 $X_0 = z, X_1, \dots, X_4$ を入れると、

$$g_A = \tilde{\varphi}_A(X_0) (dX_0)^2 + \tilde{\psi}_A(X_0) h.$$

$A = \text{I}, \text{I-II}, \text{II}$ とかける。ここで用いた: $\tilde{\varphi}_A, \tilde{\psi}_A$ は、変数を λ から X_0 に変えているので、先に書いた φ_A, ψ_A とは、 $\tilde{\varphi}_A(X_0) = \varphi(\lambda)$

$/4(1-X_0)$, $\tilde{\psi}_A(X_0) = \psi_A(\lambda)$ という関係にある。具体的にかくと、

$\tilde{\varphi}_A(X_0) = \varphi_A(\lambda)$ という関係にある。具体的にかくと、

$$g(\text{I}) = \tilde{\varphi}_{\text{I}}(X_0) dX_0^2 + \tilde{\psi}_{\text{I}}(X_0) h.$$

$$\tilde{\varphi}_{\text{I}}(X_0) = 2((X_0 + 3)(\log X_0)X_0 - 3X_0^2 + 2X_0 + 1)\pi^2 / ((X_0 - 1)^4 X_0)$$

$$\tilde{\psi}_{\text{I}}(X_0) = (-4(6(\log X_0)X_0^2 - X_0^3 - 6X_0^2 + 9X_0 - 2)\pi^2) / ((X_0 + 2)(X_0 - 1)^2)$$

$$g(\text{I-II}) = \tilde{\varphi}_{\text{I-II}}(X_0) dX_0^2 + \tilde{\psi}_{\text{I-II}}(X_0) h$$

$$\tilde{\varphi}_{\text{I-II}}(X_0) = (-4(X_0^2 - 2X_0 + 6)\pi^2) / (15(X_0 - 1)X_0^2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\varphi}_{I-II}(X_0) &= -24(X_0^4 - X_0^3 + 2X_0^2 + 8)(X_0 - 1)\pi^2 / (5(X_0 + 2)^2 X_0) \\ \tilde{g}(u) &= \tilde{\varphi}_{II}(X_0) dX_0^2 + \tilde{\varphi}_{II}(X_0) h \\ \tilde{\varphi}_{II}(X_0) &= -4(X_0^2 - 2X_0 + 6)\pi^2 / (15(X_0 - 1)X_0^2) \\ \hat{\varphi}_{II}(X_0) &= f(3X_0^2 + 4X_0 - 12)(X_0 - 1)\pi^2 / (15X_0) \end{aligned} \right.$$

である。

$SU(3)$ が、 $\mathbb{CP}^2 \times \{X_0\} \hookrightarrow \mathcal{M}$ に、推移的かつ、等長的に作用しているから、 $\mathcal{M}$ の断面曲率 K_A は、 $(0, X_0) \in \mathbb{C}^2 \times (0, 1) \hookrightarrow \mathbb{CP}^2 \times (0, 1)$ において、 $v_1, v_2 \in T_{(0, X_0)}(\mathbb{CP}^2 \times (0, 1))$ を、 $v_1 = a_0 e_0 + a_1 e_1$, $v_2 = \sum_{i=0}^3 b_i e_i$ $a_0^2 + a_1^2 = 1$, $\sum_{i=0}^3 b_i^2 = 1$, $a_0 b_0 + a_1 b_1 = 0$, $e_0 = \varphi_A^{-1/2} \partial_0$, $e_i = \varphi_A^{-1/2} \partial_i$ で定義するとき、 v_1, v_2 方向についてみれば十分である。このとき次のことがなりたつ。

$$\left\{ \begin{aligned} K_A(v_1, v_2) &= K_{A0101}(a_0^2 + b_0^2) + K_{A212} a_1^2 b_2^2 + K_{A1313} a_1^2 b_3^2 \\ K_{A0101} &= K_{A0101} = \tilde{\varphi}_A^{-1} \tilde{\varphi}_A^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} \tilde{\varphi}_A'' + \frac{1}{4\tilde{\varphi}_A} (\tilde{\varphi}_A')^2 + \frac{1}{4\tilde{\varphi}_A} \tilde{\varphi}_A' \tilde{\varphi}_A' \right\} \\ K_{A1\bar{1}i\bar{i}} &= \tilde{\varphi}_A^{-1} \left\{ H_{1\bar{1}i\bar{i}} - \frac{1}{4\tilde{\varphi}_A \tilde{\varphi}_A} (\tilde{\varphi}_A')^2 \right\}, (i=2, 3) \quad H_{1212} = 4, H_{1313} = 1 \end{aligned} \right.$$

