

複素射影平面上の安定主束

広大理 土井 英雄 (Hideo Doi)

0. 入 門

この報告は、岡井孝行 (広大理) 氏との共同研究に基づくものである。

Yang-Mills 場の理論において、一階の微分方程式によって定まる対象は、幾何学的扱いが可能であり、豊かな構造をもっている。Kähler 多様体上の、反自己双対接続の一般化である Einstein 接続の理論は、vector 束の moduli の局所的な研究には有効である。Narasimhan & Seshadri 氏による Riemann 面上の unitary vector 束の理論は、微分幾何学的に再構成されている、 $[D_1] + [AB]$ 。高次元版として、「安定 vector 束は、Einstein 計量をもつか？」——小林 Hitchin 予想、が、Donaldson 氏、Uhlenbeck & Yau 氏により、肯定的に解決されている。この小論では、構造群が一般の場合でも、Einstein 接続と安定主束に対して 小林 Hitchin 予想 が成立することを示す。これは Riemann 面上の安定主束に対する結果 $[R], [AB]$ の一般化になっている。

複素二次元多様体上の安定束の理論は、 SU_2 -Yang-Mills 場の存在に関する Taubes 氏の一般的結果を補ってくれることが期待される。Lübke & Okonek 氏は、楕円曲面上の SU_2 束に対し成果を上げている。ここでは、別の方向——構造群を大きくすること を考える。 CP^2 上の Fubini-Study 計量に関する 自己双対接続は、Buchdahl 氏によって詳しく研究されているので、相補するものとして、反自己双対接続を扱ってみた。[AHS] 流の変形法 と

伊藤光弘氏

John E. 50

↓

Credence Millson

伊藤光弘氏による moduli の存在定理を用いることにより、いくつかの Lie 群に対して、存在条件を決定することができた。

G を連結な compact Lie 群とする。 CP^2 上の主 G 束に対し、指数を、 G が連結単群の場合には、 SU_2 還元 の第 2 Chern 数、 $G = SO_n$ の場合には、付随する C^n 束の第 2 Chern 数 として定義する。主 G 束上の接続に対し、その holonomy 群が G であるとき 固有 G 接続 ということにする。

(0.1) $M_k G := CP^2$ 上の 指数 k の 固有反自己双対 G 接続の moduli 空間 とおく。

$$(0.2) \quad 2 \leq n \leq 5 \text{ に対し, } M_k SU_n \neq \emptyset \iff k \geq n$$

