

## Fourier-Jacobi Expansion of Kudla Lift

村瀬 篤 (京都産業大学・理)

菅野 孝史 (金沢大学・理)

### §1. $U(2,1)$ 上の保型形式

1.1  $K$  を, 判別式  $D$  の虚 2 次体とする.  $\mathcal{O}_K$  を  $K$  の整数環,  $\sigma$  を  $K/\mathbf{Q}$  の非自明な自己同型とする.  $\mathbf{Q}$  の各素点  $v$  に対し,  $K_v = K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_v$  とおく. また, 有限素点  $p$  に対し,

$$\mathcal{O}_{K,p} = \begin{cases} \mathbf{Z}_p \oplus \mathbf{Z}_p & \cdots K_p = \mathbf{Q}_p \oplus \mathbf{Q}_p \\ K_p \text{ の整数環} & \cdots K_p \text{ は体} \end{cases}$$

とおき,  $\mathcal{O}_{K,f} = \prod_{p < \infty} \mathcal{O}_{K,p}$  および  $K^1 = \{t \in K^\times \mid t t^\sigma = 1\}$  とする. 今後,  $K$  の 0 でない分数イデアルを単にイデアルということにする.

1.2

$$S = \begin{bmatrix} & & \kappa^{-1} \\ & 1 & \\ -\kappa^{-1} & & \end{bmatrix}$$

とおく. ここに,  $\kappa = \sqrt{D}$  である.  $S$  は, 符号  $(2,1)$  のエルミート行列である.  $G$  を  $S$  に関するユニタリ群とする. すなわち,  $G_{\mathbf{Q}} = \{g \in GL_3(K) \mid {}^t g^\sigma S g = S\}$ .  $N$  と  $R$  を

$$N_{\mathbf{Q}} = \left\{ (w, x) := \begin{bmatrix} 1 & \kappa w^\sigma & x + \frac{\kappa}{2} w w^\sigma \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid w \in K, x \in \mathbf{Q} \right\}$$

$$R_{\mathbf{Q}} = \{n \operatorname{diag}(1, t, 1) \mid n \in N_{\mathbf{Q}}, t \in K^1\}$$

で与えられる  $G$  の部分群とする. 簡単のため,  $n \operatorname{diag}(1, t, 1)$  を  $nt$  と書く. スカラー行列  $\operatorname{diag}(t, t, t)$  は常に  $t \cdot 1_3$  と書くことにする.  $w, w' \in K, x, x' \in \mathbf{Q}, t \in K^1$  に対し,  $(w, x)(w', x') = (w + w', x + x' + \frac{1}{2} \langle w, w' \rangle)$ , および  $t(w, x)t^{-1} = (tw, x)$

が成り立つ. ここに,  $\langle w, w' \rangle = \text{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(\kappa w^\sigma w')$ .  $a \in K^\times$  に対し,

$$d(a) = \begin{bmatrix} a^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \in G_{\mathbf{Q}}$$

とおく.

1.3  $G_\infty = G(\mathbf{R})$  の有界対称領域  $\mathcal{D} = \{ {}^t(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid (z - \bar{z})/\kappa - w\bar{w} > 0 \}$  への作用と, 正則保型因子  $J: G_\infty \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を次のように定める:

$$g \cdot Z^\sim = J(g, Z) \cdot (g\langle Z \rangle)^\sim \quad (g \in G_\infty, Z \in \mathcal{D}).$$

ここで,  $Z = {}^t(z, w) \in \mathcal{D}$  に対し  $Z^\sim = {}^t(z, w, 1) \in \mathbf{C}^3$  とおいた.  $G_\infty$  における  $Z_0 = {}^t(\kappa/2, 0) \in \mathcal{D}$  の固定化部分群を  $\mathcal{K}_\infty$  とする.  $\mathcal{K}_\infty$  は  $G_\infty$  の極大コンパクト部分群である.

1.4  $L = \mathcal{O}_K^3$  を  $K^3$  の lattice とし,  $L_f = \prod_{p < \infty} L_p$  とおく. ここに, 各有限素点  $p$  に対し,  $L_p = L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_p$  である. また,  $\mathcal{K}_p = \{ g_p \in G_p \mid g_p L_p = L_p \}$ ,  $\mathcal{K}_f = \prod_{p < \infty} \mathcal{K}_p$  とおくと,  $\mathcal{K}_p$  (resp.  $\mathcal{K}_f$ ) は,  $G_p$  (resp.  $G_{\mathbf{A}, f} = G_{\mathbf{A}}$  の有限部分) の極大コンパクト部分群である.

1.5 正の偶数  $l$  に対し,  $\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f)$  を  $G_{\mathbf{Q}} \backslash G_{\mathbf{A}}$  上の smooth な関数  $F$  で次の性質を満たすもののなす空間とする.