特に、次の不等式がなりたつ。

$$\min \{ K_{A1\bar{1}i\bar{i}} \mid i=0, 2, 3 \} \leq K_A \leq \max \{ K_{A1\bar{1}i\bar{i}} \mid i=0, 2, 3 \}$$

ここで、 $K_{A1\bar{1}i\bar{i}}$ のグラフをあげておく。

K_{A1212} ($A=I, I-II, II$) および K_{II1313} は、singular point に向かうにつれ、 $+\infty$ に発散している。 $K_{I-II1010}$, $K_{I-II1313}$, K_{II1010} は全て、

$X_0=1$ で定義されているが、 K_{I1010}, K_{I1313} は $X_0=1$ では、定義されておらず、ロベタルの定理を用いて、分母、分子をそれぞれ、12回と9回微分することにより、

$$\lim_{X_0 \rightarrow 1} K_{I1010} = \lim_{X_0 \rightarrow 1} K_{I1313} = -3/8 \pi^2$$

を得る。

最後に、双曲空間との比較について、みる。双曲空間として、 $(\text{Int } D^6 = \{x \in \mathbb{R}^6 \mid |x| < 2\}, \frac{dx_1^2 + \dots + dx_6^2}{(1 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^6 x_i^2)})$ を採用する。

この計量を、微分同相写像

$$S^5 \times (0, 2) \rightarrow \text{Int } D^6 - \{\text{中心}\} ((x, \lambda) \mapsto x\lambda)$$

でひきもとすと、 $S^5 \times (0, 2)$ の計量は、

$$16\lambda^2/(\lambda^2-4)^2 (S^5 \text{ の標準的計量}) + 16/(\lambda^2-4)^2 d\lambda^2$$

となる。 $S^5 \times (0, 2)$ に、 S^1 を S^5 の部分のみに作用させるで、 $\mathbb{CP}^2 \times (0, 2)$ が、得られるが、このとき、 $\mathbb{CP}^2 \times (0, 2)$ には、

$$16\lambda^2/(\lambda^2-4)^2 \, h + 16/(\lambda^2-4)^2 d\lambda^2$$

なる計量が入る。このとき、

$$\begin{cases} K_{1010} = K_{1313} = -1 \\ K_{1212} = (8X-4)(X-12)/16X. \end{cases}$$

$X=\lambda^2$ となっている。 K_{1212} のグラフも、参考までに、あけておく。ここでは、グラフの右側に、singular point にあたる部分がくるように、左側が $X=2$ 、右側が $X=0$ と、しておいた。

§ 体積など、

V_A を (M, g_A) ($A=I, I-II, II$) の体積とすると、

$$\begin{aligned} V_A &= \int_{\mathbb{CP}^2 \times (0,1)} (g_A \text{ の volume form}) \\ &= \int_0^1 \sqrt{\tilde{\varphi}_A(x_0)} \tilde{\varphi}_A(x_0)^2 dx_0 \times (\mathbb{CP}^2 \text{ の体積}) \end{aligned}$$

がなりたつ。また、 L_A を (M, g_A) の $\bar{I}$ 端から、singular point までの長さとする、

$$L_A = \int_0^1 \sqrt{\tilde{\varphi}_A(x_0)} dx_0$$

がなりたつ。

i) V_I, L_I について、

L_I の有限性は、 $\tilde{\varphi}_I(x_0) = 2 \left(\frac{3(x_0+1)}{(x_0-1)^3 x_0} - \frac{(x_0+3) \log x_0}{(x_0-1)^4} \right) \pi^2$ が、 $x_0 = 0, 1$ のときに $+\infty$ に発散しているため、 $x_0 = 0, 1$ の近くで、問題になる。ところで、 $x_0 = 0$ の付近では、

$$\tilde{\varphi}_I(x_0) = 2 \frac{1}{x_0} \pi^2$$

としてよいから、

$$\int_0^\varepsilon \sqrt{\tilde{\varphi}_I(x_0)} dx_0 = \sqrt{2} \pi \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{x_0}} dx_0 < \infty$$