$$(0.3) \quad n \geq 1 \quad M_k Sp_n \neq \emptyset \iff k \geq 2n$$

$$(0.4) \quad n \geq 7 \quad M_k Spin_n \neq \emptyset \iff 2k \geq n$$

$$(0.5) \quad M_k F_4 \neq \emptyset \iff k \geq 5$$

$$(0.6) \quad M_k E_6 \neq \emptyset \iff k \geq 5$$

$$(0.7) \quad M_k G_2 \neq \emptyset \iff k \geq 4$$

$$(0.8) \quad M_k SO_3 \neq \emptyset \iff k = 8 + 4n, 3 + 4n \quad n \geq 0$$

$$(0.9) \quad M_k SO_4 \neq \emptyset \iff k = 5, k \geq 7$$

$$(0.10) \quad M_k SO_5 \neq \emptyset \iff k = 5, k \geq 7$$

$$(0.11) \quad M_k SO_6 \neq \emptyset \iff k \geq 7$$

$$(0.12) \quad n \geq 7 \quad M_k SO_n \neq \emptyset \iff k \geq n$$

なお、 SU_5, E_7, E_8 に対しては、素朴な変形法は非力なようである。

1. Einstein 還元

G_c を連結・簡約・線形代数群、 $E \rightarrow M$ を複素多様体上の正則主 G_c 束とする。 G_c の閉部分群 S に対し M 上の主 S 束 $E_S \hookrightarrow E$ を E の S 還元という。fiber 束 $Y \rightarrow X$ の C^∞ 切断全体を $\Gamma(X, Y)$ と表す。 E の S 還元と $\Gamma(M, E/S)$ の元を自然な対応で同一視する。 G を G_c の compact な実形とすると、 E の G 還元が存在する。また G 還元 E_G 上の接続形式で、 E の接続形式に拡張すると、 $(1,0)$ 形式になるものが、一意的に存在する。これを G 還元で定める Hermitian 接続と呼ぶ。埋め込み $\nu: G_c \hookrightarrow GL_N$ を固定し、 $E \times_{\nu} C^N$ に誘導される共変微分と E_G, E 上の接続を同一視する。 M を n 次元 Kähler 多様体、 ω をその Kähler 形式——計量 $g_{\alpha\bar{\beta}} dx^\alpha d\bar{x}^\beta$ に対し、 $\omega = i g_{\alpha\bar{\beta}} dx^\alpha d\bar{x}^\beta$ とする。 (p, q) 形式 $\wedge^{p,q} = \wedge^{p,q} M$ 上の Hermite 計量は、 $\theta_1, \dots, \theta_n$ を $\wedge^{1,0}$ の正規直交基底とすると、 $\theta_{\alpha_1} \dots \theta_{\alpha_p} \bar{\theta}_{\beta_1} \dots \bar{\theta}_{\beta_q}$ が正規直交基底になるように定める。 $\wedge: \wedge^{p,q} \rightarrow \wedge^{p+1,q-1}$ を $\omega \wedge: \wedge^{p+1,q-1} \rightarrow \wedge^{p,q}$ の adjoint とする。例えば、 $\wedge(\theta_\alpha \bar{\theta}_\beta) = -i \delta_{\alpha\bar{\beta}}$ である。

$E_G \hookrightarrow E$ の定める Hermitian 接続 D に対し、 $R = D \circ D$ 曲率、 $K = i \wedge R$ 平均曲率 とおく。 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ 、 G の中心 Z の Lie 環を $\mathfrak{z}$ 、 $Z_c, \mathfrak{g}_c, \mathfrak{z}_c$ を複素化とする。 $M \times_{\mathfrak{z}_c} \hookrightarrow E \times_{\text{Ad } \mathfrak{g}_c}$ に注意して、 $K \in \Gamma(M, M \times_{\mathfrak{z}_c})$ であるとき、 D を弱 Einstein 接続、さらに K が定値 $\in \mathfrak{z}_c$ であるとき、 D を Einstein 接続と呼ぶ。これに応じて E_G は、(弱) Einstein 還元と言われる。

接続全体は、基準点を設けることにより線形空間とみなすことができた。同様に、 G 還元全体は、対称空間とみなすことができる。 $E_G \hookrightarrow E$ を固定すると、 $E/G = E(G_c/G) =$

$E_G(G_0/G) \xrightarrow{\sim} E_G \times_{\text{Ad}} \exp i\mathfrak{g}$. ここで最後の同型は, G_0 の G に関する共役 τ を用いて $G_0/G \xrightarrow{\sim} \exp i\mathfrak{g}$, $gG \rightarrow (\tau g) \cdot g^{-1}$ により誘導されるものである. また主束からの誘導束 $Q \times_P V$ は, 作用 ρ が明白であるとき, $Q(V)$ と書く.

(1.1) D を $E_G \hookrightarrow E$ の定める Hermitian 接続とする. 共変微分を $\nabla^1_M = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$ に応じて $D = D' + D''$ と分けるとき, $h \in \mathcal{P}(M, E_G \times_{\text{Ad}} \exp i\mathfrak{g}) = \mathcal{P}(M, E/G)$ の定める Hermitian 接続は, $D_h = D + h^* D' h$ で与えられる.

$\sigma \in \mathcal{P}(M, E/G)$ の定める Hermitian 接続を D_σ とする. $a \in \mathcal{P}(M, M \times i\mathbb{R})$ に対し, $\bar{e}^{a/2} \sigma \in \mathcal{P}(M, E/G)$ の定める Hermitian 接続は, $D_\sigma + d'a$, $d = d' + d''$ M 上の外微分, 平均曲率は, $K_\sigma + \square a$, K_σ は D_σ の平均曲率, $\square = \delta'd' + d'\delta' = \delta''d'' + d''\delta''$ となる. したがって, M を compact Kähler 多様体, 以下常に仮定する, とするとき,

(1.2) $\sigma \in \mathcal{P}(M, E/G)$ が弱 Einstein 還元 $\Rightarrow \exists a \in \mathcal{P}(M, M \times i\mathbb{R})$ s.t. $\bar{e}^{a/2} \sigma$ が Einstein 還元.

