

生態系モデルでのサドル間遷移

東北大学電気通信研究所 茶碗谷 毅
(Email address: cha@sawada.riec.tohoku.ac.jp)

大自由度を持つ複雑な系においては、「不安定性を持つ定常的状态」に系の状態が接近することがしばしば見られている [1]。このような現象は、それぞれの不安定定常状態が持つカオス的な性質が関係している可能性があるともいわれているが、その機構についてはこれまでのところ必ずしも明らかにはなっていない。また「不安定性をもつ定常的状态」として静止状態を経由するような運動も様々な系で現れることが見つまっている [2]。ここでは生態系モデルの一種であるゲーム力学系 [3] というモデル系を使ってこの不安定状態間の遷移運動の背景にある力学的構造について解析した結果について紹介する。

ここで考える「不安定性を持つ定常状態」とは、力学系の言葉では「サドル」に対応するものである。通常、軌道がこのような状態に接近するためには初期条件がそのサドルの安定多様体の十分近くにある必要があり、一般的には軌道がサドルにいくらかでも接近するということは起こらない。しかし、相空間のなかにある種の構造が存在する場合には、一般的な初期条件を持つ軌道が、不安定な状態に接近することも起こり得る。このような構造の簡単な例としては、二次元のフローで表される系においてホモクリニック軌道が存在する場合に見ることができる。サドルの線形固有値の和が負になる場合には、軌道はホモクリニック軌道にそって運動しながら、次第にホモクリニック軌道に巻き付いて行く。サドルに近ければ近い程軌道の動きは遅くなるので、結果としては次第に周期がのびる振動がみられることになる。

これから紹介する現象には、このホモクリニックサイクルの高次元力学系への一種の拡張版と考えられるような、幾つかのサドルとそれらの間を結ぶヘテロクリニック軌道からなるネットワーク構造が関係する。二次元のフローにおけるホモクリニックサイクルは、一般的な力学系における分岐の際に現れる構造であったが、これから扱う構造は、特殊な制約条件を満たす系において現れるとみる方がよいだろう。ここでいう「特殊な制約条件」は、系の時間発展によって不変に保たれるような平面の存在をもたらすようなものである。例えば生態系のモデルの場合には個体数ゼロで与えられる集合が不変に保たれるし、発展方程式が適当な対称性を持つ場合には対称な状態からなる集合が不変に保たれる。「力学的」には特殊な条件であっても、多くの興味あるモデル系がこのような条件を満たしていると考えられる。

力学系の自由度が増加することによって、色々なタイプの複雑さを持った構造が現れることが考えられる。一つはサドルそのものが、単純な不安定性をもつ平衡点ではなく、「リミットサイクル崩れ」、あるいは「ストレンジアトラクタ崩れ」のような構造を持つサド

ルになるという方向がある。一方、サドルそのものは単純な平衡点であっても、ヘテロクリニック軌道のつくる大域的な構造が複雑になり、例えば枝別れをもつようなネットワークになるという方向の複雑化も考えられる。実際に大自由度系で見られる複雑な運動にはこれらの二つの要素がともに関係していると考えられるが、ここではネットワークの構造の複雑さが生み出す、軌道の振舞いのバラエティーを幾つか紹介する。

最も単純な例としては、幾つかのサドルの間をヘテロクリニック軌道が環状につないでいるような構造がある。このようなサイクルが一般的な初期条件を持つ軌道を引き付ける場合が存在することは、Lotka-Volterra 系において 1972 年に報告されている [4]。このサイクルに含まれる各サドルが、それぞれただ一つしか不安定方向を持たない場合には、その近傍における軌道の振舞いは、非定常ではあるが規則的なものになることがわかっている [5]。