となる。また、 $\lim_{x_0 \rightarrow 1} \tilde{\varphi}_I(x_0) \times 4(1-x_0) = 4\pi^2/3$ であるから、 $x_0 = 1$ の付近では、

$$\tilde{\varphi}_I(x_0) = (\pi^2/3) \left(\frac{1}{1-x_0} \right)$$

としてよい。よって、 $x_0 = 0$ のときと同様に、 $\int_\varepsilon^1 \sqrt{\tilde{\varphi}_I(x_0)} < \infty$ がわかる。 V_I については、 $\tilde{\varphi}_I(x_0)$ が、 $0 \leq \tilde{\varphi}_I \leq 4\pi^2$ をみたして

るから、明らかに、有限となる。

ii) V_A, L_A ($A = \text{II}, \text{I-II}$) について、

$$\tilde{\varphi}_{\text{II}}(x_0) = 4((x_0^2 - 2x_0 + 6)/15x_0^2(1-x_0))\pi^2 \geq 4\pi^2(x_0-1)^2/15x_0^2$$

であるから、

$$L_{\text{II}} = \int_0^1 \sqrt{\tilde{\varphi}_{\text{II}}} dx_0 > \int_0^1 \sqrt{2(x_0-1)^2/15x_0^2} \pi dx_0 = \sqrt{2/15} \pi \int_0^1 \frac{1-x_0}{x_0} dx_0 = +\infty$$

となり、 L_{II} は $+\infty$ 。また、 $\tilde{\varphi}_{\text{II}}$ は単調減少関数だから、

$$\begin{aligned} V_{\text{II}} &= \int_0^1 \sqrt{\tilde{\varphi}_{\text{II}}} \tilde{\varphi}_{\text{II}}^2 dx_0 = \int_0^{1/2} \sqrt{\tilde{\varphi}_{\text{II}}} \tilde{\varphi}_{\text{II}}^2 dx_0 + \int_{1/2}^1 \sqrt{\tilde{\varphi}_{\text{II}}} \tilde{\varphi}_{\text{II}}^2 dx_0 \\ &> \int_0^{1/2} \sqrt{\tilde{\varphi}_{\text{II}}} \tilde{\varphi}_{\text{II}}^2(1/2) dx_0 > \tilde{\varphi}_{\text{II}}^2(1/2) \pi \sqrt{\frac{2}{15}} \int_0^{1/2} \frac{1-x_0}{x_0} dx_0 = +\infty \end{aligned}$$

より V_{II} は $+\infty$ である。 $L_{\text{I-II}}, V_{\text{I-II}}$ も同様にして $+\infty$ であることがわかる。

そこで、

$$L_A(x_0) = \{ (0,1) \text{ から } (0,x_0) \text{ までの長さ} \}$$

$$V_A(x_0) = \{ \mathbb{CP}^2 \times (1, x_0) \text{ の体積} \}$$

として、計算した結果をグラフで表しておく。

§ まとめ、

i) $d\lambda^2$, $\tilde{h}$ の係数 (すなわち φ_A, ψ_A について)。

singular point 側 すなわち、 $\lambda=0$ の φ_A, ψ_A を Taylor 展開

すると、

$$\varphi_{\text{II}}(\lambda) = 2\pi^2(27\lambda^4 + 20\lambda^2 + 10)/15$$

$$\psi_I(\lambda) = 2\pi^2(5\lambda^4 + 6\lambda^2) / 9$$

$$\varphi_{I-II}(\lambda) = 16\pi^2(16\lambda^4 + 10\lambda^2 + 5) / 15$$

$$\psi_{I-II}(\lambda) = \pi^2(48\lambda^4 + 56\lambda^2) / 9$$

$$\varphi_{II}(\lambda) = \varphi_{I-II}(\lambda).$$

$$\psi_{II}(\lambda) = \pi^2(24\lambda^4 + 8\lambda^2) / 3.$$

また、 H^6/S^1 の計量を、 $\varphi(\lambda)d\lambda^2 + \psi(\lambda)d\lambda$ と書いて、 $\lambda = 0$ の近くで、Taylor展開すると、

$$\varphi(\lambda) = (3\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) / 16$$

$$\psi(\lambda) = (\lambda^4 + 2\lambda^2) / 2$$

となる。境界の附近、すなわち、 $\lambda=1$ (φ, ψ においては $\lambda=2$) の近くでは、

$$\psi_I(\lambda) \rightarrow 4\pi^2, \text{ それ以外は } +\infty$$

となっている。また、 φ_A, φ_A はみな単調減少関数である。

ii) 曲率など。

曲率は、 $SU(3)$ が $(\mathbb{CP}^2 \times \{x_0\})$ に推移的かつ等長的に作用している。本文で用いた座標に関し、 $T_{(0,x_0)}(\mathbb{CP}^2 \times (0,1))$ でみれば、十分であるが、このとき、singular point の近くでは、

