

対称空間上の geodesic flow の完全積分可能性

山形大(理) 井伊 清隆 (Kiyotaka Ii)

山形大(理) 渡辺 伸一 (Shin-ichi Watanabe)

§ 1. 序

M を Riemann 多様体とする。Riemann 計量を $(\cdot | \cdot)$ で表わす。 M の tangent bundle TM と cotangent bundle T^*M を Riemann 計量によって同一視する。 TM は symplectic 多様体である。 TM 上の C^∞ 級 (実数値) 関数の全体 $C^\infty(TM)$ は Poisson algebra の構造をもつ。Poisson bracket を $\{ , \}$ で表わす。 $H_M(v) := \frac{1}{2}(v | v)$ で定義される関数 $H_M \in C^\infty(TM)$ を M の energy 関数という。 H_M は geodesic flow を生成する。 H_M と Poisson 可換な関数 $f \in C^\infty(TM)$ を (geodesic flow の) 第 1 積分という。

定義. n 次元 Riemann 多様体 M 上の geodesic flow が完全積分可能とは、次の (i), (ii) をみたす n 個の第 1 積分 $f_1, \dots, f_n$ が存在するとき:

- (i) $\{f_i, f_j\} = 0, \forall i, j$ (Poisson 可換)
 (ii) $df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \neq 0$ a.e. on TM (函数的に独立)

注. M および $f_1, \dots, f_n$ が実解析的のときは、上の (ii) は次の (ii)' と同値である:

- (ii)' 写像 $(f_1, \dots, f_n): TM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ の像は開集合 ($\neq \emptyset$) を含む。

定理 (A. Thimm [5]). 次の等質空間上の geodesic flow は完全積分可能である: (a) 実 Grassmann 多様体 $G_{p,q}(\mathbb{R})$ (b) 複素 Grassmann 多様体 $G_{p,q}(\mathbb{C})$ (c) $SU(n)/SO(n)$ (d) $P^n(\mathbb{C})$ における distance sphere (e) $SO(n)/SO(n-2)$

本稿では、次の定理の証明を述べる。

定理. 次の対称空間上の geodesic flow は完全積分可能である:

$$G_{p,q}(\mathbb{R}), SO(2n)/U(n), SO(n), \\ G_{p,q}(\mathbb{C}), SU(n)/SO(n), SU(2n)/Sp(n), SU(n).$$

注 1. $G_{p,q}(\mathbb{R})$, $G_{p,q}(\mathbb{C})$, $SU(n)/SO(n)$ は既に Thimm の定理にあるが、統一的に扱えるのでここにも書いた。

注 2. $SO(n)$, $SU(n)$ については、V. Guillemin が数年前に完全積分可能性を証明しているとの情報を Kostant 氏より受けた。

注 3. A. S. Mishchenko - A. T. Fomenko の仕事についても、砂田氏、橋爪氏 その他の方から指摘、教示された。

§ 2. Poisson algebra $C^\infty(\mathfrak{g})$

G を連結な Lie 群とし、 $\mathfrak{g}$ もその Lie algebra とする。

$X \in \mathfrak{g}$ をとる。 $i_X: T_x \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を X における $\mathfrak{g}$ の tangent space $T_x \mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}$ との自然な同一視とする。 $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ を Ad -不変、非退化な symmetric bilinear form とする。 $\mathfrak{g}$ とその dual space $\mathfrak{g}^*$ を B によって同一視する。 $\mathfrak{g}$ 上の C^∞ 級 (実数値) 関数の全体を $C^\infty(\mathfrak{g})$ で表わす。 $f \in C^\infty(\mathfrak{g})$, $X \in \mathfrak{g}$ に対して、 $\nabla f(X) := i_X((\text{grad}_B f)_X)$ とおく。 Lie-Kostant bracket $\{, \}: C^\infty(\mathfrak{g}) \times C^\infty(\mathfrak{g}) \rightarrow C^\infty(\mathfrak{g})$ は $\{f_1, f_2\}(X) := B(X, [\nabla f_1(X), \nabla f_2(X)])$ で与えられる。

注. Lie-Kostant bracket は、本来 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 上で以下の