系として

(1.3) E が Einstein G 還元をもつ $\iff E/\mathbb{Z}_c$ が Einstein $G/\mathbb{Z}$ 還元をもつ.

$\mathfrak{g}$ 上に, 負定値 G 不変対称形式 $(,)$ で, $\mathfrak{g}^\perp = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 上では Killing 形式に一致するものを固定し, $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上に, 複素線形に延長する. $\langle, \rangle := -(, \tau)$ とおくと $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上の正定値 Hermitian 形式であり, $i\mathfrak{g}$ 上では, $\langle, \rangle = (,)$ となっている. $(,)$ は, $E \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上

の対称双線形形式を, $\langle, \rangle$ は $E \times_{\text{Ad } G_c} E = E \times_{\text{Ad } G_c} E$ 上の Hermitian 計量を自然に定めるので, それぞれ 同じ記号で表す. ただし $\langle, \rangle$ は G 還元 の取り方に依存することに注意しておく. $\sigma \in \Gamma(M, E/G)$ に対し,

$$J(\sigma) = \frac{1}{2} \int_M |K(\sigma)|^2 \, \Omega^n = \frac{1}{2} \int_M \|K(\sigma)\|^2 \, \Omega^n$$

とおく. ここで $|K(\sigma)|^2 = (K(\sigma), K(\sigma))$, $\|K(\sigma)\|^2 = \langle K(\sigma), K(\sigma) \rangle$... σ に対応する G 還元 を用いる. $E(G_c) := E \times_{\text{Ad } G_c} E = M \times \mathfrak{g}_c + E \times_{\text{Ad } G_c} \mathfrak{g}_c'$ に応じて, $E(G_c)$ 値の微分形式 ϕ を $\phi = \phi_{\mathfrak{g}} + \phi_{\mathfrak{g}'}$ と分解する.

$$(1.4) \quad \sigma \in \Gamma(M, E/G) \text{ に対し } \zeta = \int_M K(\sigma)_{\mathfrak{g}} \, \Omega^n \in \mathfrak{g}_c \text{ とおくと,}$$

$$J(\sigma) \geq |\zeta|^2 \left(2 \cdot \int_M \Omega^n \right)^{-1}$$

であり, 等号が成立するのは σ が Einstein 還元 のときに限る.

E の Hermitian 接続の曲率 R に対し, $R_{\mathfrak{g}}$ は, 代数的 torus を fiber とする 主束 E/G_c' , $G_c' = [G_c, G_c]$ 交換子群, の vector 値の第 1 Chern 類, のようなものであり $R_{\mathfrak{g}} \, \Omega^{n-1} = \Delta R_{\mathfrak{g}} \cdot \Omega^n/n$ であるから, (1.4) の不等式の右辺は, E の位相同型類と, 対称形式 $\langle, \rangle$ と Ω^n の cohomology 類 だけに依存する 定数である.

(1.5) $E_G \hookrightarrow E$ の定める Hermitian 接続を D , 平均曲率を K とする. E_G を通る G -還元 C^∞ 族 $h_t \in \Gamma(M, E_G \times_{\text{Ad}} \exp i\mathfrak{g})$, $h_0 = 1$ により与えられているとする.

このとき

$$\partial_t J(h_t)|_{t=0} = \int_M \langle D'v_0, D'K \rangle \otimes \mathbb{C}^n, \quad v_t := h_t^{-1} \partial_t h_t.$$

ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, $E_G \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上の内積と, M の計量によって定義される Hermite 形式 $\wedge^{p,q} \otimes E(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \times \wedge^{p,q} \otimes E(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ である. したがって,

$$(1.6) \quad E \text{ の } G\text{-還元 } E_G \text{ が } J(\cdot) \text{ の臨界点} \iff DK = 0.$$

さらに詳しく,

(1.7) 定理 E_G を $J(\cdot)$ の臨界 G -還元とすると, G の subtorus の中心化群 L と, E の正則 $L_\mathbb{C}$ -還元 E' と, E' の Einstein L -還元 E'_L で, $\Gamma(M, E/L) \rightarrow \Gamma(M, E/G)$ により, $E'_L \rightarrow E_G$ となっているものが存在する.

