

特異点解消を用いた桁落ち無しべき級数計算

山内 歩

AYUMI YAMAUCHI

筑波大学大学院 数理物質科学研究科

GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA *

概要

本稿では多変数多項式の主変数に関する根を従変数の冪級数形で展開することを考える。冪級数根の数係数には浮動小数を用いる。浮動小数係数の冪級数根計算において、展開点を特異点の近傍としたときに致命的な桁落ち誤差が起り得ることが分かっている [8],[9]。したがって本稿では、展開点の近傍にある特異点をあらかじめ解消してから冪級数根を計算するという新しい算法を提案し、数係数が浮動小数であっても桁落ち誤差がほとんど起きない算法であることを示す。

1 序論

記号的 Newton 法による冪級数根計算の際、展開点から最も近い特異点までの距離が小さければ小さいほど、冪級数根の各項の数係数に生じる桁落ち誤差が大きくなる [8],[9]。この問題に対する既存の解決法に次の算法がある [8]: まず展開点から最も近い特異点で冪級数根を展開する。展開点が特異点「近傍」の場合は桁落ち誤差が顕著であるが、展開点が特異点自身の場合は桁落ち誤差がほとんど発生しない [8]。次に、特異点で展開された冪級数根を当初の展開点まで解析接続する。この算法を用いれば桁落ち誤差がほとんど発生しない [8]。しかし特異点での冪級数根展開は必ずしも 1 回の Hensel 構成で可能とは限らず、計算が煩雑になることがある。

よって本稿では複数回の Hensel 構成を必要としない算法を提案する。以後、多変数多項式 $f(x, u, \dots, v)$ の主変数を x とする。アルゴリズムの概要を以下に示す: まず $f(x, u, \dots, v)$ の冪級数根計算に先立って展開点近傍の特異点を解消する。特異点の解消は変数変換で行われ [1],[10]、その変換により $f(x, u, \dots, v)$ が $f'(x', u', \dots, v')$ に変形される。次に $f'(x', u', \dots, v')$ の x' に関する冪級数根を計算する。 $f(x, u, \dots, v)$ に適用した変数変換の逆変換をこの冪級数根に適用すれば、元の多項式 $f(x, u, \dots, v)$ の冪級数根が得られる。本稿では 2 変数多項式 $f(x, u)$ と 3 変数多項式 $f(x, u, v)$ におけるアルゴリズムを考える。

2 多変数多項式の冪級数根計算における桁落ち誤差の解析

多項式 $f(x, u_1, \dots, u_l) = f(x, u)$ を考える。本章に限り $(u_1, \dots, u_l)$ を (u) と略記する。以後、一般性を失うことなく $f(x, u)$ の特異点を原点とし、それ以外の特異点はないとする。 $f(x, u)$ の特異点とは $\partial f / \partial x = \partial f / \partial u_1 = \dots = \partial f / \partial u_l = f = 0$ を満たす点である [1],[10]。原点近傍の展開点 $(s_1, \dots, s_l) = (s)$

*ayumi@math.tsukuba.ac.jp

と原点との距離を $O(\delta)$ とおく (ただし $0 < \delta \ll 1$)。Newton 法を k 回反復して得られる $f(x, u)$ の冪級数根を $\chi^{(k)}(u, s)$ とし、 $\chi^{(k)}(u, s) = y_0(s) + y_1(u, s) + y_2(u, s) + \cdots + y_k(u, s)$ と表す。ただし $y_i(u, s)$ は $(u_1 - s_1), \dots, (u_l - s_l)$ の i 次同次式とする。

このとき、 k の値が 1 つ増えるごとに $\chi^{(k)}(u, s)$ に対して $O(1/\delta)$ だけ桁落ちが発生する [8]。例を示す。

[$f_1(x, u) = u^4 + 2u^2x^2 - 6u^2x + x^4 - x^3 + x^2 = 0$ の冪級数根を計算]