- (i)  $F(gk_f k_\infty) = J(k_\infty, Z_0)^{-l} F(g) \quad (g \in G_{\mathbf{A}}, k_f \in \mathcal{K}_f, k_\infty \in \mathcal{K}_\infty)$
- (ii) 任意の  $g_f \in G_{\mathbf{A}, f}$  に対し,  $J(g_\infty, Z_0)^l F(g_\infty g_f)$  は  $g_\infty \langle Z_0 \rangle \in \mathcal{D}$  に関し正則である.

$\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f)$  を  $\mathcal{K}_f$  上の weight  $l$  の正則保型形式の空間と呼ぶ.  $\mathcal{Y}_l$  を  $K_{\mathbf{A}}^\times / K^\times$  のユニタリ指標  $\Omega$  で,  $\mathcal{O}_{K, f}^\times = \prod_{p < \infty} \mathcal{O}_{K, p}^\times$  上 trivial, かつ  $\Omega(z_\infty) = (z_\infty / |z_\infty|)^{-l}$  ( $z_\infty \in K_\infty^\times$ ) を満たすものの集合とする. このとき,

$$\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f) = \bigoplus_{\Omega \in \mathcal{Y}_l} \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f; \Omega)$$

が成り立つ. ここで,  $\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f; \Omega)$  は中心指標  $\Omega$  を持つ  $F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f)$  の空間である.

$$\mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f) = \left\{ F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f) \mid \int_{N_{\mathbf{Q}} \backslash N_{\mathbf{A}}} F(n g) dn = 0 \quad (g \in G_{\mathbf{A}}) \right\}$$

とおく.  $\mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f)$  を  $\mathcal{K}_f$  上の weight  $l$  の尖点形式の空間という.

$$\mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f) = \bigoplus_{\Omega \in \mathcal{Y}_l} \mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f; \Omega), \quad \mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f; \Omega) = \mathfrak{S}_l(\mathcal{K}_f) \cap \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f; \Omega)$$

が成り立つ.

1.6  $\mathcal{H}(G_p, \mathcal{K}_p)$  を  $(G_p, \mathcal{K}_p)$  に関する通常の Hecke algebra とする.  $\mathcal{H}(G_p, \mathcal{K}_p)$  は  $\mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f; \Omega)$  に次のように作用する:

$$F * \Phi(g) = \int_{G_p} F(gx^{-1}) \Phi(x) dx \quad (F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f; \Omega), \Phi \in \mathcal{H}(G_p, \mathcal{K}_p)).$$

ここに  $dx$  は  $\text{vol}(\mathcal{K}_p) = 1$  となるように正規化されている. 各有限素点  $p$  に対し,  $\mathcal{H}(G_p, \mathcal{K}_p)$  から  $\mathbb{C}$  への  $\mathbb{C}$ -algebra homomorphism  $\Lambda_p$  で,  $F * \Phi = \Lambda_p(\Phi) \cdot F$  ( $\Phi \in \mathcal{H}(G_p, \mathcal{K}_p)$ ) が成り立つようなものが存在するとき,  $F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f; \Omega)$  を *Hecke eigenform* と呼ぶ.

1.7  $\mathbb{Q}_A/\mathbb{Q}$  の加法指標で  $\psi(x_\infty) = e[x_\infty] := \exp(2\pi\sqrt{-1}x_\infty)$  ( $x_\infty \in \mathbb{R}$ ) により定まるものを  $\psi$  とする.  $F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f)$ ,  $m \in \mathbb{Q}$  と  $K$  のイデアル  $\mathfrak{a}$  に対し

$$F_{\mathfrak{a}}^m(r) = \int_{\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_A} \psi_m(-x) F((0, x)r d(\alpha_f)) dx \quad (r \in R_A)$$

とおく. ここで,  $\psi_m(x) = \psi(mx)$  ( $x \in \mathbb{Q}_A$ ). また,  $\alpha_f \in K_{A,f}^\times$  は  $\mathfrak{a}_f = \alpha_f \mathcal{O}_{K,f}$  ( $\mathfrak{a}_f = \mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_f$ ) となるように選ぶ. このとき  $F$  は  $\{F_{\mathfrak{a}}^m\}_{m, \mathfrak{a}}$  たちによって決まる.  $m < 0$  か  $mN_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$  が整イデアルでないときは,  $F_{\mathfrak{a}}^m = 0$  であることに注意する.  $F$  が cuspidal ならば, 任意の  $\mathfrak{a}$  に対し,  $F_{\mathfrak{a}}^0 = 0$  である.