$$\begin{cases} K_I(\partial_0, v) \rightarrow -3/8\pi^2 & , v \in T_{(0,x_0)}(\mathbb{CP}^2 \times \{x_0\}) \\ K_I(\partial_1, \partial_3) \rightarrow -3/8\pi^2 \\ K_I(\partial_1, \cos\theta\partial_2 + \sin\theta\partial_3) \rightarrow +\infty \quad (\theta \neq 90^\circ) \end{cases}$$

$$K_{II}(\partial_1, \cos\theta\partial_2 + \sin\theta\partial_3) \rightarrow +\infty$$

$$|K_{\text{II}}(\partial_0, v) \rightarrow -21/16\pi^2$$

$$\begin{cases} K_{\text{I-II}}(\partial_0, v) \rightarrow -9/32\pi^2 \\ K_{\text{I-II}}(\partial_1, \partial_3) \rightarrow -9/32\pi^2 \\ K_{\text{I-II}}(\partial_1, \cos\theta\partial_2 + \sin\theta\partial_3) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

とな, ている。また, 境界の付近では,

$$\begin{cases} K_{\text{I}}(\partial_1, \cos\theta\partial_1 + \sin\theta\partial_2) \rightarrow \cos^2\theta/\pi^2 + \sin^2\theta/4\pi^2 \\ K_{\text{I}}(\partial_0, v) \rightarrow 3/8\pi^2 \end{cases}$$

$$K_{\text{I-II}}(\partial_1, X) \rightarrow -5/32\pi^2$$

$$K_{\text{II}}(\partial_1, X) \rightarrow -5/32\pi^2$$

$X \in T_{(0, x_0)}\mathbb{CP}^2 \times (0, 1)$, とな, ている。他の場合については, P/6
の公式と, グラフを参照されたい。

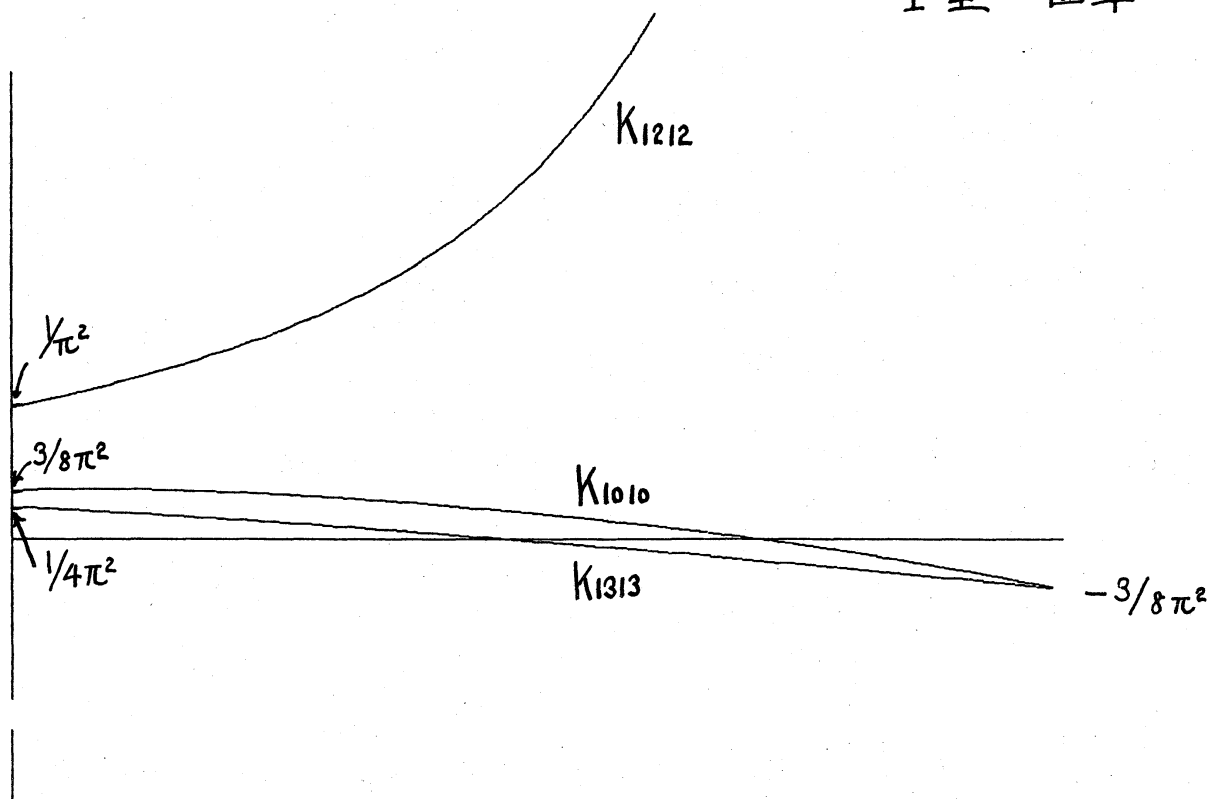
また, 体積と, $\mathcal{M}$ の端から singular point までの長さは,

