

融合積分解とその応用

大阪大 前田 亨 (Toru MAEDA)

群の融合積は、Van Kampen - Seifert の定理にみられるように、空間の基本群（よって、空間）の研究に於て基本的に重要なことは、知られている通りである。これは、融合積が、無限群の構造研究で、いかに中心的作用を示している。本稿では、次の 5 つの講演において、群の融合積、その意味での有限表示群の分解（特に、或る 1 つの部分群に関する既約因子への分解 — *star decomposition*）の基本問題と、それに関する幾つかの結果を述べる。結び目、絡み目理論等への応用が、後半で扱われる。

講演項目

講演 1 : *Amalgamated Decompositions*講演 2 : *Star Decompositions of Groups along splitting Cyclic Groups*講演 3 : *Existence of Factorizations for Links & Surfaces*講演 4 : *Group of Knot Groups*講演 5 : *A Note on Groups of Composite Knots*

有限群論は、単純群の分類の完成によって、その構造研究の第一段階を終えるという大成果を得た。一方、無限群論、特に有限表示群の構造論においては、分類不可能性が知られている ([1])。このような状況下で、有限表示群の構造研究の限界と方法を見い出すことが問題である。現時点で、私が、最も基本的にすべきだと思うことは、(I) 群の構成法と分解、(II) 群の表現論 である。そして、具体的に与えられた群の構造を明らかにする (重要な群の class の考察をする) ことである。

(I) の群の構成法のうち、中心的なものは、次の

3つである。

構成法 1 (群の正規拡大)

群 N, H と、写像 $\varphi: H \rightarrow \text{Aut } N$ $\xi: 1 \times H \rightarrow N$

$$\text{s.t.} \quad \varphi(v)(\varphi(u)(a)) = \xi(u, v)^{-1} \cdot \varphi(uv)(a) \cdot \xi(u, v)$$

$$\xi(uv, w) \cdot \varphi(w)(\xi(u, v)) = \xi(u, vw) \cdot \xi(v, w)$$

$$((1, 1) = 1, \quad a \in N, u, v, w \in H$$

が与えられたとき、集合 $G = H \times N$ に対し、積を、

$$(h_1, n_1) \cdot (h_2, n_2) = (h_1 \cdot h_2, \xi(h_1, h_2) \cdot \varphi(h_2)(n_1) \cdot n_2)$$

と定義すると、 G は群になる。これを N の 正規拡大、

または、 N の H による 拡大 といい、 $E(N, H, \varphi, \xi)$ と書く。

N は、写像 $n \rightarrow (1, n)$ により、自然に G の正規部分群として埋め込まれ、 $G/N \cong H$ である。

この方向からの群の分解が、“subnormal series”であり、有限群に対しては、Schröder の細分定理に基づく、composition series に関する Jordan-Hölder の定理が本質的である。重要な subnormal series としては、アーベル群との関係で、derived series や lower central series 等がある。

構成法 2 (HNN 拡大)

群 S と、その部分群 C 及び D 、更に、同型写像 $\psi: C \xrightarrow{\cong} D$ が与えられたとき、

$$G = S * \langle t: \rangle / \langle t^{-1} c t \psi(c^{-1}) \mid c \in C \rangle^{S * \langle t: \rangle}$$

(自由積 $S * \langle t: \rangle$ の、そこでの $\{t^{-1} c t \psi(c^{-1}) \mid c \in C\}$ の normal closure $\langle t^{-1} c t \psi(c^{-1}) \mid c \in C \rangle^{S * \langle t: \rangle}$ による商群) を、 S の HNN 拡大 といい、 $HNN(S, \psi)$ と書き表わす。 S は、 G の base group、 C, D は、associated subgroups と呼ばれる。 G は常に無限群である。

S は、自由積 $S * \langle t: \rangle$ に自然に埋め込まれるが、それは、 $S * \langle t: \rangle$ から G への自然な全準同型写像により、 $G = HNN(S, \psi)$ にも埋め込まれる。

よって、与えられた群 G が、その或る部分群 S に対し、 $G = HNN(S, \psi)$ となれば、 G は、 $HNN(S, \psi)$ と分解されたと言ってよいであろう。何故なら、 G の構造は、 S の構造と ψ の作用とで理解されるからである。与えられた群を、HNN 拡大の積み重ねとして、構造研究するのも、1つの方法であろう。

或る群 G が、ある部分群の HNN 拡大となっているとき、 G は、 HNN 拡大の構造をもつと呼ぶことにする。明らかに、これは、 G から、無限巡回群の上への準同型写像が存在する (i.e. G が、無限巡回群 $\langle t: \rangle$ による (splitting) extension になっている) ことと同値である。 $S \triangleleft HNN(S, \varphi)$ になるのは、 $S = C = D$ のとき。

Example 0.1 $T = \langle x: \rangle$, 無限巡回群, とし、 φ を、 $\varphi(x) = x^{-1}$ で与えられる T の自己同型写像とすると、群 $S = HNN(T, \varphi) = \langle x, y: y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ を得る。 S を T の $\langle y: \rangle$ による拡大 $E(T, \langle y: \rangle, \varphi, \xi)$, $\xi(y_1, y_2) = 1$, $y_1, y_2 \in \langle y: \rangle$, と考えてもよい。更に、 ψ を、 $\psi(x) = y$ で与えられる T から $\langle y: \rangle$ への同型写像とすると、 $G = HNN(S, \psi)$ を得る。 $t: y^{-1}xy = x^{-1}$, $t^{-1}xt = y \rangle = \langle x, t: t^{-1}x^{-1}tx t^{-1}xt = x^{-1} \rangle$ を得る。このとき、 G から無限巡回群上へのいかなる準同型写像の kernel も、有限生成群とはなれない。

構成法 3 (融合積)

群 A, B と、それぞれの部分群 C, D 、更に、同型写像 $\varphi: C \xrightarrow{\cong} D$ が与えられたとき、自由積 $S =$

$A * B$ の商群

$$G = A * B / \langle c \varphi(c^{-1}) \mid c \in C \rangle^{A * B}$$

を、 A と B の、 C (又は、 D) を融合部分群とする融合積といい、 $A *_\varphi B$ 又は、 $A \underset{C_i = \varphi(C_i)}{*} B$ (但し、 $\{C_i\}$ は、 C の生成系) と、書き表わす。明らかに、 $C = 1$ のとき、 A と B の自由積であり、 A と B は、自然に埋め込まれている。 A, B は、更に、 $S = A * B$ から G への自然な全準同型写像により、 G にも埋め込まれる。

Remark 0.2 融合積 $A *_\varphi B$ は、自由積 $A * B$ の HNN 拡大の商群 $HNN(A * B, \varphi) / \langle t \rangle^{HNN(A * B, \varphi)}$ 。

Remark 0.3 $G = A *_\varphi B$, $\varphi: C \xrightarrow{\cong} D$, が有限群になるのは、 A, B 共に有限群で、 $A = C$ 又は、 $B = D$ のときに限る。また、 $A \not\cong G$ となるのは、 $A = C$, $D \not\cong B$ のときに限る。

Example 0.4 $A = \langle x : x^4 = 1 \rangle$, $B = \langle y : y^6 = 1 \rangle$,
 $C = gp(x^2)$, $D = gp(y^3)$, $\varphi: C \xrightarrow{\cong} D$ を $\varphi(x^2) = y^3$ とすると、 $G = A *_\varphi B = A \underset{x^2=y^3}{*} B = \langle x, y : x^4 = y^6 = 1, x^2 = y^3 \rangle$

$x^2 = y^3 >$ 。この群 G を正規拡大の主場から見よう。
 $\mathbb{Z}_n$ を、位数 n の巡回群とする。 G の centre は、
 $gp(x^2) \cong \mathbb{Z}_2$ で、 $G/gp(x^2) \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ 。よって、 G は、
 $\mathbb{Z}_2$ の $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ による中心拡大となつてゐる。また、 y
 の G における normal closure $\langle y \rangle^G \cong \mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}_6$ で、 $G/\langle y \rangle^G$
 $\cong \mathbb{Z}_2$ であるから、 $\mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}_6$ の $\mathbb{Z}_2$ による拡大とみる
 ことも出来る。一方、 G の 1 次元 homology 群 $H_1(G) \cong$
 $G/[G, G]$ ($[G, G]$ は、 G の交換子群) は、 $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ と
 同型であるから、HNN 拡大の構造は有しない。

群が、HNN 拡大又は、融合積の構造をもつことの
 特徴付けが、次の通りになされている：

樹グラフに作用する、

任意の有限表示群は、2 次元複体又は、5 次元多様
 体の基本群として実現できる。このことから、有限表
 示群の研究と (compact) 多様体、複体の研究は、互い
 に深く掛り合つてゐる。例えば、構成法 1, 2, 3 は、
 多様体論の構成法で基本的な、ファイバー空間、mapping

forms, 連結和に, それぞれ対応している。

低次元多様体論においては、多様体の構造と、その基本群との関係は密接で、早くから、その重要性が知られていた。Walther [2] 等の仕事があり、近年では、Thurston の登来により、更に、その関係の意味、重要性を深めていることは、特記すべきであろう。そこにおいても、上記 3 つの構成法は、中心的であり、加えて、表現論の重要性も、本質的になって来た。表現は、有限単純群の分類で知られている置換群、Lie 群、更に、群環への表現であり、これにより、群の構造（部分群束、準同型、性質）が、1 つ 1 つ明らかになって来ている。勿論、それに対応する幾何学的構造でもある。

講演1 Amalgamated Decompositions

本講演の目的は、融合積を再定義し、それに基づく星型分解 (star decomposition) と、義と、そこでの基本問題を考えることにある。星型分解に関する細分定理、異なる星型分解の例、唯一分解の存在の十分条件等が与えられる。

§ 1. Amalgamations

A. Pairs

Definition 1.1 群 X に対し、

$$\mathcal{C}_X = \{ \langle G, \varphi \rangle \text{ (対)} \mid (1) G \text{ は群 } (2) \varphi: X \rightarrow G: \text{embedding} \}$$

と定義する。

Definition 1.2 $\langle G_1, \varphi_1 \rangle, \langle G_2, \varphi_2 \rangle \in \mathcal{C}_X$ に対し、 G_1

から G_2 への同型写像 h で、 $h \circ \varphi_1 = \varphi_2$ となるもの

が存在するとき、 $\langle G_1, \varphi_1 \rangle$ と $\langle G_2, \varphi_2 \rangle$ は同型で

あるといい、 $\langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle$ 、あるいは、

$h: \langle G_1, \varphi_1 \rangle \xrightarrow{\cong} \langle G_2, \varphi_2 \rangle$ と書き表わす。

明らかに、 $\cong$ は、 $\mathcal{C}_X$ 上の同値関係である。

$\mathcal{C}_X/\cong$ を、 $\mathcal{C}_X$ で、 $\langle G, \varphi \rangle$ の同型類を、 (G, φ) で書く。例えば、 $\mathcal{C}_{\{1\}}$ 。この場合には、 $\mathcal{C}_{\{1\}}$ で、 $\langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle$ と、 $G_1 \cong G_2$ は、同値であるから、 $\mathcal{C}_{\{1\}} =$ 抽象群全体の集り、と置いてよい。

Example 1.3 X を、 $\mathbb{Z}_3 = \langle s : s^3 = 1 \rangle$, 位数 3 の巡回群、とする。 $G = \mathbb{Z}_m = \langle t : t^m = 1 \rangle$, 位数 m の巡回群、とする。 $3 \nmid m$ ならば、 $\mathbb{Z}_m$ は $\mathbb{Z}_3$ を部分群に含まないから、 $\mathbb{Z}_m$ を群部分にもつ pair は、 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_3}$ には存在しない。 $m = 3m'$ ならば、 $\{1, t^{m'}, t^{2m'}\}$ は、 $\mathbb{Z}_m$ の唯一の位数 3 の部分群である。 $\mathbb{Z}_3$ には、唯一の外部自己同型写像 $p(s) = s^2$ がある。この p が導く $\{1, t^{m'}, t^{2m'}\}$ の同型写像が、 $\mathbb{Z}_m$ の自己同型に拡張されるか否かが、 $\mathbb{Z}_m$ を群部分にもつ pair を、 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_3}$ 中で考えるときには問題となる。 φ_m を、 $\varphi_m(s) = t^{m'}$ なる $\mathbb{Z}_3$ から $\mathbb{Z}_m$ への準同型写像とすると、 $2 \nmid m'$ のとき、 $\langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \circ p \rangle$ 、 $2 \mid m'$ のとき、 $\langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \rangle \neq \langle \mathbb{Z}_m, \varphi_m \circ p \rangle$ となる。 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_3}$ 中、 $\mathbb{Z}_m$ を群部分にもつ pair は、前者の場合、1 つ、後者の場合には、2 つ存在することになる。この様に、pair の考え方で、 G 中の X の埋め込

まれた像だけでなく、その埋め込まれ方までが重要となる。

Example 1.4 X を、 $\mathbb{Z} = \langle s: \rangle$ 、無限巡回群、かつ、 G も、無限巡回群 $\langle t: \rangle$ とする。自然数 m に対し、 φ_m を、 $\varphi_m(s) = t^m$ で定まる $\mathbb{Z}$ から G への準同型写像とする。このとき、 (G, φ_m) , $m=1, 2, \dots$ 、が、 C_X 中、無限巡回群を群部分にもつ全2の異なる pair を与えている。

以上、最も簡単な例を見たが、 X , G を種々考え、 φ をいろいろと取ることにより、興味ある例を、たくさん見付け、また、構成することか出来る。([3], 本講演 4, 5 も参照されたい。)