## §2. 原始的テータ関数

2.1 この節を通じて,  $m$  を正の有理数とする.  $\mathbf{T}_{hol}^m$  を  $R_{\mathbb{Q}} \setminus R_A$  上の smooth な関数  $\Theta$  で次の条件を満たすもののなす空間とする:

$$(i) \quad \Theta((0, x)r) = \psi_m(x) \Theta(r) \quad (x \in \mathbb{Q}_A, r \in R_A)$$

$$(ii) \quad \Theta(rt_\infty) = \Theta(r) \quad (r \in R_A, t_\infty \in K_\infty^1)$$

$$(iii) \quad \text{任意の } r_f \in R_{A,f} \text{ に対し, } w_\infty \mapsto e\left[-\frac{m\kappa}{2} w_\infty \overline{w_\infty}\right] \Theta((w_\infty, 0)r_f) \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上正則である.}$$

$\mathbf{T}_{hol}^m$  を指数  $m$  の正則テータ関数の空間と呼ぶ.

2.2 次に,  $\mathbf{T}_{hol}^m$  上の  $K_{\mathbf{A}}^1$  の metaplectic 表現を定義しよう.  $K/\mathbf{Q}$  に対応する  $\mathbf{Q}$  の Hecke 指標を  $\omega$  とする.  $K$  の Hecke 指標  $\chi$  で,  $\chi|_{\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^\times} = \omega$  をみたすものの集合を  $\mathcal{X}$  とする. また,  $\mathcal{X}_0 = \{\chi \in \mathcal{X} \mid \chi(z_\infty) = |z_\infty|/z_\infty (z_\infty \in K_\infty^\times = \mathbf{C}^\times)\}$  とおく.  $\mathbf{Q}$  の素点  $v$  に対し,  $\lambda_{K_v}(\psi_m)$  を,  $(K_v/\mathbf{Q}_v, \psi_m)$  に付随する Weil constant とする (cf. [MS1], §3.2).  $\chi \in \mathcal{X}_0, \chi_v = \chi|_{K_v^\times}$  とする.  $t_v \in K_v^1$  に対し,  $\mathbf{T}_{hol}^m$  の自己準同型  $\mathcal{M}_{\chi_v}(t_v)$  を次のように定める:  $t_v = 1$  のときは  $\mathcal{M}_{\chi_v}(t_v) = \text{Id}_{\mathbf{T}_{hol}^m}$  とおく.  $t_v \neq 1$  のときは,

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\chi_v}(t_v) \Theta(r) \\ &= \lambda_{K_v}(\psi_m)^{-1} \chi_v \left( \frac{1-t_v}{\kappa} \right) \\ & \times \int_{K_v} \psi_m \left( \frac{1}{2} \langle w_v, t_v w_v \rangle \right) \Theta(r((1-t_v)w_v, 0)) dw_v \quad (\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m, r \in R_{\mathbf{A}}) \end{aligned}$$

とおく. ここに,  $dw_v$  は  $K_v$  の Haar 測度で, pairing  $(w_v, w'_v) \mapsto \psi_m(\langle w_v, w'_v \rangle)$  に関し self-dual なものとする.  $t = (t_v)_v \in K_{\mathbf{A}}^1$  に対し,  $\mathcal{M}_\chi(t) = \bigotimes_v \mathcal{M}_{\chi_v}(t_v)$  とおく.  $\mathcal{M}_\chi$  は  $K_{\mathbf{A}}^1$  の  $\mathbf{T}_{hol}^m$  上の smooth な表現を定め,  $\mathcal{M}_\chi(t) \circ \rho'(n_f) \circ \mathcal{M}_\chi(t^{-1}) = \rho'(tn_f t^{-1})$  ( $t \in K_{\mathbf{A}}^1, n_f \in N_{\mathbf{A},f}$ ) を満たすことが知られている. ここに,  $\rho'$  は  $R_{\mathbf{A},f}$  の  $\mathbf{T}_{hol}^m$  上の右移動表現を表す (cf. [MS2]).

2.3  $\chi \in \mathcal{X}_0$  に対し,  $\mathbf{T}_{hol,\chi}^m = \{\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m \mid \mathcal{M}_\chi(t) \Theta(r) = \Theta(rt) \ (r \in R_{\mathbf{A}}, t \in K_{\mathbf{A}}^1)\}$  とおくと, 直交分解  $\mathbf{T}_{hol}^m = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}_0} \mathbf{T}_{hol,\chi}^m$  が得られる.  $K$  のイデアル  $\mathfrak{a}$  と  $\chi \in \mathcal{X}_0$  に対し,  $\mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}) = \{\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m \mid \Theta(rr_0) = \Theta(r) \ (r \in R_{\mathbf{A}}, r_0 \in R(\mathfrak{a})_f)\}$  および  $\mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}, \chi) = \mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}) \cap \mathbf{T}_{hol,\chi}^m$  とおく. ここに  $R(\mathfrak{a})_f$  は