$(\cdot, \cdot): \mathfrak{g}_\mathbb{C} \times \mathfrak{g}_\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は, 自然に双線形写像 $\wedge^{p,q} \otimes E(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \times \wedge^{r,s} \otimes E(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \rightarrow \wedge^{p+r, q+s}$ を定義するので, これも $(\cdot, \cdot)$ と書く. E_G 上の Hermitian 接続 D の曲率 R , 平均曲率 K に対し,

$$(1.8) \quad 8\pi^2 n(n-1) \cdot c_2(E(\mathfrak{g}_\mathbb{C})) \cdot \mathbb{C}^{n-2} = (\|R_S\|^2 - \|K_S\|^2) \cdot \mathbb{C}^n,$$

$$(1.9) \quad n(n-1) (R_{\bar{S}}, R_{\bar{S}}) \cdot \mathbb{C}^{n-2} = (\|R_{\bar{S}}\|^2 - \|K_{\bar{S}}\|^2) \cdot \mathbb{C}^n.$$

$\sigma \in \mathcal{P}(M, E/G)$ に対して, $I(\sigma) = \frac{1}{2} \int_M \|R(\sigma)\|^2 \varpi^n$ とおく, σ に対応する G 還元を E_G と考えている, このとき (1.8-9) より,

$$(1.10) \quad I(\sigma) - J(\sigma) = n(n-1)/2 \cdot \int_M (8\pi^2 c_2(E(\mathfrak{g}_c)) - (R(\sigma)_3, R(\sigma)_3)) \varpi^{n-2}.$$

したがって $I(\sigma) - J(\sigma)$ は G 還元に依らない。ここでの扱いと立場を異にするが, Einstein 接続は Yang-Mills 接続であり, $I(\sigma), J(\sigma)$ を固定された主 G 束の Hermitian 接続達に対する汎関数として定義すれば, $I(\sigma) - J(\sigma)$ は定値である。また (1.8) より 次も容易にわかる。

(1.11) Lücke の不等式. E が 弱 Einstein G 還元をもつならば, $\int_M c_2(E(\mathfrak{g}_c)) \varpi^{n-2} \geq 0$. 等号が成立する $\iff E/E_c$ が平坦。

E の G 還元族 h_t を, $E_G \hookrightarrow E$ を固定し $E/G \xrightarrow{\sim} E_G \times_{\text{Ad}} \text{Exp}(\mathfrak{g})$ を通じて, $h_t \in \mathcal{P}(M, E \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}_c)$ と考えて, $h_t^{-1} \partial_t h_t \in \mathcal{P}(M, E \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}_c)$ を計算すると, $h_t^{-1} \partial_t h_t$ は, 基準点 E_G の取り方に依らないことがわかる。 φ を $\mathfrak{g}_c$ 上の G_c 不変な, 対称 p -線形形式とする。 $h, k \in \mathcal{P}(M, E/G)$ に対し, $h_t \in \mathcal{P}(M, E/G)$ を t について区分的に滑らかで $h_0 = k, h_1 = h$ であるようにとる。 $[D_2]$ に従い,

$$(1.12) \quad F(h, k) := -i p \int_0^1 \varphi(h_t^{-1} \partial_t h_t, R_t, \dots, R_t) dt, \quad R_t = h_t \text{ の曲率},$$

とおくと, $F(h, k)$ は $\Gamma(M, \wedge^{p_1, p_1}) / \langle \text{Im} d' + \text{Im} d'' \rangle$ の元とみるとき, h_t の取り方には依らず, $\partial_t F(h_t, k) = -ip \varphi(h_t^{-1} \partial_t h_t, R_t, \dots, R_t)$ である. また $i d'' d' F(h, k) = \varphi(R_h, \dots, R_h) - \varphi(R_k, \dots, R_k)$, R_h, R_k は h, k の曲率, となっている.