B. Product

Definition 1.5 群 X の1つの生成系を $\{x_i\}_{i \in I}$ とする (ここでは、便宜上、fix させておく)。 $\langle G_1, \varphi_1 \rangle$, $\langle G_2, \varphi_2 \rangle \in C_X$ に対し、

$$\langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle G_2, \varphi_2 \rangle = \langle G_1 * G_2, \varepsilon_1 \circ \varphi_1 (= \varepsilon_2 \circ \varphi_2) \rangle$$

$$\varphi_1(x_i) = \varphi_2(x_i)$$

と定義し、 $\langle G_1, \varphi_1 \rangle$ と $\langle G_2, \varphi_2 \rangle$ の融合積 (amalgamated product) と呼ぶ。 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は、それぞれ G_1, G_2 の

$G_1 * G_2$ への自然な埋め込み写像である。
 $\varphi_1(x_i) = \varphi_2(x_i)$

準定理 1.6 抽象群 X と、任意の $\langle G_k, \varphi_k \rangle \in \mathcal{C}_X$,

$k = 1, 2, 3, 4$ 、に対し、

$$(1) \quad \langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle G_2, \varphi_2 \rangle \in \mathcal{C}_X$$

$$(2) \quad \langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle X, id_X \rangle \cong \langle G_1, \varphi_1 \rangle$$

$$(3) \quad \langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle \text{ かつ } \langle G_3, \varphi_3 \rangle \cong \langle G_4, \varphi_4 \rangle$$

$$\text{ならば、} \langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle G_3, \varphi_3 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle * \langle G_4, \varphi_4 \rangle$$

証明。自明なので省略。

このことより、 $'*'$ は、 $\mathcal{C}_X$ の内部演算を定義し、
 $'\cong'$ は、この演算に対し、合同関係となる。(2) と合わせ2次を得る：

定理 1.7 抽象群 X に対し、 $\mathcal{C}_X$ は、積 $'*'$ に関し、単位元 (X, id_X) をもつ可換半群となる。

$$(G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) = (\langle G_1, \varphi_1 \rangle * \langle G_2, \varphi_2 \rangle)$$

を $(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) (\in C_X)$ の融合積と呼ぶ。

Remark 1.8 $X = \{1\}$ のとき C_X は、自由積に相当する。

C. Subclasses

現実の研究では、 C_X よりも、その或る条件を満たす subclass が、興味深かったり、重要である場合がほとんどである。そこで、積 ' $*$ ' と、subclass に関する自然ないくつかの定義と、基本的な subclass の例を幾つか述べることにする。

Definition 1.9 抽象群 X に対し、 C_X の subclass $\mathcal{D} \neq \emptyset$ が、(' $*$ ' に関して) closed であるとは、 $\mathcal{D}$ が、 C_X の上記半群構造に関して部分半群をなすこと。i.e.
 $(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in \mathcal{D}$ ならば、 $(G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in \mathcal{D}$ 。

Definition 1.10 C_X の (closed な) subclass $\mathcal{D}$ が、完全 (complete) であるとは、任意の $(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in C_X$ に対し、 $(G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in \mathcal{D}$ ならば、 $(G_1, \varphi_1),$

$(G_2, \varphi_2) \in \mathcal{D}$ となること。(このとき、明らかに、
 $(X, id_X) \in \mathcal{D}$ 。)

基本的な subclass を 4 つ定義しておく：

抽象群 X に対し、

$$FG_X = \{ (G, \varphi) \in C_X \mid G \text{ は、有限生成群} \}$$

$$FP_X = \{ (G, \varphi) \in C_X \mid G \text{ は、有限表示群} \}$$

$$NR_X = \{ (G, \varphi) \in C_X \mid \varphi(X) \triangleleft G \}$$

$$SP_X = \{ (G, \varphi) \in C_X \mid G \text{ の或る正規部分群 } N \text{ に対し、} \\ 1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} X \rightarrow 1 : \text{split} \}$$

とする。

準定理 1.11 (1) 任意の群 X に対し、

1) FG_X は、closed、

2) FG_X が complete $\iff X$ が、有限生成

準定理 1.12 (G. Baumslag [4])

FP_X が closed $\iff X$ が、有限生成群。

Remark 1.13 有限表示をもたない有限生成群 X 2、

$FP_X \neq \emptyset$ なるものがある。

準定理 1.14 任意の群 X に対し、 NR_X は、completely closed。

Note 1.15 $(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in NR_X$
 ならば、 $G/\varphi(X) \cong (G_1/\varphi_1(X)) * (G_2/\varphi_2(X))$ (自由積)。

準定理 1.16 任意の群 X に対し、 SP_X は、completely closed。

Note 1.17 $(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2) \in SP_X$.

$$1 \rightarrow N_1 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi_1} X \rightarrow 1 : \text{split}$$

$$1 \rightarrow N_2 \rightarrow G_2 \xrightarrow{\varphi_2} X \rightarrow 1 : \text{split}$$

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} X \rightarrow 1 : \text{split}$$

ならば、 $N \cong N_1 * N_2$ (自由積)。

証明。[3. Prop 2.1.4] の証明参考。

D. Decompositions. (star decomposition)

Definition 1.18 X を群, E を C_X の closed な sub-class とする。 $(G, \varphi) \in E$ かつ, E で "prime (又は, indecomposable, irreducible)" とは,

- (1) $(G, \varphi) \neq (X, id_X)$, かつ,
- (2) (G, φ) は, E の 2 つの pair の積にならないか,
- (3) $(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2)$, $(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in E$ ならば, $(G_1, \varphi_1) = (X, id_X)$ 又は, $(G_2, \varphi_2) = (X, id_X)$ 。

となることである。特に, 「 E で」と断わらない場合は, 「 C_X で」という意味である。

Definition 1.19 同じ X , E に対し,

$$(G_1, \varphi_1) * \dots * (G_n, \varphi_n), \quad n < \infty$$

かつ, $(G, \varphi) \in E$ の素因子分解であるとは, 各 (G_i, φ_i) かつ, E で "prime" かつ $(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * \dots * (G_n, \varphi_n)$ 。

Ⅴ. 基本問題

問題 I (埋め込み問題) 群 X の 1 つの生成集合 $A = \{a_k\}$ に対し, $\bar{\varphi}: A \rightarrow$ 群 G かつ与えられたとき,

φ は、 X から G への単射準同型写像に拡張できるか。

問題 II (同型問題) $\langle G_1, \varphi_1 \rangle, \langle G_2, \varphi_2 \rangle \in C_X$ に対し、 $\langle G_1, \varphi_1 \rangle \cong \langle G_2, \varphi_2 \rangle$ か否かを判断しろ。

問題 II' (分類問題) C_X に対し、又は、その subclasses に対し、同型類を分類せよ。

問題 III (素因子性問題) $(G, \varphi) \in C_X$ に対し、それか、与えられた C_X の subclass E で prime か否かを判定せよ。

問題 III' (素因子分類問題) C_X とその subclass E に対し、 E で prime な C_X の pair を分類せよ。

問題 IV (素因子分解の存在性問題) $(G, \varphi) \in C_X$ と C_X の部分 class E に対し、 $(G, \varphi) \in E$ の素因子分解が存在するか。

問題 V (素因子分解の比較問題) $(G, \varphi) \in C_X$ の subclass E に関する 2 つの素因子分解が与えられたとき、

それらを比較せよ。

問題 V' (唯一性問題) $(G, \varphi) \in C_X$ と subclass E
 $((G, \varphi) \in E)$ に対し、 (G, φ) の E に関する素因子
 分解は唯一であるか。

(注意) 一般には唯一ではない。

問題 V'' (一般比較問題) $(G, \varphi) \in C_X, (G, \varphi) \in C_Y$ に
 対し、それぞれの C_X, C_Y に関する素因子分解を比較せ
 よ。

これら5種9つの問題をここでは基本問題と名付ける
 ことにする。自由積の場合、I は 語の問題、II
 は 同型問題、IV は、Wagner - Grushko - Neumann の定理
 より肯定的、V は、一般化された Nielsen 交換の話し
 となる。

証明は省略するか、比較問題に関して、次の定理が
 Karrass - Solitar の部分群定理 ([5]) より示せる:

定理 1.20 (細分定理) $(G, \varphi) \in C_X$ の素因子分解

$$(G, \varphi) = (A_1, \varphi_1) * \cdots * (A_m, \varphi_m)$$

$$= (B_1, \psi_1) * \cdots * (B_n, \psi_n)$$

に対し、 A_p, B_q の 樹積 $\times$ は、樹積の HNN 拡大としての表現で、 A_p の頂点に対応する群の p 全体に渡る族と、 B_q の頂点に対応する群の q 全体に渡る族との間に、全単射に対応があり、それぞれ対応する群が同型になるものが存在する。 m, n は一般には等しくない。

この定理の系として 2. [3], Theorem 2.2.7, (3) が証明される。 i.e. *knot-like groups* と呼ばれる class に対し、分解の唯一性を示せる。

=====

講演 2 Star Decompositions of Groups along Splitting Cyclic Groups

我々は、結び目群の pair (定義 3.) を含むものとして、次の様な $C_{\mathbb{Z}}$ の部分半群

$$C = \{ (G, \varphi) \in C_{\mathbb{Z}} \mid (1) \ G \text{ は有限表示,} \$$

$$(2) \ G/[G, G] \cong \mathbb{Z} = \langle t : \rangle \$$

$$(3) \ \varphi(1)[G, G] \text{ は } G/[G, G] \text{ を生成する} \}$$

について、前講演での基本問題を考える。これについては、以前 [3] において述べたが、Existence Problem に関しては、証明が不十分であったので、次の唯一性定理、存在定理のうち、存在の方を証明する。

存在定理 2.1 C は completely closed で、任意の C の pair は、素因子分解をもつ。

唯一性定理 2.2 C の任意の pair の素因子分解は、唯一である。

§ 2.1 存在定理の証明

群拡大の立場から $(G, \varphi) \in \mathcal{C}$ を見ると、

$$1 \rightarrow [G, G] \rightarrow G \xrightleftharpoons{\varphi} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

は、splitting extension となっている。そこで、 G の交換子群 $[G, G]$ と、積 $*$ の関係については、次が基本的である。

定理 2.3 ([3], Prop. 2.1.4) (Note 1.17)

$(G_1, \varphi_1), (G_2, \varphi_2) \in \mathcal{C}$ に対し、 $(G, \varphi) = (G_1, \varphi_1) * (G_2, \varphi_2)$ ならば、 $[G, G] = [G_1, G_1] * [G_2, G_2]$ (自由積) である。

準定理 2.4 ([3], Theorem 2.2.7.(2))

$\mathcal{C}$ は、completely closed である。

次に、任意の pair $(G, \varphi) \in \mathcal{C}$ に対し、 G は次の様な HNN 拡大と見ることが出来る。

定理 4.5 任意の $(G, \varphi) \in \mathcal{C}$ に対し、 G は、 $\varphi(1)$ を、

free part の生成元とし、有限生成群を base group とする HNN 拡大となっている。

証明。 G の有限表示の 1 つを

$$\mathcal{P}_1 = \langle x_1, x_2, \dots, x_p ; R_1(x_\nu), R_2(x_\nu), \dots, R_q(x_\nu) \rangle$$

とする。 $W(x_\nu)$ を、 $x_1, x_2, \dots, x_p$ の語で、 $\varphi(1)$ を表わすものとする。 $\mathcal{P}_1$ に、 generating symbol x を、 defining relator $x W(x_\nu)^{-1}$ と共に加え、 G の表示、

$$\mathcal{P}_2 = \langle x, x_1, x_2, \dots, x_p ; R_1(x_\nu), R_2(x_\nu), \dots, R_q(x_\nu), x W(x_\nu)^{-1} \rangle$$

を得る。 α を、 G から $G/[G, G] = \langle t : \rangle$ への、 abelianizer で、 $\alpha(x) = t$ とするものとする。すると、各 $\nu = 1, 2, \dots, p$ に対し、 $\alpha(x_\nu) = t^{d_\nu}$ を得る。そこで、 $\mathcal{P}_2$ に、 generating symbol a_ν と defining relation

$$(2.6) \quad a_\nu = x_\nu x^{-d_\nu}$$

を加え、次に、 (2.6) を $x_\nu = a_\nu x^{d_\nu}$ と置き、これを使って、 generating symbol x_ν を消去することにより、

$$\mathcal{P}_3 = \left\langle x, a_1, a_2, \dots, a_p ; R_1(a_\nu x^{d_\nu}), R_2(a_\nu x^{d_\nu}), \dots, R_q(a_\nu x^{d_\nu}), x W(a_\nu x^{d_\nu})^{-1} \right\rangle$$

を得る。 $R_\lambda(a_\nu x^{d_\nu})$, $xW(a_\nu x^{d_\nu})^{-1}$ をそれぞれ、単に R_λ, R_{q+1} で表わすこととする。今、 $R_{X'}, 1 \leq X' \leq q+1$,

か、 $C_{X'1}^{E_{X'1}} C_{X'2}^{E_{X'2}} \cdots C_{X'r_{X'}}^{E_{X'r_{X'}}}$, ここに $C_{X'j}$ は、 generating symbol x, a_ν の一つ、 $E_{X'j} = \pm 1$, であるならば、 $b_{X'j} = C_{X'1}^{E_{X'1}} \cdots$

$C_{X'j}^{E_{X'j}}$, $j = 1, 2, \dots, r_{X'}$, とし、 $C_{X'j}^*$ を、 $C_{X'j}$ か a_ν の中であれば、 $x^{\sigma_x(b_{X'j-1})} C_{X'j} x^{-\sigma_x(b_{X'j-1})}$, $C_{X'j}$ か x ならば、 1 と定める。但し、 $b_{X'0} = 1$ と考える。また、