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{a})_f &= \{nt \mid n \in N(\mathfrak{a})_f, t \in \mathcal{O}_{K,f}^1\} \\ N(\mathfrak{a})_f &= \{(w, x) \in N_{\mathbf{A},f} \mid w \in \mathfrak{a}_f, x + \frac{\kappa}{2} ww^\sigma \in N_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{a}_f) \mathcal{O}_{K,f}\} \end{aligned}$$

で与えられる  $R_{\mathbf{A},f}$  の開コンパクト部分群である.  $F \in \mathcal{A}_l(K_f)$  に対し,  $F_{\mathfrak{a}}^m \in \mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a})$  であることに注意する.

2.4  $(m, \mathfrak{a}, \chi)$  に関して原始的なテータ関数の空間  $\mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathfrak{a}, \chi)$  を次のように定義する:

$$\mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathfrak{a}, \chi) = \{\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}, \chi) \mid \mathcal{P}'_b \Theta = 0 \ (b \supset \mathfrak{a}, b \neq \mathfrak{a})\}$$

ここに,  $\mathcal{P}'_b$  は

$$\mathcal{P}'_b \Theta = \int_{N(b)_f} \rho'(n) \Theta d_b n \quad (\Theta \in \mathbf{T}_{hol}^m(\mathfrak{a}))$$

により与えられる  $\mathbf{T}_{hol}^m(\mathbf{a})$  の自己準同型写像である。ただし,  $d_{\mathbf{b}}n$  は  $N(\mathbf{b})_f$  の Haar 測度で,  $\text{vol}(N(\mathbf{b})_f) = 1$  により正規化されたものである。  $\mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathbf{a}, \chi)$  は高々 1 次元であることが知られている。このことは,  $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$  のときに Shintani ([Shin]) によって, 一般の CM field の場合には Glauberman-Rogawski ([GIRo]) によって証明された ([MS2], Theorem 3.4 も参照)。

**2.5** 原始的テータ関数の存在条件を述べるために, 記号等を準備する。  $\chi \in \mathcal{X}_0$  とする。任意の有限素点  $p$  に対し,  $\mu_p(\mathbf{a}, m) := \text{ord}_p m N_{K/\mathbf{Q}}(\mathbf{a}) \geq 0$  を仮定する。  $a(\chi_p) = \text{Min}\{a \geq 0 \mid \chi_p|_{(1+\mathfrak{P}_p^a) \cap \mathcal{O}_{K,p}^\times} = 1\}$  とおく。ここで,

$$\mathfrak{P}_p = \begin{cases} p\mathbf{Z}_p \oplus p\mathbf{Z}_p & \cdots K_p = \mathbf{Q}_p \oplus \mathbf{Q}_p \\ \mathcal{O}_{K,p} \text{ の極大イデアル} & \cdots K_p \text{ は体.} \end{cases}$$

$\epsilon(s, \chi_p, \psi_{m,K_p})$  を Tate の epsilon factor ([Ta]) とする。ここに,  $\psi_{m,K_p} = \psi_m \circ \text{Tr}_{K_p/\mathbf{Q}_p} \in K_p^\wedge$ 。簡単のため,  $\epsilon(\chi_p, \psi_{m,K_p}) = \epsilon\left(\frac{1}{2}, \chi_p, \psi_{m,K_p}\right)$  とおく。このとき,  $\epsilon(\chi_p, \psi_{m,K_p}) = \pm \chi_p(\kappa^{-1})$  が成り立つ。

$\mathcal{X}_{0,prim}(\mathbf{a}, m)$  を, 次の条件を満たす  $\chi \in \mathcal{X}_0$  のなす集合とする: 任意の有限素点  $p$  に対し,

$$a(\chi_p) = \begin{cases} \mu_p(\mathbf{a}, m) & \cdots \delta_p = 0 \\ 2(\mu_p(\mathbf{a}, m) + \delta_p) & \cdots \delta_p > 0 \text{ および } \mu_p(\mathbf{a}, m) > 0 \\ 2\delta_p \text{ or } 2\delta_p - 1 & \cdots \delta_p > 0 \text{ および } \mu_p(\mathbf{a}, m) = 0. \end{cases}$$

ここに,  $\delta_p = \text{ord}_p D$ 。最後に,

$$\mathcal{X}_{0,prim}^+(\mathbf{a}, m) = \{\chi \in \mathcal{X}_{0,prim}(\mathbf{a}, m) \mid \text{任意の有限素点 } p \text{ に対し, } \epsilon(\chi_p, \psi_{m,K_p}) = \chi_p(\kappa^{-1})\}$$