ように Lie bracket の拡張として、より自然に定義されるものである：
 $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ をとる。 $j_\alpha : \mathfrak{g}^* \rightarrow T_\alpha \mathfrak{g}^*$ を自然な同一視とする。
 dual map を $j_\alpha^* : T_\alpha^* \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ で表わす。
 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 上の Lie-Kostant bracket は $\{f_1, f_2\}(\alpha) := \alpha([j_\alpha^*((df_1)_\alpha), j_\alpha^*((df_2)_\alpha)])$ で定義される。
 上記 $C^\infty(\mathfrak{g})$ 上の Lie-Kostant bracket は $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の、 B による同一視を介して、 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 上のそれを引き戻したものである。

$\mathfrak{g}$ 上の多項式関数の全体 $S(\mathfrak{g})$ は $C^\infty(\mathfrak{g})$ の Poisson subalgebra である。

補題 1. (1) G の adjoint 作用は自然に Poisson algebra $C^\infty(\mathfrak{g})$ および $S(\mathfrak{g})$ の自己同型を引き起こす。

(2) Poisson algebra $S(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ は G -不変な多項式の全体と一致する。

次に、 $G = U(n)$ ($SU(n)$), $SO(n)$ の各場合について、 $S(\mathfrak{g})$ の可換な Poisson subalgebra を構成する。

$G = U(n)$ ($SU(n)$) の場合： B としては $B(X, Y) := -\text{tr}(XY)$ をとる。 $u(n)$ 上の j -th fundamental

invariants $F_j^{(n)}$ ($1 \leq j \leq n$) は

$$\det\left(\lambda E_n - \frac{1}{\sqrt{-1}} X\right) = \lambda^n - F_1^{(n)}(X) \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n F_n^{(n)}(X)$$

で与えられる。 $F_j^{(n)} \in S(\mathfrak{u}(n))$ である。

補題 2 (Kostant [3], p.207 参照).

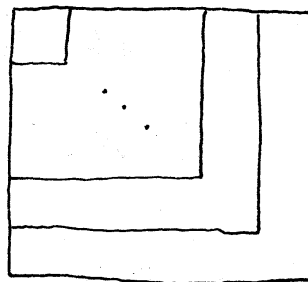
$$Z(\mathfrak{u}(n)) = \mathbb{R}[F_1^{(n)}, \dots, F_n^{(n)}]$$

$\mathfrak{u}(n)$ の subalgebra の列:

$$\mathfrak{u}(n) \supset \mathfrak{u}(n-1) \supset \cdots \supset \mathfrak{u}(1)$$

および直交射影 $\pi_i : \mathfrak{u}(n) \longrightarrow \mathfrak{u}(i)$

を考える。



$\mathfrak{u}(i)$ 上の j -th fundamental invariants を π_i で引き戻したものを $F_j^{(i)}$ ($1 \leq j \leq i$) で表わす、すなわち、

$$\det\left(\lambda E_i - \frac{1}{\sqrt{-1}} \pi_i(X)\right) = \lambda^i - F_1^{(i)}(X) \lambda^{i-1} + \cdots + (-1)^i F_i^{(i)}(X)$$

$F_j^{(i)} \in S(\mathfrak{u}(n))$ である。 pull-back $\pi_i^* : S(\mathfrak{u}(i)) \longrightarrow$

$S(\mathfrak{u}(n))$ は Poisson algebra の準同型であることに注意すると次を得る。

命題 3. $\Lambda(\mathfrak{u}(n)) := \mathbb{R}[F_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq i \leq n]$ は
(maximal) commutative Poisson subalgebra in $S(\mathfrak{u}(n))$
である。

$$\text{注. } \{F_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\} \text{ の個数} = \frac{n(n+1)}{2} \\ = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{u}(n) + \text{rank } \mathfrak{u}(n))$$