$\varphi_1 = -(, \text{eic}/n)$, $c \in i\mathbb{R}$, $\varphi_2 = -(,)$ から (1.12) によって F_1, F_2 を定義する. $h, k \in \Gamma(M, E/G)$ に対して,

$$\mathcal{L}(h, k) = \int_M F_1(h, k) \varpi^n + F_2(h, k) \varpi^{n-1},$$

とおく. $h_t \in \Gamma(M, E/G)$ が t について滑らかであるとし, $u_t := h_t^{-1} \partial_t h_t$ とおくと

$$\partial_t \mathcal{L}(h_t, k) = \int_M (u_t, K_t - c) 2\varpi^n/n.$$

したがって, G 還元が, $\mathcal{L}(, k)$ の臨界点 $\iff$ Einstein 還元. また,

$$\partial_t^2 \mathcal{L}(h_t, k) = \int_M (\partial_t u_t, K_t - c) 2\varpi^n/n + \int_M \|D'_t u_t\|_t^2 2\varpi^n/n,$$

ここに, D'_t は h_t の定める共変微分の $(1,0)$ 成分, $\| \cdot \|_t^2$ は h_t の定める $E \times_{\text{Ad } G_c}$ 上の Hermite 形式である. これより,

(1.13) 正則構造を固定するとき, E の Einstein G 還元 の個数は, 0 か 1 である.

汎関数 $L(\cdot, k)$ の勾配流を考える。 $c \in i\mathbb{R}$ に対し、 $h_t \in \mathcal{P}(M, E/G)$, $t \geq 0$ が $h_t^{-1} \partial_t h_t = -(K(h_t) - c)$ を満たすとき Einstein flow と呼ぶ。 h_t, k_t を同じ c に対する Einstein flow とする。 $f = f(t, s) \in \mathcal{P}(M, E/G)$ を $f(t, 0) = h_t, f(t, 1) = k_t, \partial_s(f^{-1} \partial_s f) = 0$ であるようにとる。 $D_f, \|\cdot\|_f^2$ を f に対応する G 変元の定める共変微分, $\Lambda^{1,0} \otimes E(q_c)$ 上の Hermité 計量とする。 $e = e(t) = \|f^{-1} \partial_s f\|_f^2$ に対して、 $\partial_t e + \square e = -\|D'_f(f^{-1} \partial_s f)\|_f^2$ である。したがって最大値原理により、

$$(1.14) \quad h_0 = k_0 \Rightarrow h_t = k_t, t \geq 0$$

Einstein flow の存在は、 $[D_2, D_3]$ の論法において、1つの鍵である。

(1.15) G_c を半単純 とする。 Einstein flow $h_t, h_t^{-1} \partial_t h_t = -K(h_t)$ が任意の初期値 $h_0 \in \mathcal{P}(M, E/G)$ に対して、 $0 \leq t < \infty$ で存在する。

これは、 $G_c \hookrightarrow GL_N$ Zariski 閉部分群 とするとき、 GL_N のある表現 $p: GL_N \rightarrow GL_m$ を用いて、 $G_c = \{g \in GL_N; p(g) \in 1 \times GL_{m-1} \subset GL_m\}$ と表されることと、(1.14)と GL_N 束について確立している存在定理 $[D_2], [小林]$ を用いれば たちちにわかる。

2. 安定主束

M を n 次元 射影多様体 とし、 Fubini-Study 計量 の制限により定義される Kähler 計

量を固定する。 P を G_c の放物部分群とする。 $\lambda \in \text{Hom}(P, \mathbb{C}^\times)$ は、 (i) $\lambda|_{Z_c^0} = 1$,
 (ii) P のある Borel 部分群 B と 極大torus $T_c \subset B$ に対し, $\langle \lambda|_{T_c}, \alpha \rangle \geq 0$, $\forall \alpha$
 B の root であるとき, P の 優指標、と呼ばれる。ここで t_c は T_c の Lie 環, $\langle, \rangle$
 は Killing 形式から定義される $\text{Hom}(t_c, \mathbb{C})$ 上の双線形形式である。代数的主束 E
 $\rightarrow M$ に対し, $M' \subset M$, Zariski 開, $\text{codim}(M \setminus M') \geq 2$ 上で定義された E の還元
 を 有理還元 と呼ぶ。 M 上の直線束 S に対し, $\deg(S) := \int_M c_1(S) \cup \omega^{n-1}$
 とおく。 [RR] に従い,