とおく。

**2.6 Theorem (cf. [MS2])**  $m > 0$  および  $m N_{K/\mathbf{Q}}(\mathbf{a})$  は整と仮定する。このとき,  $\chi \in \mathcal{X}_0$  に対し, 次が成り立つ:

$$\dim \mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathbf{a}, \chi) = 1 \iff \chi \in \mathcal{X}_{0,prim}^+(\mathbf{a}, m).$$

**2.7 Proposition (cf. [Shin], [MS2])** 直和分解

$$\mathbf{T}_{hol}^m(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\chi \in \mathcal{X}_{0,prim}^+(\mathbf{b}, m)} \mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathbf{b}, \chi),$$

が成り立つ. ここで,  $\mathfrak{b}$  は  $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$  かつ  $mN_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})$  が整であるような  $K$  のイデアルを渡る.

**2.8**  $\Theta \in \mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathfrak{a}, \chi)$  の周期を

$$I(\Theta) = \int_{K^1 \backslash K_{\mathbf{A}}^1} \Theta(t) d^\times t$$

により定義する. ここに,  $d^\times t$  は  $\text{vol}(K^1 \backslash K_{\mathbf{A}}^1) = h(K^1) := \#(K^1 \backslash K_{\mathbf{A}}^1 / K_\infty^1 \prod_{p < \infty} \mathcal{O}_{K,p}^1)$  により正規化されているものとする.

**2.9 Theorem ([Yang])**  $\Theta \in \mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathfrak{a}, \chi) - \{0\}$  に対し

$$I(\Theta) \neq 0 \iff L\left(\chi; \frac{1}{2}\right) \neq 0.$$

**2.10**  $F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f), \chi \in \mathcal{X}_{0,prim}^+(\mathfrak{a}, m), \Theta \in \mathbf{T}_{hol,prim}^m(\mathfrak{a}, \chi), \Theta \neq 0$  とする. 内積

$$(F_{\mathfrak{a}}^m, \Theta) = \int_{R_{\mathbf{Q}} \backslash R_{\mathbf{A}}} F_{\mathfrak{a}}^m(r) \overline{\Theta(r)} dr$$

を  $(m, \mathfrak{a}, \chi)$  に関する  $F$  の原始成分と呼ぶ. ここに,  $dr$  は  $\text{vol}(R_{\mathbf{Q}} \backslash R_{\mathbf{A}}) = h(K^1)$  により正規化されているとする. [Shin] によって次が知られている.

**2.11 Theorem**  $F \in \mathcal{A}_l(\mathcal{K}_f; \Omega)$  を Hecke eigenform とする. このとき,  $F$  が消えないための必要十分条件は, 少なくともひとつの  $(m, \mathfrak{a}, \chi)$  に対して,  $(m, \mathfrak{a}, \chi)$  に関する  $F$  の原始成分が消えないことである.

### §3. $U(1, 1)$ 上の保型形式

**3.1**  $H = U(T)$  を, 歪エルミート行列  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  に関するユニタリ群とする. 有限素点  $p$  に対し,  $\mathcal{U}_p = H_p \cap GL_2(\mathcal{O}_{K,p})$  および

$$\mathcal{U}_0(D)_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_p \mid c \in D \cdot \mathcal{O}_{K,p} \right\}$$

とおく. 以下,  $\chi_0 \in \mathcal{X}_0$  を固定する.  $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_0(D)_p$  に対し,

$$\tilde{\chi}_{0,p}(u) = \begin{cases} \chi_0(a) & \cdots & c \in p\mathcal{O}_{K,p} \\ \chi_0(c) & \cdots & c \in \mathcal{O}_{K,p} - p\mathcal{O}_{K,p} \end{cases}$$

とおく. このとき,  $\tilde{\chi}_{0,p}$  は  $\mathcal{U}_0(D)_p$  のユニタリ指標を定めることが知られている.  $\tilde{\chi}_0 = \prod_{p < \infty} \tilde{\chi}_{0,p}$  は  $\mathcal{U}_0(D)_f = \prod_{p < \infty} \mathcal{U}_0(D)_p$  のユニタリ指標である.  $H_\infty = H(\mathbf{R})$  の  $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  への作用と正則保型因子  $j: H_\infty \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbf{C}^\times$  を通常のように定義し,  $\mathcal{U}_\infty$  を  $z_0 = \sqrt{-1} \in \mathfrak{h}$  の  $H_\infty$  における固定化部分群とする.