$\mathfrak{u}(n)$ 上の実数値連続関数 $A_j^{(i)}$ ($1 \leq j \leq i \leq n$) を

$$\det\left(\lambda E_i - \frac{1}{\sqrt{-1}} \pi_i(x)\right) = (\lambda - A_1^{(i)}(x)) \cdots (\lambda - A_i^{(i)}(x)),$$

$$A_1^{(i)}(x) \leq A_2^{(i)}(x) \leq \cdots \leq A_i^{(i)}(x)$$

で定義する。

$$\text{連続写像 } A: \mathfrak{u}(n) \longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ を}$$

$$A := (A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}, A_1^{(n-1)}, \dots, A_1^{(1)})$$

で定義する。

$$\text{多項式写像 } F: \mathfrak{u}(n) \longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ を}$$

$$F := (F_1^{(n)}, F_2^{(n)}, \dots, F_n^{(n)}, F_1^{(n-1)}, \dots, F_1^{(1)})$$

で定義する。

$$\text{多項式写像 } S: \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ を}$$

$$S(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}, a_1^{(n-1)}, \dots, a_1^{(1)})$$

$$:= (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots, f_n^{(n)}, f_1^{(n-1)}, \dots, f_1^{(1)})$$

で定義する、ただし $f_j^{(i)}$ は次で与えられるもの:

$$\begin{aligned} & (\lambda - a_1^{(i)})(\lambda - a_2^{(i)}) \cdots (\lambda - a_i^{(i)}) \\ &= \lambda^i - f_1^{(i)} \lambda^{i-1} + \cdots + (-1)^i f_i^{(i)} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ の部分集合 (凸角領域) D を

$$D := \left\{ (a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}, a_1^{(n-1)}, \dots, a_1^{(1)}) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \mid \right.$$

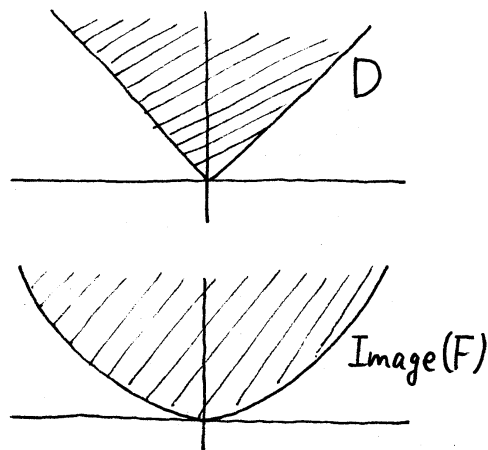
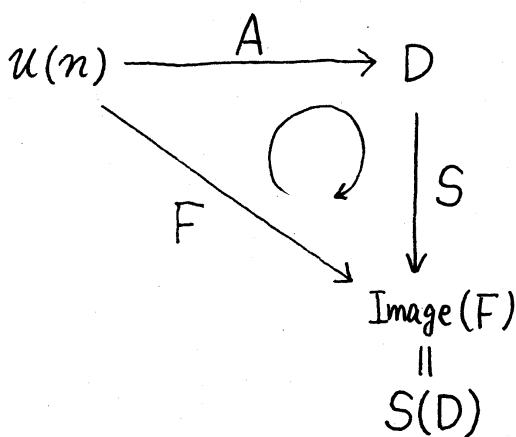
$$\left. a_{j-1}^{(i)} \leq a_{j-1}^{(i-1)} \leq a_j^{(i)}, 2 \leq j \leq i \leq n \right\}$$

で定義する。

命題 4. (1) $D = \text{Image}(A)$

(2) $S|_D : D \longrightarrow S(D)$ は同相写像

(3) $F = S \circ A$



系. $\{F_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$ は函数的に (従って代数的にも) 独立である。

証明. D は $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ の開集合 ($\neq \emptyset$) を含み、 $S|_D$ は同相写像であるから、 $S(D) = \text{Image}(F)$ も $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ の開集合 ($\neq \emptyset$) を含む。 $F_j^{(i)}$ は実解析的であるから

$$dF_1^{(n)} \wedge dF_2^{(n)} \wedge \cdots \wedge dF_n^{(n)} \wedge dF_1^{(n-1)} \wedge \cdots \wedge dF_1^{(1)} \neq 0 \quad \text{a.e.}$$