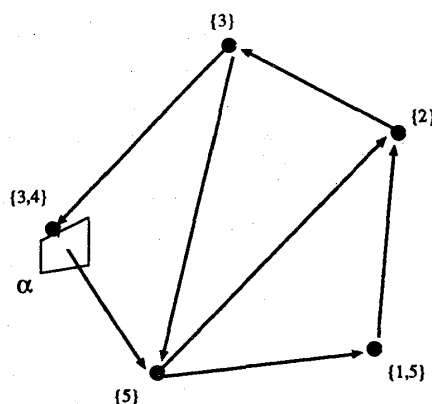


Figure 1: 例として挙げた系が持つヘテロクリニックネットワークの構造。{1} は x_1 以外の全ての成分が 0 となるようなサドルを表す。

二つ以上の不安定方向をもつサドルがある場合にも、そのサドルを含むヘテロクリニックネットワークへと軌道が引き寄せられる場合があることが見つかった [6]。例えば 5 成分を持つゲーム力学系

$$\frac{d}{dt}x_i = \left(\sum_j g_{ij}x_j - \sum_{j,k} g_{jk}x_jx_k \right) x_i, \quad (1)$$

(ただし x_i は、拘束条件 $\sum_i x_i = 1$ を満たすとする。) においては、パラメータ g_{ij} を

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1.0 & -20.0 & -0.4 & -1.0 & 1.0 \\ 1.5 & 0.0 & -0.7 & -7.3 & 0.5 \\ 0.32 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 \\ -0.9 & 0.8 & 1.0 & -1.0 & -0.1 \\ 0.0 & -8.0 & 0.7 & 1.3 & 0.0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

とした場合には、図 1 に示すようなヘテロクリニックネットワークが存在して、大部分の軌道はこのネットワークへと漸近することが見つかった [7]。

このネットワーク近傍での軌道の振舞いは、パラメータによってはカオス的な運動とヘテロクリニックサイクルへの漸近の特徴を併せ持ったものになる。次の図には g_{31} の値を 0.24, 0.25 及び 0.32 とした場合に見られる軌道の振舞いを示してある。ここで後の二つの場合には、軌道は幾つかのサドルを不規則性をもった順序で訪問するが、それらのサドル近傍における滞在時間は幾何級数的に長くなる、という現象がみられている。

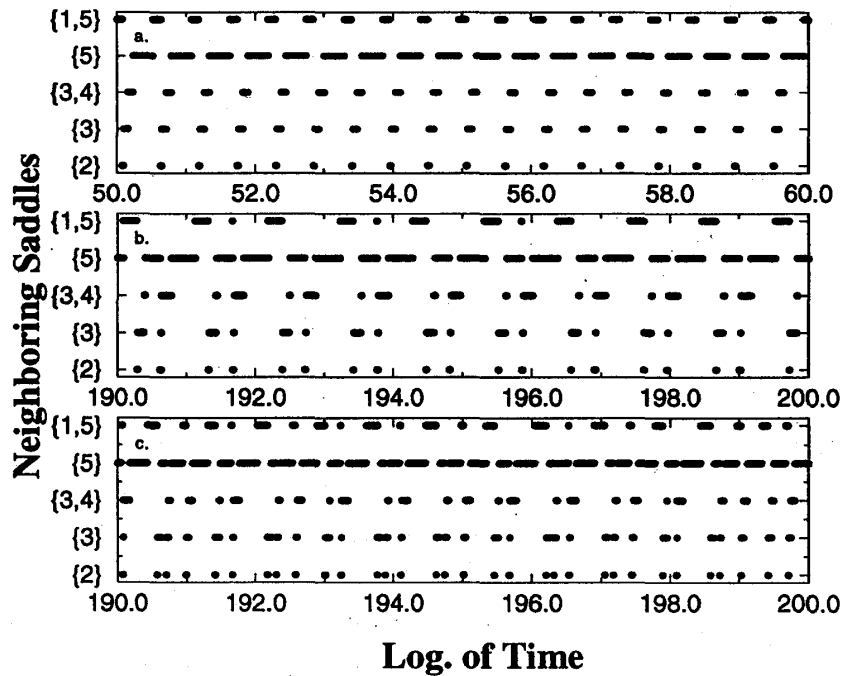


Figure 2: 数値的に得られたサドルの時系列の例。上段・中段・下段はそれぞれ $g_{31} = 0.24, 0.25, 0.32$ の場合に得られた時系列に対応する。どの場合にも初期条件として $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 0.2$ とした軌道について表示した。横軸に時間の対数を取り、その時刻に訪れているサドルを縦軸で表してある。