I 型に関しては両方とも有限

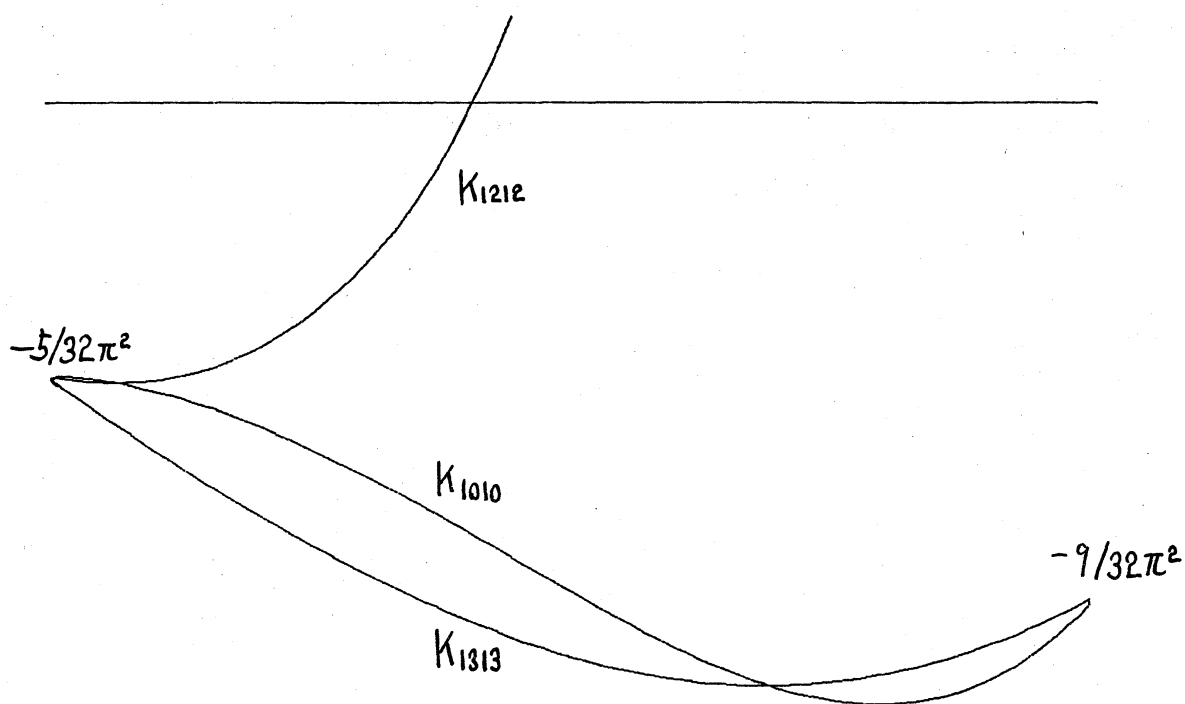
II 型, I-II 型に関しては, 両方とも無限

とな, ている。