原点は f_1 の特異点である。展開点 $s = 0.001$ を 30 桁精度で与えて f_1 の根の 1 つを計算すると次式を得る。正しく計算されている桁には下線を引いた。先ほど述べた性質によると、 $y_k(u, s)$ の計算から $y_{k+1}(u, s)$ の計算へ進む過程で $O(\delta^{-1})$ の新たな桁落ちが生じる。今、 $\delta = 10^{-3}$ より $O(1/\delta) = O(10^3)$ である。よって高次項を計算するたびに約 3 桁ずつ桁が落ちる。実際、下記の実験結果では $u - s = u - 0.001$ の次数が 1 つ増えるごとに数係数が約 3 桁ずつ桁落ちしている。

$$\begin{aligned} & \underline{1.7157288476861679598904932225528413354} \cdots \times 10^{-7} \\ & + \underline{0.0003431457885668497291427205754006} \cdots (u - 0.001) \\ & + \underline{0.171572932342661838860884570193} \cdots (u - 0.001)^2 \\ & + \underline{0.000038059246374211572407451} \cdots (u - 0.001)^3 \\ & + \underline{0.009514823343458427825653} \cdots (u - 0.001)^4 \end{aligned}$$

3 2変数多項式の冪級数根計算

特異点には孤立特異点と連続特異点の 2 種類がある。ただし 2 変数多項式の特異点は (その多項式が無平方である限り) 全て孤立特異点である。本章では、原点近傍の点 $u = s$ を展開点とする $f(x, u)$ の冪級数根計算法を議論する。算法には特異点解消のための変換 (原点を中心とする QDT)[1] を用いる。原点を中心とする QDT は次式で表される。

$$\begin{cases} u' = u \\ x' = x/u \end{cases} \quad (1)$$

$f(x, u) = x^2 - u^2(u+1) = 0$ (図 1) に対して (1) を適用すると $f(u'x', u') = u'^2(x'^2 - (u'+1)) = 0$ を得る。代数曲線 $f(u'x', u') = 0$ において、

$x'^2 - (u'+1) = 0$ (図 2), $u' = 0$ はそれぞれ QDT による proper transform (狭義引き戻し)、exceptional line (例外曲線) と呼ばれる [1], [10]。図 1 の曲線は原点に多重度 2 の特異点をもつが、この点が図 2 では原点近傍の 2 点 $(0, 1)$, $(0, -1)$ にブローアップされている。これが特異点の解消である。

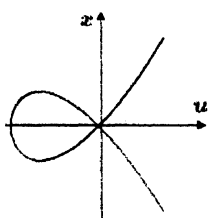


図 1: $x^2 - u^2(u+1) = 0$

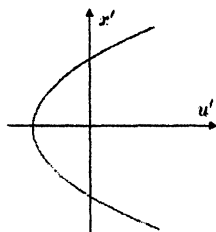


図 2: $x'^2 - (u'+1) = 0$

[アルゴリズム 1 (特異点解消を用いた $f(x, u) = 0$ の冪級数根計算)]

1. 原点を中心とする QDT を用いて $f(x, u) = 0$ の原点をブローアップする。1 回の QDT で特異点がブローアップされなければ、ブローアップされるまで QDT を繰り返す。得られた $f(x, u)$ の proper transform を $f'(x', u')$ とおく。
2. $f'(x', u') = 0$ の x' に関する冪級数根 $\chi(\tilde{u})$ を記号的 Newton 法で計算する。ただし展開点は $u' = s$ であり、 $\tilde{u} = u' - s$ とおく。
3. $(\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u})$ を計算する。 $x' = x/u = \chi(\tilde{u})$ より $x = u\chi(\tilde{u}) = u'\chi(\tilde{u}) = (\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u})$ であるから、 $(\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u})$ が $f(x, u)$ の冪級数根に対応する。 u' を u と置き換えれば $(\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u})$ は $u - s$ に関する冪級数となる。□

アルゴリズム 1 を従来の記号的 Newton 法と比べると計算の内容は一見同じである。しかし精度が有限である浮動小数演算のもとでは、得られる計算結果が大きく異なる。以下の実験例で確かめる。実験には Mathematica5.1 を用いた。原点近傍の展開点を $s = \frac{1}{1000}$ (有理数) と $s = 0.001$ (30 桁精度の浮動小数) の 2 種類で与え、それぞれに対して入力多項式の冪級数根を計算する。それら 2 つの冪級数根を引き算すれば、浮動小数を展開点として計算された冪級数根の精度を測定できる。浮動小数で与える展開点は 30 桁精度であるから、冪級数根の数係数が 30 桁前後まで正しく計算されていれば大きな桁落ち誤差は発生していないと見なせる。正しく計算されている桁に下線を引いた。