を得る。

$G = SO(n)$ の場合: B としては $B(X, Y) := -\text{tr}(XY)$ をとる。 $\mathfrak{so}(n)$ 上の fundamental invariants $F_{2j}^{(n)} \in S(\mathfrak{so}(n))$ ($1 \leq j \leq r$, $r := [\frac{n}{2}]$) は、

$$\det(E_n + \lambda X) = \begin{cases} 1 + F_2^{(n)}(X)\lambda^2 + \cdots + F_{2r-2}^{(n)}(X)\lambda^{2r-2} + F_{2r}^{(n)}(X)\lambda^{2r} \\ \quad (n; \text{奇数のとき}) \\ 1 + F_2^{(n)}(X)\lambda^2 + \cdots + F_{2r-2}^{(n)}(X)\lambda^{2r-2} + (F_{2r}^{(n)}(X))^2 \lambda^{2r} \\ \quad (n; \text{偶数のとき}) \end{cases}$$

で与えられる。

$$Z(\mathfrak{so}(n)) = \mathbb{R}[F_2^{(n)}, F_4^{(n)}, \dots, F_{2r}^{(n)}]$$

である。 $\mathfrak{so}(n)$ の subalgebra の列: $\mathfrak{so}(n) \supset \mathfrak{so}(n-1) \supset \cdots \supset \mathfrak{so}(2)$ および直交射影 $\pi_i: \mathfrak{so}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(i)$ を考える。 $U(n)$ の場合と同様にして次を得る。

$$\text{命題 3'. } \Lambda(\mathfrak{so}(n)) := \mathbb{R}[F_{2j}^{(i)} \mid 1 \leq j \leq [\frac{i}{2}], 2 \leq i \leq n]$$

は (maximal) commutative Poisson subalgebra in $S(\mathfrak{so}(n))$ である。

$\mathfrak{so}(n)$ 上の実数値連続関数 $A_j^{(i)}$ ($1 \leq j \leq [\frac{i}{2}]$, $2 \leq i \leq n$) を

$$\det(E_i + \lambda \pi_i(X)) = \prod_{j=1}^{[i/2]} (1 + (A_j^{(i)}(X))^2 \lambda^2),$$

$$A_1^{(i)} \geq A_2^{(i)} \geq \cdots \geq A_{[i/2]}^{(i)} \geq 0 \quad (i; \text{奇数のとき})$$

$$\left. \begin{aligned} A_1^{(i)} \geq A_2^{(i)} \geq \cdots \geq A_{[i/2]-1}^{(i)} \geq |A_{[i/2]}^{(i)}| \\ A_1^{(i)} A_2^{(i)} \cdots A_{[i/2]}^{(i)} = F_{2[i/2]}^{(i)} \end{aligned} \right\} (i; \text{偶数のとき})$$

で定義する。

$$d := \sum_{i=2}^n [\frac{i}{2}] = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} + [\frac{n}{2}] \right)$$

とおき 連続写像 $A: \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathbb{R}^d$ 、多項式写像 $F: \mathfrak{so}(n) \rightarrow \mathbb{R}^d$ を $U(n)$ の場合と同様に定義する。

多項式写像 $S: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$S(a_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq [\frac{i}{2}], 2 \leq i \leq n)$$

$$:= (f_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq [\frac{i}{2}], 2 \leq i \leq n)$$

で定義する、ただし $f_j^{(i)}$ ($1 \leq j < \frac{i}{2}$) は $(\chi_1^{(i)})^2, \dots, (\chi_{[i/2]}^{(i)})^2$ の j -th fundamental polynomial とし、更に i が

偶数のときには $f_{i/2}^{(i)} := a_1^{(i)} \cdots a_{i/2}^{(i)}$ とする。

$\mathbb{R}^d$ の部分集合 (凸角領域) D を

$$D := \left\{ (a_j^{(i)}) \in \mathbb{R}^d \mid a_1^{(i)} \geq a_1^{(i-1)} \geq a_2^{(i)} \geq a_2^{(i-1)} \geq \cdots \geq a_{[(i-1)/2]}^{(i)} \geq |a_{[i/2]}^{(i-1)}| \quad (i; \text{奇数のとき}), \right. \\ \left. a_1^{(i)} \geq a_1^{(i-1)} \geq a_2^{(i)} \geq a_2^{(i-1)} \geq \cdots \geq a_{[(i-1)/2]}^{(i-1)} \geq |a_{i/2}^{(i)}| \quad (i; \text{偶数のとき}), \quad 2 \leq i \leq n \right\}$$