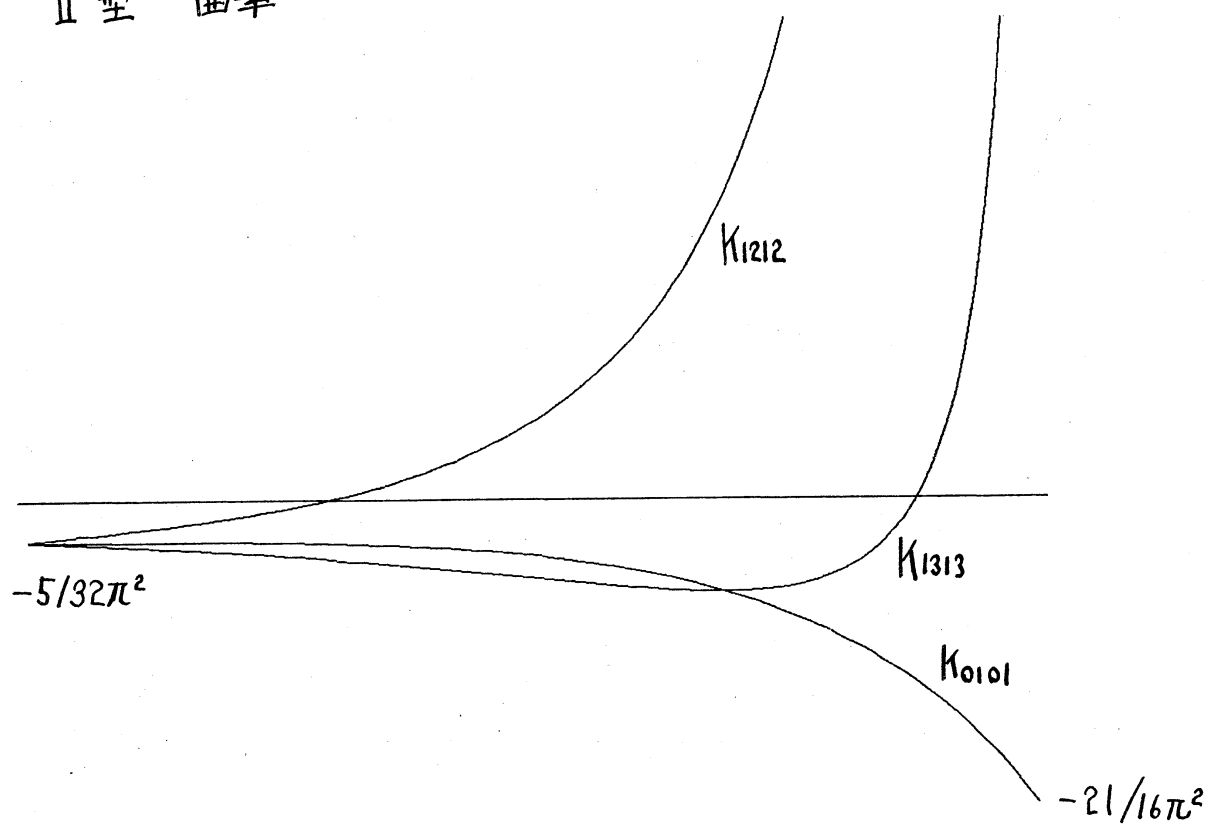
I 型 曲率



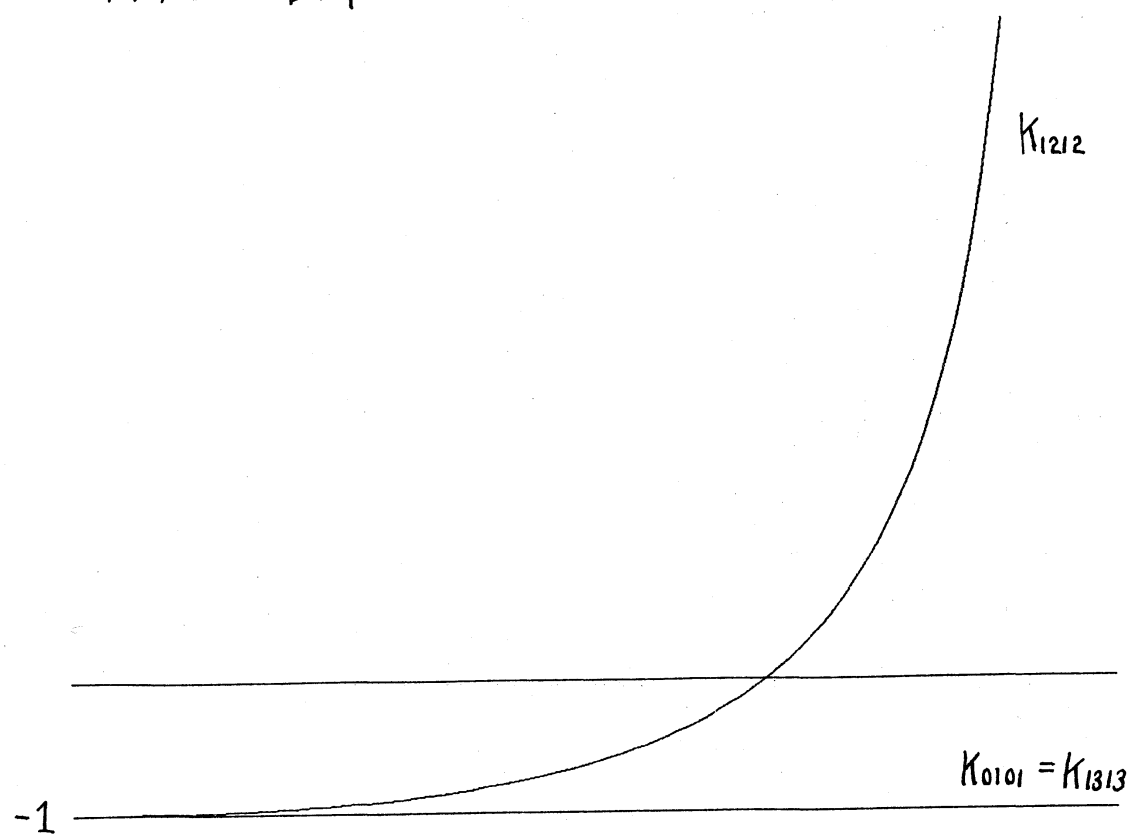