更に複雑な構造を持つヘテロクリニックネットワークが存在する場合には、可算無限個のアトラクタが共存するというような現象も起こりうるが見つかっている [8]。これは例えば 5 成分のゲーム力学系で

$$\begin{pmatrix} 0.0 & -0.4 & 1.0 & 0.05 & 0.2 \\ 0.6 & 0.0 & -2.5 & -0.2 & -0.2 \\ -0.4 & 1.0 & 0.0 & -0.8 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & 1.5 & 0.0 & -0.1 \\ 0.2 & -0.1 & -0.6 & 2.2 & 0.0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

とした場合に見られる。この場合には、図 3 のような「階層的」な構造を持つヘテロクリニックネットワークが存在するが、このネットワークに沿ったような形のリミットサイクルアトラクタが無数に共存する。更にパラメータの値によっては (例えば上の例で $g_{54} = 2.0$ とし

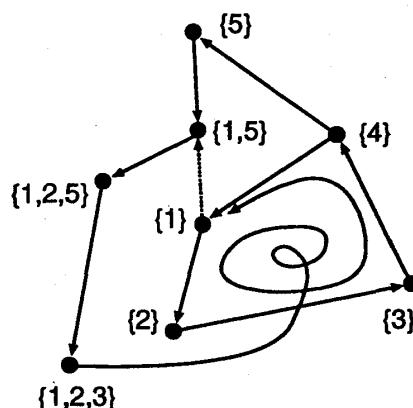


Figure 3: ヘテロクリニック軌道がつくるネットワークの模式図。{1} → {2} → {3} → {4} → {1} はそれ自身がサドル的な性質を持つヘテロクリニックサイクルになっている。

た場合)、可算無限個のカオス的なアトラクタが共存する場合も見つかっている。

生態系モデルで見られるこれらの力学的構造は、簡単ではあるが準安定状態間の遷移を繰り返す運動をもたらす一つの機構を与えている。適当な対称性を満たす準安定状態が関係する力学的構造に関しては、近年特にカオス的なサドルが関係する構造を中心として活発に研究が行われており、サドル近傍における相空間の構造が軌道の挙動に興味深い影響を及ぼすことが見られている [9]。これらの現象に関する研究の成果と、生態系モデルにおける比較的大域的な構造に重点をおいた研究の成果とを統合することにより、大自由度における準安定状態間の遷移を伴う現象の背後にある力学的構造を正しく捉えることが可能になるのではないだろうか。

References

- [1] 金子 邦彦他, 複雑系 - 生成と崩壊のダイナミクス, 数理科学, 1996 年 6 月号, 5-62 頁
- [2] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Structurally stable heteroclinic cycles*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **103**: 189-192, (1988). (対称性を持つ系におけるヘテロクリニックサイクルの存在)
- E. Knobloch and M. Silber, *Oscillatory convection in a rotating layer*, Physica **63D**: 213-232, (1993). (対流系モデルにおけるヘテロクリニックサイクルアトラクタ)
- P. Ashwin and J. W. Swift, *The dynamics of n weakly coupled identical oscillators*, J. Nonlinear Sci., **2**: 69-108, (1992). (振動子集団でみられるヘテロクリニックサイクルアトラクタ)
- K. Okuda, *New aspects of collective dynamics in globally coupled phase oscillators*, Thesis, Kyoto Univ., (1994). (振動子集団でみられるヘテロクリニックサイクルアトラクタ)
- D. Hansel, G. Mato and C. Meunier, *Clustering and slow switching in globally coupled phase oscillators*, Physical Review E, **48**: 3470-3477, (1993). (振動子集団でみられるヘテロクリニックサイクルアトラクタ)