**3.2**  $S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0)$  を  $H_{\mathbf{Q}} \backslash H_{\mathbf{A}}$  上の smooth な関数  $f$  で次の条件を満たすものたちのなす空間とする:

$$(i) \quad f(hu_f u_\infty) = (\det u_\infty)^{l-1} j(u_\infty, z_0)^{-(l-1)} \tilde{\chi}_0(u_f) f(h)$$

$$(h \in H_{\mathbf{A}}, u_f \in \mathcal{U}_0(D)_f, u_\infty \in \mathcal{U}_\infty).$$

$$(ii) \quad \text{任意の } h_f \in H_f \text{ に対し, } (\det h_\infty)^{-(l-1)} j(h_\infty, z_0)^{l-1} f(h_f h_\infty) \text{ は } h_\infty \langle z_0 \rangle \in \mathfrak{h} \text{ に関して正則である.}$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbf{Q} \backslash \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h\right) dx = 0 \quad (h \in H_{\mathbf{A}}).$$

また,  $S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0) = \bigoplus_{\Omega \in \mathcal{Y}_l} S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0 \Omega^{-1})$  が成り立つ. ここに, 各成分は  $S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0)$  の元で中心指標  $\chi_0 \Omega^{-1}$  をもつもののなす空間である.

**3.3**  $(H_p, \mathcal{U}_0(D)_p)$  の指標付き Hecke 環を  $\mathcal{H}^{\chi_0} = \{\varphi \in C_c^\infty(H_p) \mid \varphi(uhu') = \tilde{\chi}_{0,p}(uu')\varphi(h) \ (u, u' \in \mathcal{U}_0(D)_p, h \in H_p)\}$  とする. Hecke 環  $\mathcal{H}^{\chi_0}$  における積を

$$\varphi_1 * \varphi_2(h) = \int_{H_p} \varphi_1(hx^{-1}) \varphi_2(x) dx \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_p^{\chi_0})$$

により定める. ここに,  $dx$  を  $\text{vol}(\mathcal{U}_0(D)_p) = 1$  となるように正規化しておく.  $\mathcal{H}_p^{\chi_0}$  は  $\mathbf{C}$ -algebra をなし,  $S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0 \Omega^{-1})$  に次のように作用する:

$$f * \varphi(h) = \int_{H_p} f(hx^{-1}) \varphi(x) dx \quad (f \in S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0 \Omega^{-1}), \varphi \in \mathcal{H}_p^{\chi_0}).$$

**3.4**  $p \mid D$  となる有限素点に対し,  $\Pi_p$  を  $K_p$  の素元とする.  $\varphi_p^\pm \in \mathcal{H}_p^{\chi_0}$  を  $\text{Supp}(\varphi_p^\pm) \subset \mathcal{U}_0(D)_p d_H(\Pi_p^{\pm 1}) \mathcal{U}_0(D)_p$  および  $\varphi_p^\pm(d_H(\Pi_p^{\pm 1})) = \chi_0^{-1}(\Pi_p^{\pm 1})$  により定義する.  $\varphi_p^\pm$  は  $\Pi_p$  の選び方に依存しないこと, また  $\varphi_p^+$  と  $\varphi_p^-$  は可換であることに注意する.

$$\mathcal{H}'_p = \begin{cases} \mathcal{H}^{\chi_0}(H_p, \mathcal{U}_0(D)_p) & \cdots & p \nmid D \\ \mathbf{C}[\varphi_p^+, \varphi_p^-] & \cdots & p \mid D \end{cases}$$

とおくと,  $\mathcal{H}'_p$  は  $\mathcal{H}^{x_0}(H_p, \mathcal{U}_0(D)_p)$  の可換な部分環をなす.

3.5  $S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0 \Omega^{-1})$  の元  $f$  が *Hecke eigenform* であるとは, 任意の有限素点  $p$  に対し,  $\mathcal{H}'_p$  から  $\mathbb{C}$  への  $\mathbb{C}$ -algebra homomorphism  $\lambda_p$  で, 任意の  $\varphi \in \mathcal{H}'_p$  に対し  $f * \varphi = \lambda_p(\varphi) f$  となるものが存在することである.

## §4. Kudla lift

4.1  $v$  を  $\mathbb{Q}$  の素点とする.  $G_v \times H_v$  の  $\mathcal{S}(K_v^3)$  上の metaplectic 表現  $M_v^{x_0}$  を次のように定める:

$$M_v^{x_0} \left( g, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\sigma & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right) \Psi(X) = \chi_0(a) |N(a)|_v^{3/2} \psi_v(b \cdot X^* S X) \Psi(ag^{-1}X)$$

$$M_v^{x_0} \left( 1_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \Psi(X) = \lambda_{K_v}(\psi_v) \hat{\Psi}(X).$$

ここに,  $g \in G_v, b \in \mathbb{Q}_v, a \in K_v, \Psi \in \mathcal{S}(K_v^3), X \in K_v^3, X^* = {}^t X^\sigma$  および

$$\hat{\Psi}(X) = \int_{K_v^3} \psi_v(\text{Tr}_{K_v/\mathbb{Q}_v}(Y^* S X)) \Psi(Y) dY$$

( $dY$  は  $K_v^3$  の  $(X, Y) \mapsto \psi_v(\text{Tr}_{K_v/\mathbb{Q}_v}(Y^* S X))$  に関して self-dual な Haar 測度である).