(2.1) 定義 代数的主 G_c 束 $E \rightarrow M$ は、 任意の 放物部分群 P と優指標
 $\lambda \neq 1$ と有理還元 E_P に対し, $\deg(E_P \times_\lambda \mathbb{C}) \leq 0$ であるとき 半安定, $\deg(E_P \times_\lambda \mathbb{C})$
 < 0 であるとき 安定 といわれる。 $E_P \times_\lambda \mathbb{C}$ は、元束 余次元 2 以上の部分集合を
 除いたところで定義された直線束であるが、 M 上に拡張してあると考える。

$\pi: E/P \rightarrow M$ の fiber に沿う接空間を $T_{G_c/P} := \ker \pi_*$, $\pi_* T(E/P) \rightarrow TM$,
 正則接空間, により定義する。 任意の 極大放物部分群 P と E/P の有理切断 σ に
 対して $\deg(\sigma^* \det T_{G_c/P}) \geq 0$, > 0 であることと E が 半安定, 安定 であること
 とは 同値になる。 また Borel 部分群 B を固定して, B を含む 放物部分群 について,
 "条件" が満たされていれは、明らかに、半安定、安定 となる。

G_c の放物部分群 P で Levi 分解 $P = L_c N$ において、 L_c が $L \subset G$ の複素化に
 なっているものとする。 E の G 還元 E_G と 正則 P 還元 E_P が与えられたとする。
 $E/P = E(G_c/P) = E_G(G_c/P) = E_G(G/L) = E_G/L$ であるから、 E_G の L 還元 E_L が

自然に得られる。 $E_L \hookrightarrow E_P/N = E_P(P/N) = E_P(L_c)$ により、 E_L 上に Hermitian 接続が定義される。この接続形式 ω_L は、 $E_G \hookrightarrow E$ の定める接続形式 ω_G を $E_L \hookrightarrow E_G$ により 1-形式として引き戻し、 $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{l}_c + \mathfrak{n} + \tau\mathfrak{n}$ に応じて $\mathfrak{l}_c$ 成分をとったものに一致する。ここで $\mathfrak{l}_c, \mathfrak{n}$ は L_c, N の Lie 環、 τ は G に関する共役である。 ω_L を $E_L(G_c) = E$ 上に拡張した接続形式も ω_L で表すとき、

(2.2) 命題、 $\omega_G - \omega_L = \beta + \tau\beta$, $\beta \in \Gamma(M, \Lambda^{0,1} \otimes (E_L \times_{\text{Ad}} \mathfrak{n}))$ という形である。 τ は、 $\Lambda^1 M \otimes (E_G \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}_c) \wedge$ 共役線形に拡張したものである。

(2.3) 定理、 $E \rightarrow M$ が Einstein G 還元をもつならば、放物部分群の Levi 部分群 L_c と E の正則 L_c 還元 E_{L_c} で、安定主 L_c 束であるものが存在する。

証明：放物部分群 P を上のようにとり、 $T_c \subset L_c$ を G の極大 torus の複素化とする。 P の重指標 $\lambda \neq 1$, 有理還元 E_P に対し、 $S_\lambda := E_P \times_\lambda \mathbb{C}$ とおく。(2.2) の β を $\beta = \sum \beta_\alpha$; $\beta_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ $\alpha \cdots N$ の root と分解すれば、

$$c_1(S_\lambda) \pm^{n-1} = - \sum \|\beta_\alpha\|^2 \langle \lambda, \alpha \rangle \pm^{n/2} \pi n .$$

したがって E は半安定である。 P を極大放物部分群とすれば、 $\text{deg } S_\lambda = 0 \Rightarrow \beta = 0$ 。“ $\beta = 0$ ” は、余次元 ≥ 2 の集合の外で E_G の Hermitian 接続は、 L 接続に還元できることを意味する。このとき E_G の holonomy 還元から誘導される E の L_c 還元は、明らかに正則還元である。ゆえに $\dim G_c$ に関する帰納法

により主張が従う。

小林・Hitchin 予想は、(2.3)の逆を問うわけである。

(2.4) $E \rightarrow M$ が安定ならば、 E は、Einstein G 還元をもつ。

(1.3)より G_c は、半単純として良い。(1.15)が確立しているので $[D_1, D_3]$ [MR]