- M. Dellnitz, M. Field, M. Golubitsky, J. Ma and A. Hohmann, *Cycling chaos*, Int. J. of Bifurcation and Chaos, **5**: 1243-1247, (1995). (カオスのサドル間のヘテロクリニックサイクル)
- A. S. Mikhailov and I. Yu. Poteryaiko, *Attractive separatrix loops in connectionist models*, Physica D, **53**: 13-24, (1991). (神経回路網モデルでのヘテロクリニックサイクル)
- S. Sasa and T. Chawanya, *Weakly chaotic population dynamics in random ecological networks*, preprint. (大自由度生態系モデルにおけるヘテロクリニック的運動)
- [3] P.D.Taylor and L.B.Jonker, *Evolutionarily Stable Strategies and Game Dynamics*, Mathematical Bioscience, **40**: 145-156, (1978). (ゲーム力学系を提案した論文)
- J. Hofbauer and K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, (1988); 日本語版: 生物の進化と微分方程式 (日本語訳: 竹内康博) 現代数学社 (1990). (ゲーム力学系に関する一般的な解説) (関連したモデルについての解説には、巖佐庸 数理生物学入門-生物社会のダイナミクスを探る HBJ 出版局 (1990)、甘利俊一 重定南奈子 石井一成 太鼓地武 弓場美裕 生命・生物科学の数理 岩波講座応用数学 [対象 8] (1993) などがある。)
- [4] R. M. May and W. J. Leonard, *Nonlinear aspects of competition between three species*, SIAM J. Appl. Math, **29**: 243-252, (1975). (生態系モデルにおけるヘテロクリニックサイクル)
- [5] A. Gaunersdorfer, *Time averages for heteroclinic attractors*, SIAM J. Appl. Math., **52**: 1476-1489, (1992). (ヘテロクリニックサイクルに巻き付く運動の非定常性)
- [6] I. Melbourne, *An example of a non-asymptotically stable attractor*, Nonlinearity **4**: 835-844, (1991). (漸近安定ではないヘテロクリニックサイクルアトラクタ)
- W. Brannath, *Heteroclinic networks on the tetrahedron*, Nonlinearity, **7**: 1367-1384, (1994). (ゲーム力学系における漸近安定ではないアトラクタ)
- V. Kirk and M. Silber, Nonlinearity **7**: 1605-1621, (1994). (一部が重なりあったヘテロクリニックサイクルアトラクタの共存等)
- [7] T. Chawanya, *A new type of irregular motion in a class of game dynamics systems*, Progress of Theoretical Physics, **94**: 163-179, (1995). (サドル間のカオス的な遷移を伴う運動)
- 茶碗谷 毅, 進化の問題を (統計) 力学の立場から考える — 第 1 部: レプリケーター方程式で見られる特異な運動について, 物性研究, **67**: 227-236, (1996).
- [8] T. Chawanya, *Infinitely many attractors in game dynamics system*, Progress of Theoretical Physics, **95**: 679-684, (1996). (可算無限個のアトラクタの共存)
- T. Chawanya, *Coexistence of infinitely many attractors in a simple flow*, preprint. (階層的な構造を持つヘテロクリニックサイクル近傍での流れの解析)
- 茶碗谷 毅, Population dynamics でみられる無限個のアトラクタの共存 — 有効な自由度の動的な変化を伴う運動の特異性について, 数理科学, 1996 年 6 月号, 44-49 頁
- [9] Fujisaka-Yamada85, H. Fujisaka and T. Yamada, *A new intermittency in coupled dynamical systems*, Progress of Theoretical Physics, **74**: 918-921. (On-off intermittency についての報告)
- J.C. Alexander, J.A. Yorke, Y. Zhiping and I. Kan, *Riddled basins*, Int. J. of Bifurcation and Chaos, **2**: 795-813, (1992). (riddled basin を持つアトラクタについての報告)
- 本研究会での、H. Hata, K. Okuda, 及び H. Hasegawa, M. Komuro and T. Endoh の発表。