4.2  $M^{x_0} = \otimes_v M_v^{x_0}$  とおく. このとき,  $M^{x_0}$  は  $G_{\mathbb{A}} \times H_{\mathbb{A}}$  の  $\mathcal{S}(K_{\mathbb{A}}^3)$  上の smooth な表現である. 各有限素点  $p$  に対し,  $\Psi_{0,p}$  を  $\mathcal{O}_{K,p}^3$  の特性関数とする. また,  $\Psi_{0,\infty}(X_\infty) = (\xi^* X_\infty)^l \exp(-2\pi X_\infty^* S_0 X_\infty)$  ( $X_\infty \in \mathbb{C}^3$ ) とおく. ここに,  $S_0 = \text{diag}(-2/D, 1, 1/2)$ , および  $\xi = {}^t(-1/\sqrt{D}, 0, 1/2)$  である.  $\Psi_0(X) = \prod_v \Psi_{0,v}(X_v)$  とおく. 次のように theta kernel  $T: G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}} \times H_{\mathbb{Q}} \backslash H_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{C}$  を定める (cf. [Ku]):

$$T(g, h) = \sum_{X \in K^3} (M^{x_0}(g, h) \Psi_0)(X) \quad (g \in G_{\mathbb{A}}, h \in H_{\mathbb{A}}).$$

このとき,  $g \in G_{\mathbb{A}}, k_f \in \mathcal{K}_f, k_\infty \in \mathcal{K}_\infty, h \in H_{\mathbb{A}}, u_f \in \mathcal{U}_0(D)_f, u_\infty \in \mathcal{U}_\infty$  に対し,  $T(g k_f k_\infty, h u_f u_\infty) = J(k_\infty, Z_0)^{-l} \tilde{\chi}_0^{-1}(u_f) (\det u_\infty)^{-(l-1)} j(u_\infty, z_0)^{l-1} T(g, h)$  が成り立つ.

4.3  $\Omega \in \mathcal{Y}_l$  とする.  $f \in S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0 \Omega^{-1})$  に対し,

$$\mathcal{L}(f)(g) = \int_{H_{\mathbb{Q}} \backslash H_{\mathbb{A}}} f(h) T(g, h) dh \quad (g \in G_{\mathbb{A}})$$

とおく.  $\mathcal{L}(f)$  を  $f$  の Kudla lift という.

#### 4.4 Theorem ([Ku])

(i)  $\mathcal{L}(f) \in \mathcal{S}_l(\mathcal{K}_f; \Omega)$ .

(ii)  $f$  が Hecke eigenform ならば,  $\mathcal{L}(f)$  も Hecke eigenform である.

### §5. 主結果

5.1  $\mathcal{O}_K$  の元  $\theta$  で次の条件を満たすものを一つ取り固定する :

(i)  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \theta$

(ii)  $\text{Im}(\theta) > 0$

(iii)  $D$  を割る各素数  $p$  に対し,  $\text{ord}_p N(\theta) = 1$  となる.

この節を通じて,  $K$  のイデアル  $\mathfrak{a}$ , および  $m \in \mathbb{Q}, m > 0$  で  $mN(\mathfrak{a})$  が整であるものを固定する. 簡単のため,  $\mu_p(\mathfrak{a}, m)$  を  $\mu_p$  と書く. うめこみ  $\iota_m: K^1 \rightarrow H_{\mathbb{Q}}$  を

$$\iota_m(z^\sigma/z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} x & m\theta\theta^\sigma y \\ -y/m & x + \beta y \end{pmatrix} \quad (z = x + \theta y \in K^\times)$$

により定める.

5.2  $\chi \in \mathcal{X}_{0, \text{prim}}^+(\mathfrak{a}, m)$  および  $f \in S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0 \Omega^{-1})$  に対し,  $(U(1, 1), U(1))$  上の球関数  $W_{\chi, f}^m$  を

$$W_{\chi, f}^m(h) = \int_{K^1 \backslash K_{\mathbb{A}}^1} (\chi/\chi_0)^1(t^{-1}) f(\iota_m(t)h) d^\times t \quad (h \in H_{\mathbb{A}})$$

により定める. ただし,  $(\chi/\chi_0)^1$  は  $(\chi/\chi_0)^1(z^\sigma/z) = (\chi/\chi_0)(z)$  ( $z \in K_{\mathbb{A}}^\times$ ) により定まる  $K_{\mathbb{A}}^1/K^1$  のユニタリ指標である. 局所球関数の一意性 ([MS3]) より,  $f$  が Hecke eigenform ならば  $W_{\chi, f}^m$  は局所成分の積に分解する.