[RR] より「 $\dim M = 1$ のとき $E(\eta_c)$ が Einstein 接続をもつとき E は、Einstein G 還元をもつか？」ということになる。これは、[AB]において証明されている。

3. CP^2 上の反自己双対接続

G の部分群 K は、その中心化群が G の中心と等しいとき 既約であるといわれる。主 G 束上の接続は、その holonomy 群が 既約であるとき、既約ということにする。反自己双対接続の研究において、伊藤光弘氏の結果は、基本的である。

(3.1) $[I_1, I_3]$. M を正の scalar 曲率をもつ Kähler 曲面とする。compact 半単純 Lie 群 G を fiber とする 主束 $Q \rightarrow M$ 上に、既約反自己双対接続 D が存在すると仮定する。このとき 複素次元が $c_2(Q \times_{Ad} \mathfrak{g}_c) - \dim G \cdot (\chi + \tau)/4$ の既約反自己双対接続の moduli が存在する。ここで χ は M の Euler 数、 τ は符号である。

Q_k を CP^2 上の指数 k の主 G 束として, $\mu_k G = c_2(Q_k \times_{Ad} \mathfrak{g}_G) - \dim G$ とおく。

$$(3.2) \quad \mu_k SU_n = 2nk - n^2 + 1$$

$$\mu_k E_6 = 24k - 78$$

$$\mu_k Sp_n = 2(n+1)k - n(2n+1)$$

$$\mu_k E_7 = 36k - 133$$

$$\mu_k Spin_n = 2(n-2)k - n(n-1)/2, n \geq 7$$

$$\mu_k E_8 = 60k - 248$$

$$\mu_k SO_n = (n-2)k - n(n-1)/2$$

$$\mu_k F_4 = 18k - 52$$

$$\mu_k G_2 = 8k - 14$$

変形理論を適用する初期値は,

$$(3.3) \quad \mathcal{M}_k SU_2 \neq \emptyset \iff k \geq 2, \quad \mathcal{M}_k SU_3 \neq \emptyset \iff k \geq 3$$

$$\mathcal{M}_k SO_3 \neq \emptyset \iff k = 8 + 4n, \quad 3 + 4n \quad n \geq 0.$$

SU_n $n=2,3$ については, 安定 SL_n 束の存在 [cf. H] より容易に導かれる。

CP^2 上の反自己双対 2 形式の空間 Λ^2 は, $\mathcal{M}_3 SO_3$ の元を定める。したがって $[I_2]$ により $n \geq 0$ に対し $\mathcal{M}_{3+4n} SO_3 \neq \emptyset$ 。また $SU_2/\{\pm 1\} = SO_3$ により, $\mathcal{M}_k SU_2 = \mathcal{M}_{4k} SO_3$ である。

$$(3.4) \quad CP^2 \text{ 上の安定 } SL_n \text{ 束に対し } c_2 \geq n.$$

(3.5) G_i $i=1,2$ 連結単純 Lie 群, $Q_i \rightarrow M$ 主 G_i 束, D_i Q_i 上の固有接続
に対し $Q = Q_1 \times_M Q_2$, $D = D_1 \times D_2$, K を D の holonomy 群 とする。次の三つ

の場合には、 $K = G_1 \times G_2$ 。(i) G_1, G_2 の Lie 環が異なる。(ii) G_i の中心 $= \{1\}$ で $D_1 \neq D_2$ 。(iii) M, G_i が 1 連結で $D_1 \neq D_2$ 。

以上の準備の下に、“変形”の実際について述べる。

Sp_n (3.4)より $M_k Sp_n \neq \emptyset \Rightarrow k \geq 2n$. $Sp_1 = SU_2$ に注意して帰納的に存在を示す。 $Q_2 \in M_2 Sp_1, Q_{k-2} \in M_{k-2} Sp_{n-1}$ の fiber 積を Q とおけば (3.5)より、 Q 上には固有 $Sp_1 \times Sp_{n-1}$ 反自己双対接続 D が存在し、moduli の次元は $\mu = 2nk + 4 - 2n^2 - n$. Q の fiber を Sp_n に拡張すれば、指数 k の主束が得られる。このとき D は既約な Sp_n 接続に拡張されるので $\mu_k Sp_n - \mu > 0$ より $M_k Sp_n \neq \emptyset$.