で定義する。このとき、命題 4 およびその系と同様の事実が成り立つ。

§ 3. Moment map

M を Riemann 多様体、 G を Lie 群、 $\mathfrak{g}$ をその Lie algebra とする。 $\varphi: G \times M \rightarrow M$ を C^∞ -action とする。 $X \in \mathfrak{g}$ に対して、 M 上の vector field $\tilde{X}$ が

$$\tilde{X}_m f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \varphi(e^{tX}, m), \quad \forall f \in C^\infty(M), \forall m \in M$$

によって定義される。 TM と T^*M 、 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ をそれぞれ同一視する。 φ は symplectic action $\Phi: G \times TM \rightarrow TM$, $\Phi_g = (\varphi_{g^{-1}})^*$, を引き起こす。

補題 5. Φ の moment map $\mu: TM \rightarrow \mathfrak{g}^*$ は $B(\mu(v), X) = (v | \tilde{X}_m)$, $\forall v \in T_m M, \forall X \in \mathfrak{g}$, と与え

られる。 μ は C^∞ -写像である。

補題 6 (Guillemin-Sternberg [1], P231 参照).
pull-back $\mu^*: C^\infty(\mathfrak{g}) \longrightarrow C^\infty(TM)$ は Poisson algebra の準同型である。

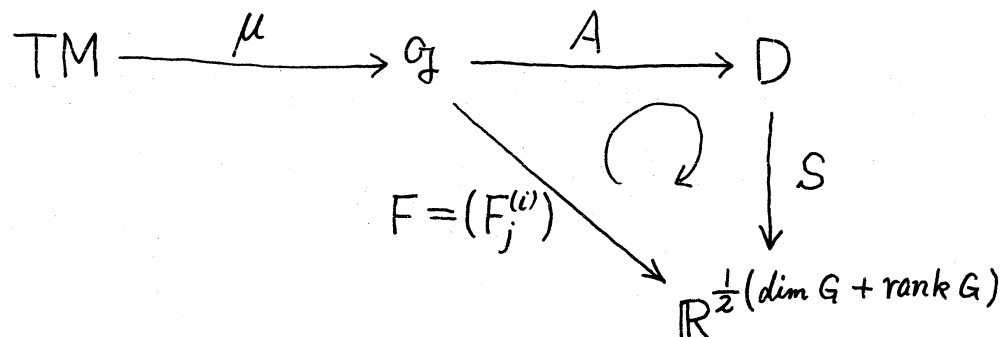
以下、 $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ は Ad -不変、正定値な symmetric bilinear form とする。 K を G の閉部分群、 $\mathfrak{k}$ をその Lie algebra とする。 $\mathfrak{m} := \mathfrak{k}^\perp$ とおく。等質空間 $M := G/K$ も考える。 $\pi: G \longrightarrow M$ を射影とする。 M の Riemann 計量 (1) は B から誘導されたものとする。 $\varphi: G \times M \longrightarrow M$ を $\pi \circ L_g = \varphi_g \circ \pi$ で定義する。

補題 7. φ によって引き起こされる symplectic action $\Phi: G \times TM \longrightarrow TM$ の moment map $\mu: TM \longrightarrow \mathfrak{g}$ は $\mu(\varphi_g * \pi_*(X)) = \text{Ad}_g(X)$, $X \in \mathfrak{m}$, $g \in G$, で与えられる。

§ 4. 対称空間

M を主定理にある対称空間とし、 G を対応する Lie 群と

する。



μ による $F_j^{(i)}$ の pull-back により、TM 上の実解析的函数 $f_j^{(i)} := F_j^{(i)} \circ \mu \in C^\infty(TM)$ が得られる。命題 3、命題 3' および補題 6 により $\{f_j^{(i)}\}$ は Poisson 可換である。各々の M について $\text{Image}(A \circ \mu)$ を調べることに よって $\{f_j^{(i)}\}$ の中から独立なものを選び出すことが出来る。

$$\begin{aligned}
 & \text{(I) 複素 Grassmann 多様体 } M = G_{p, \ell}(\mathbb{C}) \\
 & = U(n)/U(p) \times U(\ell) \quad (1 \leq p \leq \ell, p + \ell = n)
 \end{aligned}$$