$\sigma_x(b_{X'j-1})$ は、 $b_{X'j-1}$ 中の x の index sum である。一方、

$\alpha(x) = t$, $\alpha(a_\nu) = \alpha(x_\nu x^{-d_\nu}) = t^{d_\nu} t^{-d_\nu} = 1$ であるから、

$R_{X'} = C_{X'1}^{*E_{X'1}} C_{X'2}^{*E_{X'2}} \cdots C_{X'r_{X'}}^{*E_{X'r_{X'}}}$ 。次に、 $m = \min_{X'} \min_{1 \leq j \leq r_{X'}} (\sigma_x(b_{X'j}))$

$M = \max_{X'} \max_{1 \leq j \leq r_{X'}} (\sigma_x(b_{X'j}))$ とする。ここで、 P_3 の、

generating symbol に $a_{\nu k}$, $1 \leq \nu \leq p$, $m \leq k \leq M+1$, を、

defining relator に $a_{\nu k} x^k a_\nu^{-1} x^{-k}$ を加える。そして、

$a_{\nu k} x^k a_\nu^{-1} x^{-k}$ を使って、 $R_{X'}$ を全て $a_{\nu k}$ の語に表える。

その後、 $a_{\nu k'} x^{k'} a_\nu^{-1} x^{-k'}$, $m+1 \leq k' \leq M+1$, を、

順次、 $a_{\nu k'} x a_{\nu k'-1}^{-1} x^{-1}$ に表える。最後に、 $a_{\nu m} x^m a_\nu^{-1} x^{-m}$

を使って、 a_ν を generating symbol から消去する。この

様にして得られた G の表示は、明らかに、 G か、 $a_{\nu k}$,

$1 \leq \nu \leq p$, $m \leq k \leq M+1$, で生成される群を base group と

して、 x を (すなわち、 $\varphi(1)$ を)、 free part の生成元

とする HNN 拡大であることを表わしている。 //

となる。そこで、次の事実に注意する。

(2.11) 任意の $(X, \rho) \in C$ と、有限生成部分群 $H \leq [X, X]$ に対し、 $\tilde{X} = X/H^X$ 、 H^X は H の X に於ける正則閉包、とすると、 $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ は C の元である。但し、 $\tilde{\rho}$ は、自然な全準同型写像 $X \rightarrow \tilde{X}$ によって ρ から自然に導かれる準同型写像である。

(2.12) $(X, \rho) \in C$ に associate した X の HNN 拡大としての表示 (定理 2.5) を、

$$\langle x, S : xAx^{-1} = B \rangle$$

とし、 H を S の有限生成部分群とする。このとき、補題 2.11 で考えた $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ に associate した HNN 拡大としての $\tilde{X}$ の表示として、

$$\langle x, \tilde{S} : x\tilde{A}x^{-1} = \tilde{B} \rangle$$

が取れる。こゝに、 $\tilde{S}, \tilde{A}, \tilde{B}$ は、それぞれ S, A, B の、全準同型写像 $X \rightarrow \tilde{X}$ による像である。

(これらの証明は自明であろう。)

注 1. associated subgroup も有限生成でとれている。

注 2. base group は、決して有限表示にならない場合もある。

以上の準備のもとに、証明にはいろう。そこで、定理 2.1 が成立しなかったとする。すると、 C の素因子分解をもたない pair が少なくとも 1 つ存在する。そこで、pair の、定理 2.5 の意味での HNN 拡大としての全ての構造を、 C の素因子分解をもたない pair 全てにわたり考え、その中で、base group の階数の最小、 N を与える HNN 拡大として 2 の構造の 1 つを

$$(2.7) \mathcal{P} = \langle x, S ; xAx^{-1} = B \rangle$$

とし、これを与える pair を (G, φ) とする。i.e. $\mathcal{P}$ は G の表示で、 x は、 $\varphi(1)$ を表わし、base group S の階数 $\text{rank } S = N$ である。

補題 2.7 S は、階数 N の自由群である。

証明. (G, φ) は素因子分解をもたない。よって、

(G, φ) は既約でないから、 $(G, \varphi) = (X_1, \varphi_1) * (Y_1, \varphi_1)$ 、

$(X_1, \varphi_1) \neq (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$, $(Y_1, \psi_1) \neq (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$, と分解できる。

すると、 (X_1, φ_1) か (Y_1, ψ_1) の少なくとも一方は、素因子分解をもたない。 (Y_1, ψ_1) がそうであるとする。

(Y_1, ψ_1) に上記と同じ議論を行うということをくり返すことにより、正の各整数 n に対し、 (G, φ) の分解

$$(2.8) \quad (G, \varphi) = (X_n, \varphi_n) * (Y_n, \psi_n),$$

$$(X_n, \varphi_n) = (X_{n-1}, \varphi_{n-1}) * (X_n^*, \varphi_n^*) \quad (\text{但し } n \geq 2),$$

$$(Y_n, \psi_n) = (X_{n+1}, \varphi_{n+1}) * (Y_{n+1}, \psi_{n+1}),$$

が存在する。 $(X_n^*, \varphi_n^*) \neq (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ である。すると、定理 2.3 より、 $[G, G] = [X_n, X_n] * [Y_n, Y_n]$ 。 $S \leq [G, G]$ は明らかであるから、 S に、Kurosh の部分群定理を適用することにより、

$$(2.9) \quad S = F_u * \left(\bigstar_{\xi} (S \cap [X_n, X_n]^{g_{\xi}}) \right) * \left(\bigstar_{\mu} (S \cap [Y_n, Y_n]^{h_{\mu}}) \right)$$

F_u は階数 u の自由群 ($u \leq N$)、 $g_{\xi}, h_{\mu} \in G$ 。

また、Wagner, Groshko, Neumann の定理により、

$$(2.10) \quad N = u + \sum_{\xi} \text{rank}(S \cap [X_n, X_n]^{g_{\xi}}) \\ + \sum_{\mu} \text{rank}(S \cap [Y_n, Y_n]^{h_{\mu}})$$

これより、まず 次が分かる。

$$(2.13) \quad \text{任意の } n \text{ に対し、} S \cap [X_n, X_n]^{g_i} = 1.$$

なんとならば、或る n と g_i に対し、 $S \cap [X_n, X_n]^{g_i} \neq 1$ ならば、(2.10) より、 $\text{rank}(S \cap [X_n, X_n]^{g_i})$ は有限であるから、 $\tilde{G} = G / (S \cap [X_n, X_n]^{g_i})^G$ は、(2.12) により表示

$$(2.14) \quad \langle x, \tilde{S}; xAx^T = B, (S \cap [X_n, X_n]^{g_i}) \text{ の生成元} \rangle$$

を持つ。よって、 $\tilde{G}$ の表示として

$$\langle x, \tilde{S}; x\tilde{A}x^T = \tilde{B} \rangle, \quad \tilde{S} = S / (S \cap [X_n, X_n]^{g_i})^S$$

が得られる。すると、(2.9) より、 $\text{rank } \tilde{S} \neq \text{rank } S$ また、 $(\tilde{G}, \tilde{\rho}) \in C$ となり、 $\text{rank } S$ の最小性に反する。

更に、

$$(2.15) \quad \exists m \quad \forall n > m \quad S \cap [Y_n, Y_n]^{h_m} = 1$$

⊙ $\forall n \quad S \cap [Y_n, Y_n]^{h_m} \neq 1$ があれば、その正規部分群で (2.12) のように G の剰余群を取れば、

$\text{rank}(S \cap [Y_n, Y_n]^{h_n}) < \infty$ より、 $\text{rank } S$ の最小性に反する C で分解をもたないものがつくれる。

よって、ある適当に大きな n に対し、(2.9) は $S = F_u$ となり補題は証明された。

補題 2.16 $\langle S \cup xSx^{-1} \rangle = \text{自由群}$

⊙ $\langle S \cup xSx^{-1} \rangle \cong S * (xSx^{-1})$ となる。この点に注意して、 $\langle S \cup xSx^{-1} \rangle$ を自由積 $[X_n, X_n] * [Y_n, Y_n]$ の部分群とみて Kurosh 部分群定理を用い、その各自由積の部分群の素因子に対し、 $S * (xSx^{-1})$ の部分群として Karrass-Solitar 部分群定理を用いれば、(2.13), (2.15) の条件より、この補題の結果が出る。

C に属する (G, φ) の条件 (2) より、 $G/[G, G]$ の簡単な計算より、

$$(2.17) \quad \langle S \cup xSx^{-1} \rangle = (\text{rank } N \text{ の自由群}).$$

この議論をくり返すことにより、

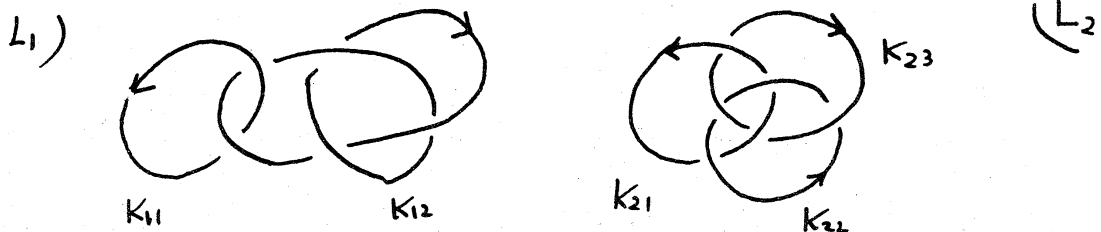
$$(2.18) \quad \langle S \cup xSx^{-1} \cup \dots \cup x^k S x^{-k} \rangle = (\text{rank } N$$

の自由群) $\forall k < \infty$

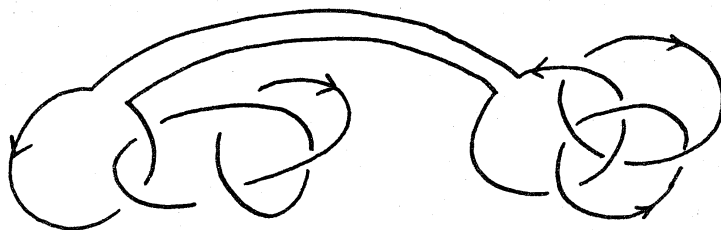
が示せる。よって, (X_n, φ_n) に対し 定理 4.5 を用い, HNN 拡大で, 有限生成な base group, 例えは S_X , をもつものとする。すると, 或る十分大きな k' に対し $S_X < (S \cup_X S_X^{-1} \cup \dots \cup X^{k'} S X^{-k'})$ になり, 2 いると見てよい。そこで, 再び, (G, φ) を $(S \cup_X S_X^{-1} \cup \dots \cup X^{k'} S X^{-k'})$ の HNN 拡大と見て, $H = S_X$ とし, (2.12) を用いれば, N の最小 rank 性 に反した C の pair がつくれることとなり矛盾。よって, 存在定理は証明された。

講演 3 Existence of Factorizations for Links & Surfaces

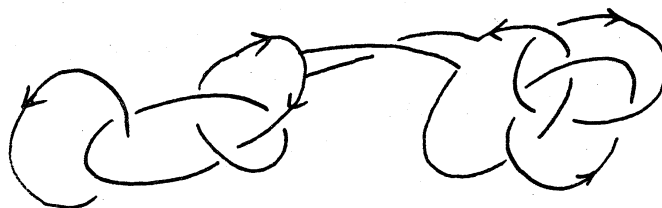
3次元球面 S^3 中の向きの付いた順な絡み目 $L_1 = K_{11} \cup \dots \cup K_{1p}$, $L_2 = K_{21} \cup \dots \cup K_{2q}$ に対し、『積』か、結び目の積の拡張として定義される ($[7]$). 簡単に例を示そう。



$(L_1; K_{11}) \# (L_2; K_{21})$ は.