I-II 型 曲率

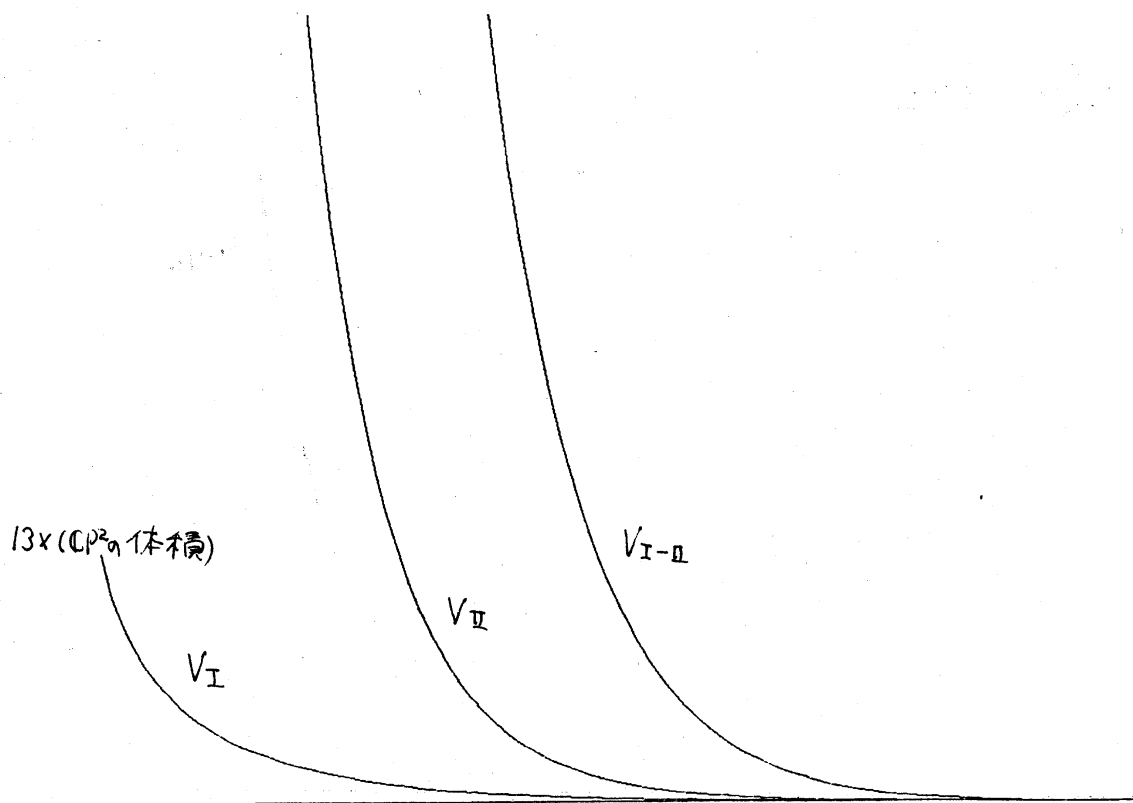
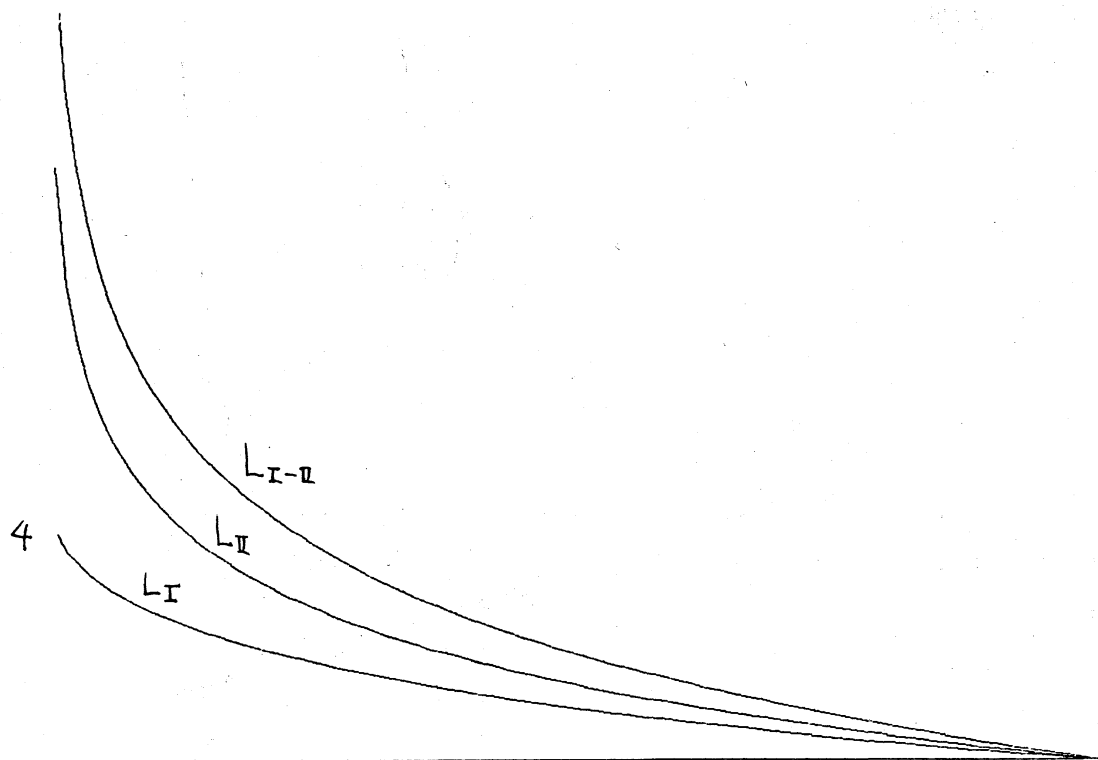