補題 8.

$$\begin{aligned}
 \text{Image}(A \circ \mu) = \{ (a_j^{(i)}) \in D \mid & a_i^{(n)} + a_{n-i+1}^{(n)} = a_j^{(n)} = 0, \\
 & 1 \leq i \leq p, p < j \leq n-p \}
 \end{aligned}$$

定理 9. TM 上の次の $2p\ell (= \dim M)$ 個の

函数は函数的に独立である。

$$f_{2j}^{(n)} \quad (1 \leq j \leq p),$$

$$f_j^{(i)} \quad (2p \leq i < n, 1 \leq j \leq 2p),$$

$$f_j^{(i)} \quad (1 \leq i < 2p, 1 \leq j \leq i).$$

これ以外の $f_j^{(i)}$ は恒等的に 0 である。

M の energy 函数 H_M は定数倍を無視して $f_2^{(n)}$ に一致する。他の対称空間についても $H_M \in \mathbb{R}[f_2^{(n)}]$ または $H_M \in \mathbb{R}[f_1^{(n)}, f_2^{(n)}]$ である。

系. 複素 Grassmann 多様体上の geodesic flow は完全積分可能である。

$$(II) \ M = SU(n)/SO(n)$$

補題 10.

$$\text{Image}(A \circ \mu) = \{(a_j^{(i)}) \in D \mid a_1^{(n)} + \cdots + a_n^{(n)} = 0\}$$

定理 11. TM 上の $f_1^{(n)}$ 以外の $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ ($= \dim M$) 個の $f_j^{(i)}$ は函数的に独立である。 $f_1^{(n)}$ は恒等的に 0 である。

$$(III) \quad M = SU(2n)/Sp(n)$$

補題 12.

$$\text{Image}(A \circ \mu) = \{(a_j^{(i)}) \in D \mid a_{2i-1}^{(2n)} = a_{2i}^{(2n)}, 1 \leq i \leq n\}$$

定理 13. TM 上の次の $n(2n-1)-1 (= \dim M)$ 個の関数は函数的に独立である。

$$f_i^{(2n)} \quad (1 < i \leq n),$$

$$f_i^{(2n-1)} \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$f_j^{(i)} \quad (1 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq i).$$

これ以外の $f_j^{(i)}$ は上記の関数の多項式として表わせる。

$$(IV) \quad M = G_{p,q}(\mathbb{R}) = SO(n)/S(O(p) \times O(q))$$

$$(1 \leq p \leq q, p+q=n)$$

補題 14.

$$\text{Image}(A \circ \mu) = \{(a_j^{(i)}) \in D \mid a_j^{(n)} = 0, p < j \leq [\frac{n}{2}]\}$$

定理 15. TM 上の次の $pq (= \dim M)$ 個の関数は函数的に独立である。

$$f_{2j}^{(i)} \quad (2p \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p),$$

$$f_{2j}^{(i)} \quad (2 \leq i < 2\rho, 1 \leq j \leq [\frac{i}{2}]).$$

これ以外の $f_j^{(i)}$ は恒等的に 0 である。

$$(V) \quad M = SO(2n)/U(n)$$

補題 16.

$$\text{Image}(A \circ \mu)$$

$$= \begin{cases} \{(a_j^{(i)}) \in D \mid a_{2j-1}^{(2n)} = a_{2j}^{(2n)}, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} & (n; \text{偶数のとき}) \\ \{(a_j^{(i)}) \in D \mid a_{2j-1}^{(2n)} = a_{2j}^{(2n)}, 1 \leq j \leq [\frac{n}{2}], \chi_n^{(2n)} = 0\} & (n; \text{奇数のとき}) \end{cases}$$