5.3  $A(\chi)$  を,  $\delta_p = \text{ord}_p D > 0$  かつ  $a(\chi_p) = 2\delta_p - 1$  となる有限素点  $p$  の集合とする.  $H_\infty$  の元  $h_{\infty, m\theta}$  で  $h_{\infty, m\theta}(z_0) = m\theta$  となるものをとる.

$$P_{\mathfrak{a}}^m(\chi, f) = \chi_0^{-1}(\alpha_f) |N(\alpha_f)|_{\mathbb{A}}^{3/2} \cdot W_{\chi, f}^m \left( \begin{pmatrix} (\alpha_f^\sigma)^{-1} & \\ & \alpha_f \end{pmatrix} h_{\infty, m\theta} \right)$$

を  $f$  の  $(m, \mathfrak{a}, \chi)$  に関する周期と呼ぶ。主結果を述べよう。

**5.4 Theorem**  $(m, \mathfrak{a}, \chi)$  を上の通りとする。また,  $f \in S_{l-1}(\mathcal{U}'_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0 \Omega^{-1})$ ,  $\Theta \in \mathbf{T}_{hol, prim}^m(\mathfrak{a}, \chi)$  とする。各  $p \in A(\chi)$  に対し,  $f * \varphi_p^\pm = \nu_p^\pm f$  となると仮定する。このとき,

$$(\mathcal{L}(f)_\mathfrak{a}^m, \Theta) = c_\infty \prod_{p < \infty} c_p \prod_{p \in A(\chi)} c'_p \times \overline{I(\Theta)} P_\mathfrak{a}^m(\chi, f)$$

が成り立つ。ここに,

$$\begin{aligned} c_\infty &= (-1)^{l/2} 2^{l-2} \left| \frac{m\kappa}{2} \right|^{(l-3)/2} e \left[ \frac{m\kappa}{2} \right] \\ c_p &= p^{\mu_p - \delta_p/2} \times \begin{cases} 1 & \cdots & \delta_p = 0, \mu_p = 0 \\ 1 - \left( \frac{D}{p} \right) p^{-1} & \cdots & \delta_p = 0, \mu_p > 0 \\ \frac{2p}{1+p} & \cdots & \delta_p > 0 \end{cases} \\ c'_p &= 1 + p^{-1/2} \nu_p^- \quad (p \in A(\chi)). \end{aligned}$$

Theorem 5.4, Theorem 2.9 および Theorem 2.11 より次の Kudla lift に関する non-vanishing criterion を得る。

**5.5 Corollary**  $f \in S_{l-1}(\mathcal{U}_0(D)_f, \tilde{\chi}_0; \chi_0 \Omega^{-1})$  を Hecke eigenform とする。このとき,  $\mathcal{L}(f) \neq 0$  となるための必要十分条件は, ある  $(m, \mathfrak{a}, \chi)$  に対し,

$$L\left(\chi; \frac{1}{2}\right) P_\mathfrak{a}^m(\chi, f) \neq 0$$

となることである。

## References

- [GR] *G. I. Glauberman and J. D. Rogawski*, On theta functions with complex multiplication, J. reine angew. Math. **395** (1989), 68–101.
- [Ku] *S. Kudla*, On certain Euler products for  $SU(2, 1)$ , Compositio Math. **42** (1981), 321–344.
- [MS1] *A. Murase and T. Sugano*, Local theory of primitive theta functions, Compositio Math. **123** (2000), 273–302.

- [MS2] *A. Murase and T. Sugano*, Fourier-Jacobi expansion of Eisenstein series on unitary groups of degree three, to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo.
- [MS3] *A. Murase and T. Sugano*, Spherical functions on  $(U(1,1), U(1))$ , in preparation.
- [Shin] *T. Shintani*, On automorphic forms on unitary groups of order 3, unpublished manuscript (1979).
- [Ta] *J. Tate*, Number theoretic background, Proc. Symp. in Pure Math. **33**, part 2 (1979), 3–26.
- [Yang] *T. Yang*, Theta liftings and Hecke  $L$ -functions, J. reine angew. Math. **485** (1997), 25–53.

Atsushi Murase

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto Sangyo University, Motoyama, Kamigamo, Kita-ku, Kyoto 603-8555, Japan, e-mail: murase@cc.kyoto-su.ac.jp

Takashi Sugano

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kanazawa University, Kakumamachi, Kanazawa 920-1192, Japan, e-mail: sugano@kappa.s.kanazawa-u.ac.jp