II 型 曲率



H^6/S^1 曲率





参考文献

- [B] Buchdahl, Instantons on $\mathbb{CP}^2$, J. Diff. Geo. 24 (1986) 19-52
- [DMH] H. Doi, Y. Matsumoto, and T. Matsumoto, An explicit formula of the metric on the moduli space of BPST-instantons over S^4 , Fête of Topology, Academic Press (1987)
- [F] 古田 幹雄, Self-dual connections on the principal $SU(2)$ bundle over $\mathbb{CP}^2$ with $c_2 = -1$, 東京大学修士論文 I, 1985
- [M] T. Matsumoto, Three Riemannian metric on the moduli space of 1-instantons over S^4 , preprint.
- [GP] D. Groisser and T. Parker, The geometry of the Yang-Mills Moduli space for definite manifolds, preprint.

補足

最近の preprint [GP] には, (M, g_M) , (但し $M \cong \mathbb{CP}^2 \# \dots \# \mathbb{CP}^2$) 上のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ の I 型計量に関する結果が記述されている。それによると cone point $[A] \in \mathcal{M}$ の近傍 U では, $F: (0, r_0) \times \mathbb{CP}^2 \rightarrow U - \{[A]\}$ による I 型計量の引き上げ F^*g_I は, $F^*g_I = dr^2 + r^2(F-S + O(r^2))$ とかけ、断面曲率は, $K(2\lambda, X) = O(1)$, $K(X, Y) = \frac{3}{r^2} F-S(JX, Y) + O(1)$, $X, Y \in T_{(r, x)}\{r\} \times \mathbb{CP}^2$, J は $\mathbb{CP}^2$ の複素構造とかけらる。境界付近では, $\gamma = \text{collar of } \mathcal{M} \rightarrow (0, \lambda_0) \times \mathcal{M}$ に対し, $g_I \sim \gamma^* 4\pi^2 (2dJ^2 + g_M)$ となる。

本報告は, $M = \mathbb{CP}^2$, $g_M = F-S$ について、計量、断面曲率を詳しく見たものであり、この場合, cone point 付近の上の定数が共に $-3/8\pi^2$ であることを示している。