定理 17. TM 上の次の $n(n-1)$ ($= \dim M$) 個の関数は関数的に独立である。

$$f_{2j}^{(2n)} \quad (1 \leq j \leq [\frac{n}{2}]),$$

$$f_{2j}^{(2n-1)} \quad (1 \leq j \leq [\frac{n-1}{2}]),$$

$$f_{2j}^{(i)} \quad (2 \leq i \leq 2n-2, 1 \leq j \leq [\frac{i}{2}]).$$

$$(VI) \quad M = SU(n)$$

この場合には、群 $SU(n) \times SU(n)$ の M 上の action

$$\varphi: (SU(n) \times SU(n)) \times M \longrightarrow M; \quad \varphi((g, h), x) := gxh^{-1}$$

を考える。対応する moment map $\mu: TM \longrightarrow \mathfrak{su}(n) \times \mathfrak{su}(n)$

は $\mu(L_{x*}(X)) = (Ad_x(X), -X)$, $x \in M$, $X \in \mathfrak{su}(n)$,
で与えられる。

補題 18.

$$\text{Image}((A \times A) \circ \mu) = \{ (a_j^{(i)}, \ell_j^{(i)}) \in D \times D \mid \\ a_j^{(n)} + \ell_{n-j+1}^{(n)} = 0, 1 \leq j \leq n \}$$

$\mu_1, \mu_2 : TM \rightarrow \mathfrak{su}(n)$ を $\mu(v) = (\mu_1(v), \mu_2(v))$,
 $v \in TM$, で定義する。 $f_j^{(i)} := F_j^{(i)} \circ \mu_1$, $g_j^{(i)} := F_j^{(i)} \circ \mu_2$
と置く。

定理 19. TM 上の次の $n^2 - 1$ ($= \dim M$) 個の関
数は函数的に独立である。

$$\begin{aligned} f_j^{(n)} & \quad (2 \leq j \leq n), \\ f_j^{(i)} & \quad (1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq i), \\ g_j^{(i)} & \quad (1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq i). \end{aligned}$$

(VII) $M = SO(n)$

$SU(n)$ の場合と同様にして次を得る。

補題 20.

$$\begin{aligned}
 & \text{Image}((A \times A) \cdot \mu) \\
 = & \begin{cases} \left\{ (a_j^{(i)}, \varrho_j^{(i)}) \in D \times D \mid a_j^{(n)} = \varrho_j^{(n)}, 1 \leq j \leq \left[\frac{n}{2} \right] \right\} \\ \qquad \qquad \qquad (n; \text{奇数のとき}) \\ \left\{ (a_j^{(i)}, \varrho_j^{(i)}) \in D \times D \mid a_j^{(n)} = \varrho_j^{(n)}, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}, \right. \\ \qquad \qquad \left. a_{n/2}^{(n)} = -\varrho_{n/2}^{(n)} \right\} \quad (n; \text{偶数のとき}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

定理 21. TM 上の次の $\frac{n(n-1)}{2}$ ($= \dim M$) 個の関数は函数的に独立である。

$$\begin{aligned}
 & f_{2j}^{(n)} \quad (1 \leq j \leq \left[\frac{n}{2} \right]), \\
 & f_{2j}^{(i)} \quad (2 \leq i < n, 1 \leq j \leq \left[\frac{i}{2} \right]), \\
 & g_{2j}^{(i)} \quad (2 \leq i < n, 1 \leq j \leq \left[\frac{i}{2} \right]).
 \end{aligned}$$

文 献

- [1] V. Guillemin - S. Sternberg, The moment map and collective motion, Ann. Phys. 127 (1980), 220-253.
- [2] K. Ii - S. Watanabe, Complete integrability of the geodesic flows on symmetric spaces (to appear).

- [3] B. Kostant, The solution to a generalized Toda lattice and representation theory, Adv. Math. 34 (1979), 195-338.
- [4] A.S. Mishchenko, Integration of geodesic flows on symmetric spaces, Math. Notes, 31 (1982), 132-134.
- [5] A. Thimm, Über die Integrabilität geodätischer Flüsse auf homogenen Räumen, Dissertation, Bonn, 1980.