$(L_1; K_{12}) \# (L_2; K_{22})$

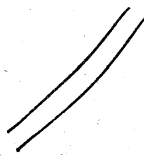


この積に対し、逆に分解が自然に定義されるか、それに関しては、よく知られた次の定理がある：

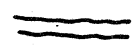
定理 3.1 (Shubert [6], Hashizume [7])

順な有向絡み目の分解は有限回で終り、分解しきれない素な絡み目まで分解した素因子分解は唯一である。

詳しいことは省略するが、我々の定理 2.1 と *torus* 分解に関する T. P. Sharlen の結果 ([8], Lemma 2.7) を用いれば、この古典的に重要な結果が、Kneser の予想の証明同様に証明される。



定理 3.2 この絡み目の積は、自由可換半群をなす。



講演4 Group of Knot Groups

n 次元の順な結び目は、合成のもとで、(自由な)可換半群を形成する(定理3.2)。L.P. Neuwirth は、著書『Knot Groups』に於て、この半群に、或る合同関係を定め、 n 次元結び目群の群なるものを定義した。本講演では、この群の構造を完全に決定する。

定理 4.1 全ての正の整数 n に対し、 n 次元結び目群の群は、可算無限次元の自由可換群である。

これは、[9] 中の problem I (1次元結び目群の群は、自明でない群か) に、肯定的に答えている。

§ 4.1 結び目群の群 ([9], Chap. VIII, §4 & §7)

この章では、L.P. Neuwirth の「群の群」([9], §3 & §4) を、講演2で取り扱った pair の集り G の或る性質を満たす subclass に対し、定義、紹介する。さらに、この場合には、強い意味での群の群が定義できることを示す。特別な場合として、結び目群の群が最

後に定義される。

$\mathcal{D}$ を、 $\mathcal{C}$ の subclass で、次の条件を満たすものとする：

(条件 1) $(\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}}) \in \mathcal{D}$,

(条件 2) $(G, \varphi) \in \mathcal{D} \Rightarrow (G, \varphi \circ \iota) \in \mathcal{D}$,

ここに、 ι は、 $\mathbb{Z}$ 上の involution である。i.e. $\iota(1) = -1$ 。

定義 4.2 $\mathcal{D}$ の元の間関係 $\vdash$ (resp. $\S$) を次で定める：

$(G, \varphi) \vdash (K, \psi)$ (resp. $(G, \varphi) \S (K, \psi)$) とは、群 $G * K$ の自己同型写像 (resp. involution) で、
 $\varphi(1) = \psi(-1)$
 その部分群 $\varphi(\mathbb{Z})$ 上の involution を誘導するものが存在することである。

Remark 4.3 定義 4.2 は、well-defined である。

Claim 4.4 $(G, \varphi) \S (K, \psi) \Rightarrow (G, \varphi) \vdash (K, \psi)$ 。

Claim 4.5 ([9], p.78.) $(G, \varphi) * (G, \varphi \circ \iota) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ 。

関係 r (同様に, s) が、合同関係のうち、*transitivity* 以外を満たすことは、明らかである。関係 r を *transitive* なものにかえる為に、次の関係 $\equiv_{\mathcal{D}}$ が、L.P. Neuwirth によって導入された。

定義 4.6 $\mathcal{D}$ の元、 (G, φ) と (K, ψ) が、 $(G, \varphi) \equiv_{\mathcal{D}} (K, \psi)$ (resp. $(G, \varphi) \not\equiv_{\mathcal{D}} (K, \psi)$) とは、

$$(G, \varphi) r X_1 r \cdots r X_N r (K, \psi) \\ \text{(resp. } (G, \varphi) s X_1 s \cdots s X_N s (K, \psi) \text{)}$$

なる $X_1, \dots, X_N \in \mathcal{D}$, $N < \infty$, が存在することである。

準定理 4.7

- (1) $\mathcal{D} / \not\equiv_{\mathcal{D}}$ は、可換群である,
- (2) $\mathcal{D} / \equiv_{\mathcal{D}}$ は、 $\mathcal{D} / \not\equiv_{\mathcal{D}}$ の商群である。

証明) (1) [9]、Theorem 8.4.1 の証明に準ずる。

(2) Claim 4.3 より明らか。 //

これらの群 $\mathcal{D}/\equiv_{\mathcal{D}}$ 及び $\mathcal{D}/\rho_{\mathcal{D}}$ を、それぞれ、 $\mathcal{D}$ の群、
 及び、強い意味での $\mathcal{D}$ の群 と呼ぶことにする。

n 次元結び目の pair の集り K_n は、明らかに、条件 1、
 2 を満たす C の subclass である ([9], Chap. VIII, §7)
 から、 K_n の群、強い意味での K_n の群が定義される。そ
 れぞれ、 n 次元結び目群の群、強い意味での n 次元結
 び目群の群 と呼ぶ。

次の 3 つの結果は、L.P. Neuwirth による：

定理 4.8 ([9], Theorem 8.7.1) $(G, \varphi) \in K_1$ に対し、
 $(G, \varphi) \equiv (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}}) \Rightarrow G$ の Alexander 多項式は、symmetric。

系 4.9 ([9], Corollary 8.7.1) $(G, \varphi), (K, \psi) \in K_1$
 に対し、 $(G, \varphi) \equiv (K, \psi)$ ならば、 $G * K$ の Alexander
 $\varphi(1) = \psi(1)$
 多項式は、symmetric。

系 4.10 ([9], Corollary 8.7.2) Alexander 多項式を持
 つ 2 次元結び目の pair の全ての集りは、条件 1, 2 を満
 たす C の subclass で、その群は、自明でない。

§ 4.2 関係 $\equiv$ と $\mathcal{D}$ の素因子分解による特徴付け

この章では、次の定理を証明することを、主目的とする。

定理 4.11 $\mathcal{D}$ を、 G の任意な *closed subclass* で、条件 1 と 2 を満たすものとする。このとき、次が成立：

(1) $(G, \varphi), (K, \psi) \in \mathcal{D}$ に対し、

$$(G, \varphi) \equiv_{\mathcal{D}} (K, \psi) \Leftrightarrow (G, \varphi) \vdash (K, \psi)$$

$$(G, \varphi) \mathcal{N}_{\mathcal{D}} (K, \psi) \Leftrightarrow (G, \varphi) \S (K, \psi).$$

(2) $\mathcal{D}$ の群は、自由可換群である。

(2') 強い意味での $\mathcal{D}$ の群は、 $\mathcal{D}$ の群と、幾つかの位数 2 の巡回群の直和である。

証明は、次の関係 $\vdash$ と $\S$ の、pair $(\in G)$ の素因子分解による特徴付けに基づく。

特徴付け補題 4.12 任意の $(G, \varphi) \in G$ に対し、

(i) $(G, \varphi) \vdash (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ となる為の必要十分条件は、

(G, φ) が、同型の意味で、次の様な C での素因子分

解を持つことである：

$$(4.13) \quad \left[\bigstar_{i=1}^p (A_i, \alpha_i) \right] * \left[\bigstar_{j=1}^q ((B_j, \beta_j) * (B_j, \beta_j \circ \iota)) \right],$$

ここに、 $(A_i, \alpha_i) \in (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$, $i=1, \dots, p$, であり、

$(B_j, \beta_j) \in (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ではない, $j=1, \dots, q$ 。

(ii) $(G, \varphi) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ となる為の必要十分条件は、

(G, φ) が、同型の意味で、次の様な G での素因子分解を持つことである：

$$(4.14) \quad \left[\bigstar_{i'=1}^{p'} (A_{i'}, \alpha_{i'}) \right] * \left[\bigstar_{i''=1}^{p''} ((A_{i''}, \alpha_{i''}) * (A_{i''}, \alpha_{i''} \circ \iota)) \right] \\ * \left[\bigstar_{j=1}^q ((B_j, \beta_j) * (B_j, \beta_j \circ \iota)) \right].$$

ここに、 $(A_{i'}, \alpha_{i'}) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$, $i'=1, \dots, p'$, であり、

$(A_{i''}, \alpha_{i''}) \in (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ 、かつ $(A_{i''}, \alpha_{i''}) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ではない、

$i''=1, \dots, p''$ 、 $(B_j, \beta_j) \in (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ではない (よって、

$(B_j, \beta_j) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ではない), $j=1, 2, \dots, q$ 。

注意。明らかに、

$$\bigstar_{i=1}^P (A_i, \alpha_i) = \left[\bigstar_{i'=1}^{P'} (A_{i'}, \alpha_{i'}) \right] * \left[\bigstar_{i''=1}^{P''} ((A_{i''}, \alpha_{i''}) * (A_{i''}, \alpha_{i''} \circ \iota)) \right].$$

(i)の証明。 Claim 4.4 と Claim 4.5 より、十分性は明らか。必要性を証明する。 (G, φ) の C での素因子分解を、

$$(4.15) \quad \left[\bigstar_{i=1}^P (A_i, \alpha_i) \right] * \left[\bigstar_{j=1}^{q'} (B_{j'}, \beta_{j'}) \right]$$

とする。ここに、 $(A_i, \alpha_i) \vDash (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ (i.e. $(A_i, \alpha_i) \cong (A_i, \alpha_i \circ \iota)$), $i=1, \dots, P$, であり、 $(B_{j'}, \beta_{j'}) \vDash (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ でない (i.e. $(B_{j'}, \beta_{j'}) \not\cong (B_{j'}, \beta_{j'} \circ \iota)$), $j'=1, \dots, q'$ 。すると、 $(G, \varphi \circ \iota)$ の C での素因子分解は、

$$\left[\bigstar_{i=1}^P (A_i, \alpha_i \circ \iota) \right] * \left[\bigstar_{j=1}^{q'} (B_{j'}, \beta_{j'} \circ \iota) \right]$$

である。今、 $(G, \varphi) \vDash (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ であるから、 $(G, \varphi) \cong (G, \varphi \circ \iota)$ 。 C の素因子分解唯一性定理により、各 $(B_{j'}, \beta_{j'})$ に対し、これに同型な $(B_k, \beta_k \circ \iota)$ が1対1に定まる。これは、関係 $\vDash$ が、同型で不変な性質 (Remark 4.3) であることから、 $(A_i, \alpha_i \circ \iota)$ の因子には、対応しないことによる。さらに、 $(B_{j'}, \beta_{j'}) \not\cong (B_{j'}, \beta_{j'} \circ \iota)$ より、 $j' \neq k$ 。この様な、 j' を k に対応させる $\{1, 2, \dots, q'\}$ 上の置換を、 τ とする。 τ の巡環への分解 $(\nu_1^{(1)}, \nu_2^{(1)}, \dots$

$\cdot, \nu_{m_1}^{(1)}) \cdots (\nu_1^{(t)}, \nu_2^{(t)}, \dots, \nu_{m_t}^{(t)})$ を考えると、 $m_1, \dots, m_t$ は全て、偶数でなければならない。なんとならば、

$$(B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}}) \cong (B'_{\nu_3^{(s)}}, \beta'_{\nu_3^{(s)}}) \cong \cdots$$

$$(B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}} \circ \iota) \cong (B'_{\nu_2^{(s)}}, \beta'_{\nu_2^{(s)}}) \cong (B'_{\nu_4^{(s)}}, \beta'_{\nu_4^{(s)}}) \cong \cdots$$

となり、 m_s が奇数ならば、 $(B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}}) \cong (B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}} \circ \iota)$ となつて、矛盾！ よつて、

$$\begin{aligned} \bigstar_{j'=1}^{q'} (B_{j'}', \beta_{j'}') &\cong \bigstar_{s=1}^t \left(\bigstar_{u=1}^{\frac{m_s}{2}} ((B'_{\nu_{2u-1}^{(s)}}, \beta'_{\nu_{2u-1}^{(s)}}) * (B'_{\nu_{2u}^{(s)}}, \beta'_{\nu_{2u}^{(s)}})) \right) \\ &\cong \bigstar_{s=1}^t \left(\bigstar_{u=1}^{\frac{m_s}{2}} ((B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}}) * (B'_{\nu_1^{(s)}}, \beta'_{\nu_1^{(s)}} \circ \iota)) \right) \end{aligned}$$

となり、(4.15) より、(4.13) が得られる。

(ii) の証明。Claim 4.5 より、十分性は明らか。よつて、必要性を証明する。Claim 4.4 と (i) より、 (G, φ)

が $(\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ならば、(4.13) のような素因子分解を、

(G, φ) は、 $\mathbb{C}$ で持つことになる。そこで、

$$(4.16) \quad \bigstar_{i=1}^P (A_i, \alpha_i) \cong \left[\bigstar_{i'=1}^{P'} (A_{i'}', \alpha_{i'}') \right] * \left[\bigstar_{i''=1}^{P''} ((A_{i''}'', \alpha_{i''}'') * (A_{i''}'', \alpha_{i''}'' \circ \iota)) \right]$$

を示せば良い訳である。証明は、(i) の場合に似てゐる。

$\bigstar_{i=1}^P (A_i, \alpha_i)$ という素因子分解を、並びかえて、

$$\left[\bigstar_{i'=1}^{p'} (A_{i'}, d_{i'}) \right] * \left[\bigstar_{i''=1}^{p'''} (A_{i''}''', d_{i''}''') \right]$$

ここに、 $(A_{i'}, d_{i'}) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ (i.e. involution によって、
 $(A_{i'}, d_{i'}) \cong (A_{i'}, d_{i'} \circ \iota)$), $i' = 1, \dots, p'$, であり、
 $(A_{i''}''', d_{i''}''')$ は、 $(A_{i''}''', d_{i''}''') \Gamma (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ではないが、
 $(A_{i''}''', d_{i''}''') \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ ではない (i.e. $(A_{i''}''', d_{i''}''') \cong (A_{i''}''', d_{i''}''' \circ \iota)$)
 ではない、これは、involution では、導かれない),
 $i'' = 1, \dots, p'''$, とする。今、 $(G, \varphi) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ である
 から、群 G の involution ξ で、 $\xi \circ \varphi = \varphi \circ \iota$ となるもの
 が存在する。(i) のとき同様、Remark 4.3 により、 C の
 素因子分解唯一性定理において、 $(A_{i'}, d_{i'})$ に対応する
 のは、何か $(A_{i'}, d_{i'})$ であり、 $(A_{i''}''', d_{i''}''')$ に対応する
 のは、 $(A_{i''}''', d_{i''}''')$ であり、さらに、 (B_j, β_j) に対応す
 るのは、 $(B_j, \beta_j \circ \iota)$ である。但し、 ξ で、写像される
 というのではなく、対応するというだけである。そこ
 で、準定理 2. により、 ξ より、 $\bigstar_{i''=1}^{p'''} (A_{i''}''', d_{i''}''')$ から
 $\bigstar_{i''=1}^{p'''} (A_{i''}''', d_{i''}''' \circ \iota)$ への involution $\bar{\xi}$ が導かれる。この
 とき、 $\bar{\xi}$ が導く対応は、 ξ のものに等しい。さらに、
 i'' に対応する i''' は、 $i'' \neq i'''$ となる。なんとなら
 ば、もし $i''' = i''$ ならば、再び準定理 2. より、
 $(A_{i''}''', d_{i''}''')$ から $(A_{i''}''', d_{i''}''' \circ \iota)$ への involution $\bar{\bar{\xi}}_{i''}$ が

$\bar{\xi}$ (又は、 ξ) から導かれる。よって、 $(A_{i_1}''', \alpha_{i_1}''')$
 $\S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ となり矛盾する。このことと、 $\bar{\xi}$ が
involution であることにより、 $\bar{\xi}$ から導かれる $\{1, 2,$
 $\dots, p''\}$ 上の置換の巡環への分解は、互換の積となる。
 よって、(i) の場合同様、(4.16) が示せる。 //

素因子分解定理により、 C の各元 (G, φ) の素因子
 分解において、(4.13) 又、(4.14) の形の最大の部分
 (素因子分解) がとれる。それぞれにおける、 (G, φ) の素
 因子分解の残りの部分を、 $S(G, \varphi)$, $T(G, \varphi)$ で書き
 表わすことにする。 $(G, \varphi) \text{ r } (K, \psi) \Leftrightarrow (G, \varphi) * (K, \psi \circ \iota)$
 $\text{ r } (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ 、また、 $(G, \varphi) \S (K, \psi)$
 $\Leftrightarrow (G, \varphi) * (K, \psi \circ \iota) \S (\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ であるから、
 補題 4.12 より、次の系を得る。

系 4.17 (i) $(G, \varphi) \text{ r } (K, \psi) \Leftrightarrow S(G, \varphi) \cong S(K, \psi)$,
 (ii) $(G, \varphi) \S (K, \psi) \Leftrightarrow T(G, \varphi) \cong T(K, \psi)$.