$Spin_5 = Sp_2$ に注意すれば、 $Spin_6 = SU_4$ について、 $M_k SU_4 \neq \emptyset \Leftrightarrow k \geq 4$ がわかる。 $Spin_n, n \geq 7$ については、 $Spin_{n-1} \hookrightarrow Spin_n$ により帰納的にわかる。

F_4 の 26 次元既約表現 λ に対し $c_2(Q_k \times_\lambda \mathbb{C}^{26}) = 6k$, $Spin_9 \hookrightarrow F_4$ は最大次元の真部分群であり、 π_3 の同型を誘導する。 $\mu_k F_4 - \mu_k Spin_9 = 4(k-4)$ であるから (0.5) がわかる。 E_6 の 27 次元既約表現 λ に対し、 $c_2(Q_k \times_\lambda \mathbb{C}^{27}) = 6k$, $F_4 \hookrightarrow E_6$, G_2 の 7 次元既約表現 λ に対し $c_2(Q_k \times_\lambda \mathbb{C}^7) = 2k$, $SU_3 \hookrightarrow G_2$ を用いれば、(0.6), (0.7) が従う。

SO_4 束については、 $SO_3 \times SO_3$ 束からの持ち上げを調べれば良い。 $SO_n, n \geq 5$ については、 $SO_{n-1} \hookrightarrow SO_n$ により、帰納法が働く。(0.10), (0.11) における $k=6$ の欠落は、 $Sp_2 \rightarrow SO_5, SU_4 \rightarrow SO_6$ に由来するものである。

$SU_n, n \geq 6$ については、次のよく知られた事実からただちにわかる。

(3.6) SU_n の既約部分群で最大次元のものは $n = \text{偶数}$ のとき $Sp_{n/2}$,
 $n = \text{奇数}$ のとき SO_n .

参考文献

- [AB] M.F. Atiyah & R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* 308, 1982, 523-615.
- [AHS] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin & I.M. Singer, *Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry*, *Proc. Roy. Soc. London A* 362, 1978, 425-461.
- [B] N.P. Buchdahl, *Instantons on CP_2* , *J. Diff. Geometry*, 24, 1986, 19-52.
- [D₁] S.K. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri*, *J. Diff. Geometry*, 18, 1983, 269-278.
- [D₂] S.K. Donaldson, *Anti self dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, *Proc. London Math. Soc.* 50, 1985, 1-26.
- [D₃] S.K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, preprint.
- [H] K. Hulek, *On the classification of stable rank-r vector bundles over the projective plane* in *Vector Bundles and Differential Equations*, edited by A. Hirschowitz, PMT, Birkhäuser, 1980.
- [I₁] M. Itoh, *On the moduli space of anti self dual Yang-Mills connections on Kähler surfaces*, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 19, 1983, 15-32.
- [I₂] M. Itoh, *Self dual Yang-Mills equations and Taubes' Theorem*, *Tsukuba J. Math.* 8, 1984, 1-29.

- [I₃] M. Itoh, *The moduli space of Yang-Mills connections over Kähler surfaces is a complex manifold.* Osaka J. Math. 22, 1985, 845-862.
- [小林] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, 岩波書店, 1987.
- [小森] N. Koiso, *Yang-Mills connections and moduli space*, Osaka J. Math. 24, 1987, 147-171.
- [LO] M. Lübke & C. Okonek, *Stable bundles on regular elliptic surfaces*, J. reine angew. Math. 378, 1987, 32-45.
- [MR] V.B. Mehta & A. Ramanathan, *Restrictions of stable sheaves and representation of the fundamental group*, Invent. math. 77, 1984, 163-172.
- [R] A. Ramanathan, *Stable principal bundles on a compact Riemann surface*, Math. Ann. 213, 1975, 129-152.
- [RR] S. Ramanan & A. Ramanathan, *Some remarks on the instability flag*, Tôhoku Math. J. 36, 1984, 269-291.
- [UY] K. Uhlenbeck & S.T. Yau, *On the existence of Hermitian Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. Pure and Appl. Math. 39, Number S., 1986, 257-293.
- [T] C.H. Taubes, *Self dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix*, J. Diff. Geometry, 19, 1984, 517-560.