よって、定理 4.11.(1) は、明らかである。また、同
 定理の (2) は、この (i) と、系 4.17, C の素因子分
 解の唯一性定理から直ちに導かれる。さらに、(2') は、

$$(A_i''', \alpha_i''') * (A_i''', \alpha_i''') \cong (A_i''', \alpha_i''') * (A_i''', \alpha_i''' \circ \iota)$$

と、Claim 4.5 より明らかである。

Claim 4.18 (1) C の群は、既約な $(G, \varphi) \in C$ で、 $(G, \varphi) \neq (G, \varphi \circ \iota)$ なるものの全ての集りを基底としてもつ自由可換群である。(2) 強い意味での C の群は、 C の群と、既約な $(G, \varphi) \in C$ で、 $(G, \varphi) \cong (G, \varphi \circ \iota)$ かつ、この同型が *involution* ではないものが生成する位数 2 の巡回群等との直積である。

以後、(resp. 強い意味での) $\mathcal{D}$ の群 $\mathcal{D}/\equiv_{\mathcal{D}}$ (resp. $\mathcal{D}/\Pi_{\mathcal{D}}$) を、 $\mathcal{D}/r$ (resp. $\mathcal{D}/s$) で表わす。

準定理 4.19 $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ を、 C の任意な subclass で、条件 1, 2 を満たす closed なものとする。このとき、

(1) $\mathcal{D}_1/r$ (resp. $\mathcal{D}_1/s$) は、 C/r (resp. C/s) 中の $\mathcal{D}_1$ の像に同型である。

(2) $\mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2 \Rightarrow \mathcal{D}_1/r \geq \mathcal{D}_2/r$ 且 $\mathcal{D}_1/s \geq \mathcal{D}_2/s$ 。

証明は、定理 4.11.(1) より明らか。

n 次元結び目群の群に関しては、次が言える。

準定理 4.20 任意の $n \geq 3$ に対し、

$$(1) \quad K_1/r < K_2/r < K_n/r = K_{n+1}/r < C/r,$$

$$(2) \quad K_1/s < K_2/s < K_n/s = K_{n+1}/s < C/s.$$

証明。準定理 3. 及び準定理 4.19.(2) より、

$$K_1/r \leq K_2/r \leq K_n/r = K_{n+1}/r \leq C/r \quad (n \geq 3)$$

$$K_1/s \leq K_2/s \leq K_n/s = K_{n+1}/s \leq C/s$$

系 4.10 より、 $K_1/s \neq K_2/s$ 。[3]、Example 2.(2)

より、 $K_2/s \neq K_3/s$ (F. Hosokawa - A. Kawachi [10] 又

は、Farber [11] を用いる)。また、[12], [13], [14],

より、 $K_3/s \neq C/s$ 。故に、(2) が成り立つ。このこと

より、(1) が成り立つことは明らか。 //

§ 4.3 定理 4.1 の証明

定理 4.8、系 4.9 は、1 次元結び目群の Alexander 多項式が *symmetric* なことから役に立たない。そこで、もとにもどって、定理 4.11.(2) 及び Claim 4.18.(1)、準定理 4.19.(1) & (2)、準定理 4.20 より、1 次元結び目に関する無限個の異った pair (G, φ) で、 C で既約、

且つ、 $(G, \varphi) \not\cong (G, \varphi \circ \iota)$ となるものがあることを示せばよい。これは、定理 5.1 で証明する。(但し、そこで扱われる例は、Witten, Ziemann 等の torus 分解に関連した、結び目の分解に対する結果からもすぐに証明される。)

==

講演 5 A Note on Groups of Composite Knots

granny knot と square knot との例 ([]) から、Prof. J. Martine が、1983年に、Univ. of Saskatchewan で、私的に、次の問いをされた。

問題 4つの1次元結び目 k_1, k'_1, k_2, k'_2 に対し、次が成立するか。

$G(k_1) \cong G(k'_1)$ 且つ $G(k_2) \cong G(k'_2)$ ならば、
 $G(k_1 \# k_2) \cong G(k'_1 \# k'_2)$ 。

次の定理が、本講演でのべる、そのときの否定的答えである。

定理 5.1 任意の整数 $p \neq -2, -1, 0, 1$ に対し、 $k(p)$ を、 $(2p+1, 3, -3)$ 型の pretzel knot とする。このとき、

$$G(k(p) \# k(p)) \not\cong G(k(p) \# k(-p-1))$$

である。

結び目 $k(p)$ の pair を (G_p, φ_p) とすると、 $k(-p-1)$

は、 $k(p)$ の mirror image であるから、その pair は、 $(G_p, \varphi_p \circ \iota)$ で与えられる。

§ 5.1 Pretzel knots と Symmetries

k を、3次元球面 S^3 中の結び付けられた結び目とする。 k に対する triple (G, φ, φ^*) とは、 (G, φ) が、 k の pair で、 φ^* が、 $\mathbb{Z}$ から G への準同型写像で、 $(\varphi(1), \varphi^*(1))$ が k の meridian-longitude pair であるものと言う ([9], Chapter VII, §1)。1次元結び目 k_1 と k_2 の triple $(G_1, \varphi_1, \varphi_1^*)$ と $(G_2, \varphi_2, \varphi_2^*)$ が同型 (written $(G_1, \varphi_1, \varphi_1^*) \cong (G_2, \varphi_2, \varphi_2^*)$) とは、 G_1 から G_2 への群同型写像 f で、 $f \circ \varphi_1 = \varphi_2$, $f \circ \varphi_1^* = \varphi_2^*$ となるものが存在することである。

準定理 .2 ([9], Chapter VII, §3) k を S^3 中の結び目、 (G, φ, φ^*) を k の triple とする。

- 1) k が invertible ならば、 $(G, \varphi, \varphi^*) \cong (G, \varphi \circ \iota, \varphi^* \circ \iota)$ 、
- 2) k が positive-amphicheiral ならば、 $(G, \varphi, \varphi^*) \cong (G, \varphi \circ \iota, \varphi^*)$
- 3) k が negative-amphicheiral ならば、 $(G, \varphi, \varphi^*) \cong (G, \varphi, \varphi^* \circ \iota)$ 、

準定理 5.3 torus knot, 2-bridge knot, 任意の整数 p, q, r に対する $(2p, q, r), (p, q, q), (p, q, \pm 1)$ 型の pretzel knot の pair は、trivial knot の pair $(\mathbb{Z}, id_{\mathbb{Z}})$ に、 S -同値である。

準定理 5.2 より、問題に対する反例には、invertible knot や positive-amphicheiral knot が使えないことになる。よって、準定理 5.3 に list されている結び目は使えない。そこで、最も簡単な場合として、 $(2p+1, 3, -3)$ 型の pretzel knot について考えることにする。定理 5.1 の注意から、 $p \geq 0$ としてよい。

定理 5.4 pretzel knot $k(p)$, $p \geq 0$, の pair は、

- (i) distinct,
- (ii) C において (よって K_1 において) 既約,
- (iii) $(G_p, \varphi_p) \not\cong (G_p, \varphi_p \circ \iota) \iff p \neq 0, 1$

を満たす。

証明。結び目群 G_p は、次の表示をもつ：

$$(5.4) \mathcal{P} = \left\langle x, y, z ; \begin{aligned} (xz^{-1})^{-2} x (xz^{-1})^2 &= (zy^{-1})^2 y (zy^{-1})^{-2}, \\ (yx^{-1})^p y (yx^{-1})^{-p} &= (xz^{-1})^{-1} z (xz^{-1}) \end{aligned} \right\rangle$$

このとき、 $k(p)$ の triple $(G_p, \varphi_p, \varphi_p^*)$ は、 $\varphi(1) = x$ 、
 $\varphi^*(1) = (xz^{-1})^2 (zy^{-1})^2 (yx^{-1})^{-p} (xz^{-1})^{-1} (zy^{-1})^{-1} (yx^{-1})^{p+1}$ で
 例えは与えられる。次に、全ての整数 i に対し、 $a_i =$
 $x^i y x^{i-1}$, $b_i = x^i z x^{i-1}$ とおく。

$$(5.5) \mathcal{P} = \left\langle x, a_i, b_i ; \begin{aligned} x a_i x^{-1} &= a_{i+1}, \quad x b_i x^{-1} = b_{i+1}, \\ b_i^2 b_{i+1}^{-1} &= (b_i a_i^{-1})^2 a_i (b_{i+1} a_{i+1}^{-1})^{-2}, \\ a_i^{p+1} a_{i+1}^{-p} &= b_i^2 b_{i+1}^{-1}, \quad i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\rangle$$

となり、さらに、

$$(5.6) \mathcal{P} = \left\langle x, a_i, b_i ; \begin{aligned} x a_i x^{-1} &= a_{i+1}, \quad x b_i x^{-1} = b_{i+1}, \\ a_i &= (a_i b_i^{-1} a_i b_i) (b_{i+1}^{-1} a_{i+1}^{-1} b_{i+1} a_{i+1}^{-1}), \\ b_i &= (b_i^{-1} a_i^p) a_i (a_{i+1}^{-p} b_{i+1}), \quad i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\rangle$$

$$(5.7) = \left\langle x, a_i, b_i ; \begin{aligned} x a_i x^{-1} &= a_{i+1}, \quad x b_i x^{-1} = b_{i+1}, \\ b_i^{-1} a_i b_i &= a_{i+1} b_{i+1}^{-1} a_{i+1} b_{i+1}, \\ b_i^{-2} a_i^{p+1} &= b_{i+1}^{-1} a_{i+1}^p, \quad i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\rangle$$

このとき、 $\varphi_p(1) = x$ 、 $\varphi_p^*(1) = b_0^2 (b_0 a_0^{-1})^2 a_0^{-p} b_0^{-1} (b_0 a_0^{-1})^{-1} a_0^{p+1}$ となる。(5.7)より、 G_p の交換子群 $[G_p, G_p]$ は、次のように表わせる。

$$(5.8) \quad \dots * H_{-2} * H_{-1} * H_0 * H_1 * H_2 * \dots$$

$$\begin{array}{cccc} A_{-2} = C_{-1} & A_{-1} = C_0 & A_0 = C_1 & A_1 = C_2 \\ B_{-2} = D_{-1} & B_{-1} = D_0 & B_0 = D_1 & B_1 = D_2 \end{array}$$

ここに、 H_i は自由群 $\langle a_i, b_i; \rangle$ 、 $A_i = b_i a_i b_i^{-1}$ 、 $B_i = b_i^2 a_i^{p+1}$ 、 $C_i = a_i b_i^{-1} a_i b_i$ 、 $D_i = b_i^{-1} a_i^p$ である。よって、 A_i と B_i で生成される群は、 H_i (又 H_{i+1}) の階数2の自由な真部分群である。さらに、 H_i は、 A_i と C_i と D_i で生成される ($a_i = C_i A_i^{-1}$ 、 $b_i = (C_i A_i^{-1})^p D_i^{-1}$)。また、 H_i のabel化群は、階数2の自由可換群で、 A_i と B_i で生成される部分群 $\langle A_i, B_i \rangle$ の、そこでの像は、指数2の部分群である。 $\langle A_i, B_i \rangle = \langle C_{i+1}, D_{i+1} \rangle$ の H_{i+1} のabel化群の中での像に関しても同様である。よって、pretzel knot $k(p)$ は、fibred knot ではない。

(i) $k(p)$ の Alexander 多項式を調べることにより、 G_p が各 p に対し、同型でないことが解かる。

(ii) (G_p, φ_p) が、各 p に対し、 G で既約であることを証明しよう。

群 G に対し、その交換子群 $[G, G]$ を、 G' で表わす。
また、 G の部分群 H に対し、 H の G での normal closure を、 H^G で表わす。さらに、 $a, b \in G$ に対し、 $a^b = bab^{-1}$, $H^b = bHb^{-1}$ とする。

(G_p, φ_p) が、 C で既約でないとは定する。すると、 C の元 (X, φ_X) と (Y, φ_Y) で、 $(G_p, \varphi_p) = (X, \varphi_X) * (Y, \varphi_Y)$ かつ、 $X \neq \mathbb{Z}$, $Y \neq \mathbb{Z}$ となるものが存在する。定理 2.3 より、 $G_p' = X' * Y'$ (自由積) で、 $X' \neq 1$, $Y' \neq 1$ となる。 G_p' の任意の元 w に対し、 $L(w)$ を、自由積 $X' * Y'$ の意味での w の syllable length とする。

I. $L(a_i) = 1$ の場合: $a_i \in X'$ と仮定してよい。すると、 $(G_p / a_i^{G_p})' \cong (X / a_i^{X'})' * Y' \cong \langle b_i; b_{i+1} = b_i^2 \rangle \cong \mathbb{Q}_2$, the group of the rational numbers with denominator a nonnegative power of 2 under addition. $\mathbb{Q}_2$ は、自由積の意味で既約であり、 $Y' \neq 1$ であるから、定理より、 $Y' \cong \mathbb{Q}_2$ 。これは矛盾である。

II. $L(b_i) = 1$ の場合: $b_i \in X'$ と仮定してよい。すると、 $Y' \cong \langle a_i; a_i = a_{i+1}^2, a_i^{p+1} = a_{i+1}^p \rangle = \langle a_i; a_i = a_{i+1}^2, a_{i+1}^{p+2} = 1 \rangle$ 。よって、 $p \neq 2$ であるから、 $Y' \cong \langle a; a^l = 1 \rangle$ 。ここに、 l は、 $p+2$ の最大の奇数の約数である。すると、 $Y' = 1$ 又は、 Y' が、自明でない有限巡回群となり、

III. $L(a_i), L(b_i) \geq 2$ の場合: $E_i = D_i C_i$ 、 C_0 と E_0 の $X' * Y'$ での normal form を、それぞれ $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_u$ 、 $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_v$ とする。すると、 C_i, E_i の normal form は、それぞれ、 $\alpha_1^{x_i} \cdot \alpha_2^{x_i} \cdots \alpha_u^{x_i}$ 、 $\beta_1^{x_i} \cdot \beta_2^{x_i} \cdots \beta_v^{x_i}$ とする。というのは、 $C_i = C_0^{x_i} = \alpha_1^{x_i} \cdot \alpha_2^{x_i} \cdots \alpha_u^{x_i}$ であり、 x の X', Y' 上への作用が閉じているからである。(5.6)より、 $a_0 (= C_0 C_i^{-1})$ 、 $b_0 (= E_0 E_i^{-1})$ の normal form は、それぞれ、或る正の整数 $u' \leq u$ と $v' \leq v$ に対し、

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{u'-1} \cdot \alpha_{u'} (\alpha_{u'}^x)^{-1} \cdot (\alpha_{u'-1}^x)^{-1} \cdots (\alpha_1^x)^{-1},$$

$$\beta_1 \cdots \beta_{v'-1} \cdot \beta_{v'} (\beta_{v'}^x)^{-1} \cdot (\beta_{v'-1}^x)^{-1} \cdots (\beta_1^x)^{-1}$$

となる。 $L(a_i), L(b_i) \geq 2$ であるから、このことより、 $L(a_i), L(b_i) \geq 3$ (奇数)。

$$\beta_1 = \beta_1^x \quad \text{ならば、} \quad (\beta_1 X' \beta_1^{-1})^x = \beta_1 X' \beta_1^{-1}, \quad (\beta_1 Y' \beta_1^{-1})^x =$$

$\beta_1 Y' \beta_1^{-1}$ 。また、 $G_P' = \beta_1 X' \beta_1^{-1} * \beta_1 Y' \beta_1^{-1}$ である。よって、 a_i, b_i, X', Y' を、それぞれ、 β_1 による共役 $a_i^{\beta_1}, b_i^{\beta_1}, X'^{\beta_1}, Y'^{\beta_1}$ で置きかえることにより、 $\beta_1 \neq \beta_1^x$ と仮定してもよいであろう。

$a_0 = c_0 c_1^{-1}$ であるから、 $a_1 = (b_0^{-1} a_0 b_0) (b_1^{-1} a_1^{-1} b_1)$ となる。従って、

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad & \alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \cdots (\alpha_2^{x_2})^{-1} \cdot (\alpha_1^{x_1})^{-1} \\
 &= (\beta_1^{x_1} \beta_2^{x_2} \cdots \beta_2^{-1} \beta_1^{-1}) (\alpha_1 \alpha_2 \cdots (\alpha_2^x)^{-1} \cdot (\alpha_1^x)^{-1}) \\
 &\quad \cdot (\beta_1 \beta_2 \cdots (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}) \cdot (\beta_1^{x_2} \beta_2^{x_2} \cdots (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}) \\
 &\quad \cdot (\alpha_1^{x_2} \alpha_2^{x_2} \cdots (\alpha_2^x)^{-1} \cdot (\alpha_1^x)^{-1}) \cdot (\beta_1^x \beta_2^x \cdots (\beta_2^{x_2})^{-1} \cdot (\beta_1^{x_2})^{-1})。
 \end{aligned}$$

III-1. $\alpha_1 \neq \beta_1$ の場合： (5.9) の左辺を見ると、 a_1 の syllable の最初は、 α_1^x である。一方、 $L(a_1) \geq 3$ かつ $\beta_1 \neq \beta_1^x$ より、(5.9) の右辺から、 a_1 の最初の syllable が β_1^x となる。よって、 $\alpha_1^x = \beta_1^x$ 。故に、 $\alpha_1 = \beta_1$ となり矛盾。

III-2. $\alpha_1 = \beta_1$ の場合： このとき、 $\alpha_1^x = \beta_1$ ならば、 $\beta_1^x = \beta_1$ となるので、 $\alpha_1^x \neq \beta_1$ である。(5.9) より、 $L(a_1)$

$$\geq 2(L(b_0) + L(a_0) + L(b_0) - 1) - 2L(b_0) - 1 = 2L(a_1) - 3.$$

よって、 $L(a_0) = L(a_1) \leq 3$ 。 $L(a_i) \geq 3$ であつたか

ら、 $L(a_i) = 3$ とする。そこで、 $a_1 \cdot a \cdot (a_1^x)^{-1}$ を a_0 の normal form とする。(5.5)の関係式 $a_0^{p+1} a_1^{-p} = b_0^2 b_1^{-1}$ より、

$$\begin{aligned} (5.10) \quad & (a_1 \cdot a \cdot (a_1^x)^{-1})^{p+1} \cdot (a_1^{x^2} \cdot (a^x)^{-1} \cdot (a_1^x)^{-1})^p \\ &= (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}) \cdot (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}) \\ & \quad \cdot (\beta_1^{x^2} \cdot \beta_2^{x^2} \cdots (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}). \end{aligned}$$

(5.10) の左辺の normal form は、

$$\begin{aligned} (5.11) \quad & \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1} \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1} \beta_1^{x^2} \cdot \beta_2^{x^2} \cdots \\ & \quad \cdot (\beta_2^x)^{-1} \cdot (\beta_1^x)^{-1}. \end{aligned}$$

で与えられる。

1) $p=0$ の場合: (5.10) の左辺は $a_1 a (a_1^x)^{-1}$ 。よって $L(a_1 a (a_1^x)^{-1}) = 3$ 。一方、(5.10) の右辺の syllable length は、 $3L(b_0) - 2 \geq 7$ となり、矛盾。

2) $p=1$ の場合: (5.10) の左辺、右辺を比較することにより、 $b_0 = \beta_1 \beta_2 (\beta_2^x)^{-1} (\beta_1^x)^{-1} = a_1 a (a_1^x)^{-1} = a_0$

となり、 $H_0 = \langle a_0, b_0 \rangle$ が、階数 2 の自由群であることに矛盾する。

3) $p \geq 2$ の場合: (5.10) の左辺の normal form は、

$$(5.12) \quad \alpha_1 \cdot \alpha \cdot (\alpha_1^x)^{-1} \alpha_1 \cdot \alpha \cdot \dots \cdot (\alpha_1^x)^{-1} \alpha_1 \cdot \alpha \cdot (\alpha_1^x)^{-1} \alpha_1^{x^2} \cdot (\alpha^x)^{-1} \cdot (\alpha_1^x)^{-1} \alpha_1^{x^2} \\ \dots \cdot (\alpha_1^x)^{-1} \alpha_1^{x^2} \cdot (\alpha^{x^{p-1}}) \cdot (\alpha_1^x)^{-1}.$$

(5.11) の syllable length は、 $3L(b_0) - 2$ であり、(5.12) の syllable length は、 $3(2p+1) - 2p = 4p+3$ となる。よって、 $L(b_0) = \frac{1}{3}(4p+5)$ 。(5.11) と (5.12) を比べることにより、 $\beta_2 = \alpha = (\beta_2^x)^{-1} = (\alpha^x)^{-1}$ 且つ、 $\beta_3 = (\alpha_1^x)^{-1} \alpha_1^{x^2}$ を得る。故に、 $\alpha^{x^2} = \alpha$ 且つ、 $\alpha_1^{x^2} = \alpha_1$ 。さらに、 $b_0 = \beta_1 \beta_2 \dots (\beta_2^x)^{-1} (\beta_1^x)^{-1} = \alpha_1 [\alpha_1 (\alpha_1^x)^{-1} \alpha]^{-\frac{2}{3}(p-1)} \alpha (\alpha_1^x)^{-1}$ 。よって、 $a_0^{x^2} = a_0$ 且つ、 $b_0^{x^2} = b_0$ 。従って、 $H_{2i} = H_0$ 、 $H_{2i+1} = H_1$ が、全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し成り立つ。よって、 G_p' は、有限生成となり、(5.8) に矛盾する。

(1), (2), (3) の部分の証明は、 p を負の整数に取って、次の様に、簡単に出来る。この場合、(5.10) の左辺の normal form の最初の syllable は、 α_1^x である。(なぜなら $\alpha_1 \neq \alpha_1^x$ 。すると、 $\alpha_1^x = \beta_1$ となり矛盾である。)

(iii) の証明。準定理 5.3 より、 $p=0, 1$ の場合に、
 $(G_p, \varphi_p) \cong (G_p, \varphi_p \circ \iota)$ となることは明らかである。故
 に、ある $p \geq 0$ が、 $(G_p, \varphi_p) \cong (G_p, \varphi_p \circ \iota)$ を満たすな
 らば、 $p=0$ 又は、 1 であることを示す。

$(G_p, \varphi_p) \cong (G_p, \varphi_p \circ \iota)$ を与える G_p の自己同型写像を
 f とする。

補題 5.13 $f \circ \varphi_p^* = \varphi_p^*$ 又は、 $\varphi_p^* \circ \iota$ 。

証明。まず、 $k(p)$ が、cable knot でないことを示そう。
 もし、 $k(p)$ が cable knot であるならば、 $k(p)$ の
 companion λ が存在する。その order μ は ≥ 2 である。
 結び目 k の bridge number を、 $b(k)$ で表わす。すると、
 [] により、 $\mu \cdot b(\lambda) \leq b(k(p))$ 。よって、 $b(k(p)) \geq$
 4 。ところが、 $b(k(p)) \leq 3$ であるから、矛盾。

さて、(ii) より、 $k(p)$ は、prime knot である。故に、
 J. Simon [] により、 $\varphi_p^*(\mathbb{Z}) = C_{G_p}(\varphi_p(1)) \cap G_p'$ とな
 る。ここに、群 G の元 g に対し、 $C_G(g)$ は、 g の G にあ
 ける中心化群である。すると、 $f \circ \varphi_p^*(\mathbb{Z}) = C_{G_p}(f \circ \varphi_p(1))$
 $\cap G_p' = C_{G_p}(\varphi_p \circ \iota(1)) \cap G_p' = C_{G_p}(\varphi(-1)) \cap G_p' =$

$C_{G_P}(\varphi(1)) \cap G_{P'} = \varphi_P^*(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ となる。故に、 $f \circ \varphi_P^* = \varphi_P^*$ または、 $\varphi_P^* \circ \iota$ となる。 //

今、 $\hat{G}_P = G_P / \varphi_P^*(1)^{G_P}$ 、 ζ_P を G_P から $\hat{G}_P$ への、自然な全射準同型写像とする。すると、補題 5.13 により、 $\hat{f} = \zeta_P \circ f$ かつ、 $(\hat{G}_P, \zeta_P \circ \varphi_P) \cong (\hat{G}_P, \zeta_P \circ \varphi_P \circ \iota)$ を与える。 $\varphi_P^*(1) = A_0^{-1} B_0^{-1} A_0 B_0$ であったから、 $\hat{G}_P$ は、次の表示をもつ。

$$(5.14) \quad \left\langle x, a_i, b_i ; a_i^x = a_{i+1}, b_i^x = b_{i+1}, A_i = C_{i+1}, B_i = D_{i+1}, A_0^{-1} B_0^{-1} A_0 B_0, i \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

G_P に於ては、全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し、 $\varphi_P^*(1) = A_i^{-1} B_i^{-1} A_i B_i$ である。また、 $\hat{H} = \langle a, b ; A^{-1} B^{-1} A B \rangle$, $A = b^{-1} a b$, $B = b^2 a^{p+1}$ 、なる群においては、 $\langle A, B \rangle$ 、さらに、 $\langle C, D \rangle$, $C = a b^{-1} a b$, $D = b^{-1} a^p$, は、階数 2 の自由可換群になっている。よって、 $\hat{G}_P'$ は、

$$(5.15) \quad \cdots * \hat{H}_{-2} * \hat{H}_{-1} * \hat{H}_0 * \hat{H}_1 * \hat{H}_2 * \cdots$$

$$\begin{array}{cccc} A_{-2} = C_{-1} & A_{-1} = C_0 & A_0 = C_1 & A_1 = C_2 \\ B_{-2} = D_{-1} & B_{-1} = D_0 & B_0 = D_1 & B_1 = D_2 \end{array}$$

となっている。ここに、 $\hat{H}_i = \langle a_i, b_i ; A_i B_i = B_i A_i \rangle$ 。

補題 5.16 或る $m \in \mathbb{Z}$ と $d \in \hat{G}_p'$ に対し、 $\hat{f}(\hat{H}_0) = \hat{H}_m^d$.

証明。 $\langle A_i, B_i \rangle$ の自明でない元と可換な $\hat{G}_p'$ の元を計算することによって証明する。この目的の為、まず、 $\langle A_i, B_i \rangle$ 又は、 $\langle C_i, D_i \rangle$ の自明でない元各々の $\hat{H}_i$ に於ける centralizer を調べることにする。

準補題 5.17 任意の整数 i に対し、

$$1) \quad C_{\hat{H}_i}(A_i^q B_i^r) = \begin{cases} \langle A_i, B_i \rangle & \text{if } q \neq r(p+1) \\ \hat{H}_i & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$2) \quad C_{\hat{H}_i}(C_i^q D_i^r) = \begin{cases} \langle C_i, D_i \rangle & \text{if } 2q \neq r \\ \hat{H}_i & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$3) \quad Z(\hat{H}_i) = \langle A_i, B_i \rangle \cap \langle C_i, D_i \rangle = \langle A_i^{p+1} B_i \rangle.$$

$$4) \quad Z(\hat{H}_i) \cap Z(\hat{H}_{i+1}) = 1.$$

$$5) \quad \hat{H}_i \cap \hat{H}_{i+3} = 1.$$

証明。 $i=0$ の場合について、証明すれば十分であろう。 $x_j = b_0^j a_0 b_0^{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, とする。すると、 $a_0^{\hat{H}_0}$ は次のような表示をもつ。

$$(5.18) \quad \langle x_j ; x_{j-1}^{-1} x_j^{-p-1} x_{j+1} x_j^{p+1}, j \in \mathbb{Z} \rangle$$

これは、次の表示に等しい。

$$(5.19) \quad \langle x_0, x_1 ; \rangle.$$

故に、 $\hat{H}_0$ は次の表示をもつ。

$$(5.20) \quad \langle b_0, x_0, x_1 ; x_0^{b_0} = x_1, x_1^{b_0} = x_1^{p+1} x_0 (x_1^{p+1})^{-1} \rangle.$$

よって、次の等式が成り立つ。

$$(5.21) \quad b_0^{2j} x_\epsilon b_0^{-2j} = (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^j x_\epsilon (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{-j},$$

$$j \in \mathbb{Z}, \epsilon = 0, 1.$$

1) の証明。 $A = A_0^{b_0}$ 、 $B = (B_0^{-1})^{b_0}$ とする。すると、
 $A = x_0$ 、 $B = x_1^{-p-1} b_0^2$ 。等式 (5.21) により、 $A^q B^{-r}$
 $= x_0^{q-r(p+1)} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^r b_0^{-2r}$ 。 W を、 $C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r})$ の元
とす。

1. $W = W' b_0^{2m}$ 、 $W' (\neq 1) \in a_0^{\hat{H}_0}$ の場合： $W^* =$
 $W B^{-m}$ とおく。 W と B は、 $C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r})$ の元であるか
ら、 $W^* \in a_0^{\hat{H}_0}$ であり、 $(A^q B^{-r}) W^* = W^* (A^q B^{-r})$ とな
る。 よって、

$$\begin{aligned}
 (5.22) \quad W^* &= (A^q B^{-r})^{-1} W^* (A^q B^{-r}) \\
 &= b_0^{2r} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^r x_0^{-q+r(p+1)} W^* x_0^{q-r(p+1)} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^r b_0^{-2r} \\
 &= x_0^{-q+r(p+1)} W^* x_0^{q-r(p+1)}.
 \end{aligned}$$

$a_0^{\hat{H}_0}$ は自由群であり、 $W^* \in a_0^{\hat{H}_0}$ であるから、 $q \neq r(p+1)$ ならば、 $C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r}) \leq \langle A, B \rangle$ 。よって、 $C_{\hat{H}_0}(A_0^q B_0^r) \leq \langle A_0, B_0 \rangle$ 。一方、 $\langle A_0, B_0 \rangle$ は、可換群であるから、 $C_{\hat{H}_0}(A_0^q B_0^r) = \langle A_0, B_0 \rangle$ 。また、 $q = r(p+1)$ ならば、(5.22) より、 $a_0^{\hat{H}_0}$ の任意な元 a 、 $A^q B^{-r}$ と可換となるから、 $C_{\hat{H}_0}(A_0^q B_0^r) = \langle a_0, B \rangle = \hat{H}_0$ 。

2. $W = W' b_0^{2m+1}$, $W' \in a_0^{(\neq 1)\hat{H}_0}$ の場合: $W^* = W B^{-m} b_0^{-1}$ とおく。すると、 $W^* \in a_0^{\hat{H}_0}$ 、かつ、 $(A^q B^{-r}) W^* b_0 = (A^q B^{-r}) W^* b_0$ 。故に、

$$\begin{aligned}
 (5.23) \quad W^* &= b_0^{2r} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^q x_0^{-q+r(p+1)} W^* b_0 x_0^{q-r(p+1)} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{-q} b_0^{-2r-1} \\
 &= x_0^{-q+r(p+1)} W^* x_0^{q-r(p+1)}.
 \end{aligned}$$

$a_0^{\hat{H}_0}$ は自由群であり、 $W^* \in a_0^{\hat{H}_0}$ であるから、 $q \neq r(p+1)$ ならば、 $W^* = 1$ となり、 $W = b_0 B^m = B_0^m b_0$ 。とすると、 $q = r(p+1)$ で、 $C_{\hat{H}_0}(A_0^q B_0^r) = C_{\hat{H}_0}(A^q B^{-r}) = \hat{H}_0$ 。

2) の証明. $C = C_0^{b_0}$, $D = (D_0^{-1})^{b_0}$ とする. すると,

$C = x_1 x_0$ かつ $D = x_1^{-p} b_0$. $C \hat{H}_0 (C^q D^{-r})$ の元 $W = W' b_0^m$ とする. ここに, $W' \in a_0^{\hat{H}_0}$ である. 更に, $W^* = W D^{-m}$ とする. すると, $(C^q D^{-r}) W^* = W^* (C^q D^{-r})$.

1'. $r = 2r'$ の場合: $C^q D^{-2r'} = (x_1 x_0)^{q-r'} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'} b_0^{-2r'}$. 故に,

$$\begin{aligned} W^* &= (C^q D^{-2r'})^{-1} W^* (C^q D^{-2r'}) \\ &= b_0^{2r'} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{-r'} (x_1 x_0)^{r'-q} W^* (x_1 x_0)^{q-r'} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'} \\ &\quad \cdot b_0^{-2r'} \\ &= (x_1 x_0)^{r'-q} W^* (x_1 x_0)^{q-r'}. \end{aligned}$$

よって, $W^* = (x_1 x_0)^s$ なる整数 s に対し, $W^* = (x_1 x_0)^s (= C^s)$ である. 1) の場合同様, $2q \neq r$ ならば, $C \hat{H}_0 (C_0^q D_0^r) = \langle C_0, D_0 \rangle$, $2q = r$ ならば, $C \hat{H}_0 (C_0^q D_0^r) = \hat{H}_0$ である.

2'. $r = 2r' + 1$ の場合: $C^q D^{-2r'-1} = (x_1 x_0)^{q-r'-1} x_1^{-p} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'+1} b_0^{-r'-1}$. $W^*(x_0, x_1) \in$, $W^* (\in a_0^{\hat{H}_0} = \langle x_0, x_1; \rangle)$ を表わす x_0, x_1 の語とする. すると,

$$\begin{aligned}
& b_0 W^*(x_0, x_1) b_0^{-1} \\
&= b_0^{2r'+2} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{-r'-1} x_1^p (x_1 x_0)^{1+r'-q} W^*(x_0, x_1) (x_1 x_0)^{q-r'-1} x_1^{-p} (x_1^{p+1} x_0^{p+1})^{r'+1} b_0^{-2r'-2} \\
&= x_1^p (x_1 x_0)^{1+r'-q} W^*(x_0, x_1) (x_1 x_0)^{q-r'-1} x_1^{-p}.
\end{aligned}$$

$$b_0 W^*(x_0, x_1) b_0^{-1} = x_1^{p+1} W^*(x_1, x_0) x_1^{-p-1} \text{ であるから,}$$

$$W^*(x_0, x_1) = (x_1 x_0)^{q-r'-1} x_1 W^*(x_1, x_0) x_1^{-1} (x_1 x_0)^{1+r'-q}.$$

故に、或る整数 s に対し、 $W^*(x_0, x_1) = (x_1 x_0)^s (= C^s)$ である。よって、 $C_{\hat{H}_0}(C_0^q D_0^r) = \langle C_0, D_0 \rangle$ である。

3) の証明。1), 2) より、 $\langle C_0, D_0 \rangle$ が可換、 $\hat{H}_0 = \langle A_0, B_0, C_0, D_0 \rangle$ より、

$$\mathbb{Z}(\hat{H}_0) = \langle A_0^{p+1} B_0 (= C_0 D_0^2) \rangle = \langle A_0, B_0 \rangle \cap \langle C_0, D_0 \rangle.$$

4) の証明。 $\mathbb{Z}(H_0) \cap \mathbb{Z}(H_1) = \langle A_0^{p+1} B_0 \rangle \cap \langle C_1, D_1^2 \rangle = \langle A_0^{p+1} B_0 \rangle \cap \langle A_0, B_0^2 \rangle = \{1\}.$

5) の証明。 $\hat{H}_0 \cap \hat{H}_3 = (\hat{H}_0 \cap (\hat{H}_1 * \hat{H}_2 * \dots)) \cap ((\dots$
 $\quad \quad \quad \begin{matrix} A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2 \end{matrix}$

$$* \hat{H}_1 * \hat{H}_2) \cap \hat{H}_3) = (\hat{H}_0 \cap \hat{H}_1) \cap (\hat{H}_2 \cap \hat{H}_3) = (\hat{H}_0 \cap \hat{H}_1)$$

$$\quad \quad \quad \begin{matrix} A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2 \end{matrix}$$

$$\cap (\hat{H}_1 \cap \hat{H}_2) \cap ((\hat{H}_1 \cap \hat{H}_2) \cap (\hat{H}_2 \cap \hat{H}_3)) = (\langle C_1, D_1 \rangle \cap$$

$$\langle A_1, B_1 \rangle \cap (\langle C_2, D_2 \rangle \cap \langle A_2, B_2 \rangle) = \mathbb{Z}(\hat{H}_1) \cap \mathbb{Z}(\hat{H}_2) = \{1\}.$$

(準補助定理証明終)

次に、 G'_p のどのような元が、 $\langle A_i, B_i \rangle$ の自明でない元と可換になるかを調べてみよう。

準補題 5.24 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し、 $V \in \hat{G}'_p$ が、 $\langle A_i, B_i \rangle$ の自明でない元と可換ならば、 $V \in \hat{H}_i$ 又は、 $V \in \hat{H}_{i+1}$ である。

証明。 $i=0$ の場合について証明すれば十分である。

$\hat{G}'_p$ を融合部分群 $\langle A_2, B_2 \rangle (= \langle C_3, D_3 \rangle)$ をもつ、 $(\dots * \hat{H}_1 * \hat{H}_2)$ と $(\hat{H}_3 * \hat{H}_4 * \dots)$ の融合積と考える。準

$$\begin{matrix} A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A_3 = C_4 \\ B_3 = D_4 \end{matrix}$$

補題 5.17.5) と、Theorem 4.5 ([]) より、 $V \in \hat{G}'_p$ が、 $\langle A_0, B_0 \rangle$ の自明でない元と可換ならば、 $V \in (\dots * \hat{H}_1 * \hat{H}_2)$ 。

$$\begin{matrix} A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2 \end{matrix}$$

同様に、 $V \in (\hat{H}_{-1} * \hat{H}_0 * \dots)$ とも言える。よって、 $V \in J = \hat{H}_{-1} * \hat{H}_0 * \hat{H}_1 * \hat{H}_2$ 。次に、 J を、融合部分群

$$\begin{matrix} A_{-1} = C_0 & A_0 = C_1 & A_1 = C_2 \\ B_{-1} = D_0 & B_0 = D_1 & B_1 = D_2 \end{matrix}$$

$\langle A_{-1}, B_{-1} \rangle (= \langle C_0, D_0 \rangle)$ をもつ、 $\hat{H}_{-1}$ と $P = \hat{H}_0 * \hat{H}_1 * \hat{H}_2$

$$\begin{matrix} A_0 = C_1 & A_1 = C_2 \\ B_0 = D_1 & B_1 = D_2 \end{matrix}$$

の融合積と考える。もし、 $V \in J$ が、 $\langle A_0, B_0 \rangle - \hat{H}_1$
 $= \langle A_0, B_0 \rangle - (\langle A_0, B_0 \rangle \cap \hat{H}_1) = \langle A_0, B_0 \rangle - \langle A_0, B_0 \rangle \cap \langle C_0, D_0 \rangle$
 $= \langle A_0, B_0 \rangle - \langle A_0^{P+1}, B_0 \rangle$ の自明でない元と可換ならば、
 [] の Theorem 4.5 により、 $V \in P$ である。準補題 5.17.1) より、 $\langle A_0^{P+1}, B_0 \rangle (= \langle C_0, D_0^2 \rangle = \langle A_1, B_1^2 \rangle)$ の自明でない元と可換な $\hat{H}_1$ の元は、 $\langle A_1, B_1 \rangle (\subseteq \hat{H}_0)$ に属する。故に、再び、[] の Theorem 4.5 より、 $V \in J$ が、 $\langle A_0^{P+1}, B_0 \rangle$ の自明でない元と可換ならば、 $V \in P$ である。同様に、 $V \in \hat{H}_1 * \hat{H}_0 * \hat{H}_1$ となり、 $V \in \hat{H}_0 * \hat{H}_1$ 。よ

$$\begin{array}{cc} A_1 = C_0 & A_0 = C_1 \\ B_1 = D_0 & B_0 = D_1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A_0 = C_1 \\ B_0 = D_1 \end{array}$$

って、最後に、準定理 5.17.1), 2), 3) と、[] の Theorem 4.5 より、次を得る：

- i) V が $\langle A_0, B_0 \rangle - (\mathbb{Z}(\hat{H}_0) \vee \mathbb{Z}(\hat{H}_1))$ の自明でない元と可換ならば、 $V \in \langle A_0, B_0 \rangle$ 、
- ii) V が $\mathbb{Z}(\hat{H}_0) = \langle A_0^{P+1}, B_0 \rangle$ の自明でない元と可換ならば、 $V \in \hat{H}_0$ 、
- iii) V が $\mathbb{Z}(\hat{H}_1) = \langle A_0, B_0^2 \rangle$ の自明でない元と可換ならば、 $V \in \hat{H}_1$ 。

(準補題 5.24 証明終)

；次に、 $\hat{f}(\langle A_0, B_0 \rangle)$ を考えてみよう。 $\langle A_0, B_0 \rangle$ は、

有限生成であるから、どの $g \in \hat{G}_p'$ に対しても、 $\hat{f}(\langle A_0, B_0 \rangle)^g \leq \hat{H}_\alpha * \dots * \hat{H}_{\alpha+\beta}$ となる整数 α と、自

$$\begin{array}{ll} A_\alpha = C_{\alpha+1} & A_{\alpha+\beta-1} = C_{\alpha+\beta} \\ B_\alpha = D_{\alpha+1} & B_{\alpha+\beta-1} = D_{\alpha+\beta} \end{array}$$

でない整数 β が存在する。このような β の最小を β_0 とし、それを与える g, α の対を、 g_0, α_0 とする。そこで、もし $\beta_0 = 0$ ならば、 $d = g_0^{-1}$ $m = \alpha_0$ に対し、補題 5.16 が成立する。よって、 $\beta_0 \geq 1$ としよう。 U

$$= \hat{H}_{\alpha_0} * \dots * \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0-1} \quad T = \hat{f}(\langle A_0, B_0 \rangle) \text{ と}$$

$$\begin{array}{ll} A_{\alpha_0} = C_{\alpha_0+1} & A_{\alpha_0+\beta_0-2} = C_{\alpha_0+\beta_0-1} \\ B_{\alpha_0} = D_{\alpha_0+1} & B_{\alpha_0+\beta_0-2} = D_{\alpha_0+\beta_0-1} \end{array}$$

すると、 $T^{g_0} \leq U * \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0}$ 。融合積に関する部

$$\begin{array}{l} A_{\alpha_0+\beta_0-1} = C_{\alpha_0+\beta_0} \\ B_{\alpha_0+\beta_0-1} = D_{\alpha_0+\beta_0} \end{array}$$

分群定理 (定理 1.) をこれに適用することにより、 T は、tree 積又は、tree 積の HNN 拡大になっている。 T が、 HNN 拡大の場合、 $\langle A_0, B_0 \rangle$ が階数 2 の自由可換群であるから、 T^{g_0} もそうである。よって、 T^{g_0} の base group は、無限巡回群 $S = \langle A_{\alpha_0+\beta_0-1}, B_{\alpha_0+\beta_0-1} \rangle^{d'} \cap T^{g_0} = \langle C_{\alpha_0+\beta_0}, D_{\alpha_0+\beta_0} \rangle^{d'} \cap T^{g_0}$ (d' は、 $\hat{G}_p'$ の或る元) となり、free part t は、 S に自明に作用している。準定理 5.24 により、 $t \in \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0-1}^{d'}$ 又は、 $t \in \hat{H}_{\alpha_0+\beta_0}^{d'}$ となる。これは、 T^{g_0} が、free part をもつことに反する。よって、 T が、tree 積の場合しか起らない。任意の可換群は、

融合積に関して完全既約である。故に、或る $\hat{G}_p'$ の元 d'' に対し、 $T^{g_0} = U^{d''} \cap T^{g_0}$ 又は、 $T^{g_0} = \hat{H}_{\alpha_0 + \beta_0}^{d''} \cap T^{g_0}$ となる。よって、 $T^{g_0 d''} \leq U^{d''}$ 又は、 $T^{g_0} \leq \hat{H}_{\alpha_0 + \beta_0}^{d''}$ となり、 β_0 の最小性に反する。故に、 $\beta_0 = 1$ となり、補題 5.16 は証明された。 //

補題 5.25 $\hat{H}_0$ の $\hat{G}_p'$ での正規化群 $N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) = \hat{H}_0$ 。

証明。 $\hat{G}_p'$ は、 $(\dots * \hat{H}_{-1} * \hat{H}_0)$ と $(\hat{H}_1 * \hat{H}_2 * \dots)$ の
 $\begin{matrix} A_{-1} = C_0 \\ B_{-1} = D_0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} A_1 = C_2 \\ B_1 = D_2 \end{matrix}$

融合積であり、その融合部分群 $\langle A_0, B_0 \rangle$ は、 $\hat{H}_0$ の真部分群であるから、 $N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) \leq (\dots * \hat{H}_{-1} * \hat{H}_0)$ 。同様
 $\begin{matrix} A_{-1} = C_0 \\ B_{-1} = D_0 \end{matrix}$

に、 $N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) \leq (\hat{H}_0 * \hat{H}_1 * \dots)$ 。故に、 $N_{\hat{G}_p'}(\hat{H}_0) \leq$
 $\begin{matrix} A_0 = C_1 \\ B_0 = D_1 \end{matrix}$

$(\dots * \hat{H}_{-1} * \hat{H}_0) \cap (\hat{H}_0 * \hat{H}_1 * \dots) = \hat{H}_0$ となり、補題
 $\begin{matrix} A_{-1} = C_0 \\ B_{-1} = D_0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} A_0 = C_1 \\ B_0 = D_1 \end{matrix}$

が証明される。 //

m, d を、準定理 で与えられるものとする。 $\hat{G}_p$ の自己同型写像 F を、 $F(g) = x^{-m} \hat{f}(g) x^m$, $g \in \hat{G}_p$, で定義

する。すると、 $F(x) = x^{-1}$ 、 $F(\hat{H}_0) = \hat{H}_0^{\bar{\alpha}}$ 、ここに $\bar{\alpha} = \alpha^{x^{-1}}$ である。 $F(\hat{H}_0 * \hat{H}_1) = F(\hat{H}_0) * F(\hat{H}_1) = F(\hat{H}_0) * F(\hat{H}_0^x)$
 $\begin{matrix} A_0 = C_1 \\ B_0 = D_1 \end{matrix}$ $\begin{matrix} F(A_0) = F(C_1) \\ F(B_0) = F(D_1) \end{matrix}$
 $= \hat{H}_0^{\bar{\alpha}} * (\hat{H}_0^{\bar{\alpha}})^{x^{-1}} = \hat{H}_0^{\bar{\alpha}} * \hat{H}_{-1}^{\bar{\alpha}^{x^{-1}}}$ とする。ここで、部分

群定理 1. を、 $F(\hat{H}_0 * \hat{H}_1) \leq \hat{G}_p' = (\dots * \hat{H}_{-2} * \hat{H}_{-1})$

* $(\hat{H}_0 * \hat{H}_1 * \dots)$ に適用すると、 $\bar{\alpha}^{x^{-1}} \in \hat{G}_p'$ である

$$\begin{matrix} A_{-1} = C_0 & A_0 = C_1 \\ B_{-1} = D_0 & B_0 = D_1 \end{matrix}$$

から、或る $\bar{\alpha} \in \hat{G}_p'$ に対し、 $F(\langle A_0, B_0 \rangle) = \langle C_0, D_0 \rangle^{\bar{\alpha}} \cap F(A_0, B_0)$

となることか解る。ところが、これをもとに、更に強

く、 $\langle C_0, D_0 \rangle^{\bar{\alpha}}$ 、 $\hat{H}_{-1}^{\bar{\alpha}}$ 、 $\hat{H}_0^{\bar{\alpha}}$ の3つの自明でない部分群だ

けか、 $\langle C_0, D_0 \rangle^{\bar{\alpha}} (= \langle A_{-1}, B_{-1} \rangle^{\bar{\alpha}})$ の自明でない元を中心

化群になり得る (準定理 5.17. 1), 2), 4), 準定理 5.24)

ことから、 $F(\langle A_0, B_0 \rangle) = \langle C_0, D_0 \rangle^{\bar{\alpha}}$ 、また、 $F(\hat{H}_0) = \hat{H}_0^{\bar{\alpha}}$ 、

$F(\hat{H}_1) = \hat{H}_{-1}^{\bar{\alpha}}$ と言える。 $F(x) = x^{-1}$ であるから、 $F(\langle C_0, D_0 \rangle)$

$$= F(\langle A_0^{x^{-1}}, B_0^{x^{-1}} \rangle) = F(\langle A_0, B_0 \rangle)^{F(x^{-1})} = (\langle C_0, D_0 \rangle^{\bar{\alpha}})^x =$$

$$\langle C_1, D_1 \rangle^{\bar{\alpha}^x}.$$

故に、 $\hat{H}_0^{\bar{\alpha}} = \hat{H}_0^{\bar{\alpha}^x}$ 。補題 5.25 より、 $d_0 = \bar{\alpha}^x \bar{\alpha}^x$ は、 $\hat{H}_0$ に属する。よって、 $\hat{G}_p$ の自己同型写

像 F は、次の6つを満たすことになる：

$$\textcircled{1} \quad F(\hat{H}_0) = \hat{H}_0^{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\alpha} \in \hat{G}_p'$$

$$\textcircled{2} \quad F(\langle A_0, B_0 \rangle) = \langle C_0, D_0 \rangle^{\bar{\alpha}} \quad (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{3} \quad F(\langle C_0, D_0 \rangle) = \langle A_0, B_0 \rangle^{\hat{\alpha}_{d_0}} (\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}), \quad d_0 \in \hat{H}_0,$$

$$\textcircled{4} \quad F(A_0) = (C_0^u D_0^v)^{\hat{\alpha}}, \quad u, v \in \mathbb{Z}, \quad \text{ならば}, \quad F(C_0) = (F(A_{-1}) = F(A_0^{\hat{\alpha}^{-1}}) = ((C_0^u D_0^v)^{\hat{\alpha}})^{\hat{\alpha}^{-1}} = (C_0^u D_0^v)^{\hat{\alpha}^{\hat{\alpha}^{-1}}})^{\hat{\alpha}_{d_0}} (A_0^u B_0^v)^{\hat{\alpha}_{d_0}},$$

$$\textcircled{5} \quad F(B_0) = (C_0^{u'} D_0^{v'})^{\hat{\alpha}}, \quad u', v' \in \mathbb{Z}, \quad \text{ならば}, \quad F(D_0) = (A_0^{u'} B_0^{v'})^{\hat{\alpha}_{d_0}}.$$

$$\textcircled{6} \quad (\text{準補題 5.17.3 より}) \quad F(A_0^{p+1} B_0) = ((A_0^{p+1} B_0)^{\hat{\alpha}})^{\pm 1}.$$

これにより、 F より、 a_0, b_0 を基底とする階数 2 の自由可換群 ($\mathbb{Z}$ -free module) $\bar{H}_0 = \hat{H}_0 / \hat{H}_0'$ 上の自己同型写像 $\bar{F}$ が定義される。 A_0, B_0, C_0, D_0 は、この $\bar{H}_0$ では、行ベクトル $(1, 0), (p+1, -2), (2, 0), (p, -1)$ とそれぞれ表わされる。そこで、 $\bar{F}$ に対応する $\bar{M}$ 正方形列を M とすると、 F の性質 $\textcircled{1} \sim \textcircled{6}$ により、

$$\textcircled{1}^* \quad \det M = \pm 1, \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2}^* \quad uv' - v'u = \pm 1,$$

$$\textcircled{3}^* \quad (1, 0)M = u(2, 0) + v(p, -1),$$

$$\textcircled{4}^* \quad (2, 0)M = u(1, 0) + v(p+1, -2),$$

$$\textcircled{5}^* \quad (p+1, -2)M = u'(2, 0) + v'(p, -1),$$

$$\textcircled{6}^* \quad (2p+2, -2)M = \pm(2p+2, -2).$$

となる整数 u, v, u', v' が存在することになる。簡単な

この計算から、この様な M は、 $p = -2, -1, 0, 1$ の場合だけ存在し、 $p \geq 0$ より、定理 5.4. iii) α - 証明された。

定理 5.1 の証明は、省略。

//

References

[1]

[2] Waldhausen, F., On irreducible 3-manifolds with which are sufficiently large. *Ann. Math.* 87 (1968), 56-88.

[3] Maeda, T., A Unique Decomposition for Knot-Like Groups, *Math. Seminar Notes* 6 (1978), 567-602

[4] Baumslag, G.,

[5] Karrass, A. & Solitar, D.; The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup, *Trans. Amer. Math. Soc.* 150 (1970), 227-255

[6]

[7] Hashizume, Y.; Unique factorization of links

[8] Shorler, T. P.; Separating, incompressible surfaces in 3-manifolds, *Inv. Math.* 52 (1972), 105-126

[9] Newirth ; Knot Groups