[実験 1: P: $f(x, u) = x^2 - u^2(u + 1) = 0$ の冪級数根を計算]

まず $(\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u})$ の計算結果を示す。

$$\begin{aligned}
 (\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u}) &= \underline{0.001000499875062460964823258287700} \dots \\
 &+ \underline{1.0009999625249804851419074101030629} \dots (u - s) \\
 &+ \underline{0.499625374609784726036638551965459} \dots (u - s)^2 \\
 &- \underline{0.124750390078841872192173769583262} \dots (u - s)^3 \\
 &+ \underline{0.062305096939602844878382903826236} \dots (u - s)^4 \\
 &- \dots
 \end{aligned}$$

一方、 $f(x, u)$ の冪級数根を従来の記号的 Newton 法で計算すると次の結果を得る。従来は避けることのできなかった桁落ち誤差が、本稿の新たな算法では回避できることが分かる。

$$\begin{aligned}
 &\underline{0.0010004998750624609648232582} \dots \\
 &+ \underline{1.00099996252498048514190741010} \dots (u - s) \\
 &+ \underline{0.499625374609784726036638} \dots (u - s)^2 \\
 &- \underline{0.124750390078841872192} \dots (u - s)^3 \\
 &+ \underline{0.0623050969396028448} \dots (u - s)^4 \\
 &- \dots
 \end{aligned}$$

4 3変数多項式の冪級数根計算

3変数以上の多項式は孤立特異点のみならず連続特異点をもつこともある。本章では、既存の連続特異点解消法における問題点を指摘した上で新しい解消法を提案し、それを用いて、連続特異点の近傍を展開点としても桁落ち誤差が起きない冪級数根計算法を考える。

連続特異点が線形部分空間 $x = u = 0$ (v 軸) をなす場合、その解消のための変換 (v 軸を中心とする MDT)[1] は次式で表される。

$$\begin{cases} v' = v \\ u' = u \\ x' = x/u \end{cases} \quad (2)$$

(2) を $f(x, u, v) = x^2 - u^2(u+1) = 0$ に対して適用すると $f(u'x', u', v') = u'^2(x'^2 - (u' + 1)) = 0$ を得る。前章と同様に $x'^2 - (u' + 1) = 0$ (図 3), $u' = 0$ (図 4) はそれぞれ proper transform, exceptional surface と呼ばれる。

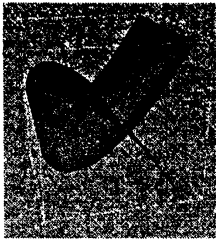


図 3: $x'^2 - (u' + 1) = 0$

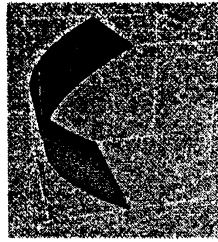


図 4: $x'^2 - (u' + 1) = 0$



図 5: 曲面 S_1



図 6: 曲面 S'_1

連続特異点が線形部分空間をなす場合の冪級数根計算法を以下に提案する。展開点は $(u, v) = (u_0, v_0)$ とする。

[アルゴリズム 2(連続特異点が線形部分空間 L をなす場合の冪級数根計算)]

1. L を中心とする MDT を用いて $f(x, u, v)$ の連続特異点をブローアップする。1 回の MDT で特異点がブローアップされなければ、ブローアップされるまで MDT を繰り返す。得られた $f(u'x', u', v')$ の proper transform を $f'(x', u', v')$ とおく。
2. $f'(x', u', v')$ の x' に関する冪級数根 $\chi(\tilde{u}, \tilde{v})$ を記号的 Newton 法で計算する。展開点は $(u', v') = (u_0, v_0)$ であり、 $\tilde{u} = u' - u_0$, $\tilde{v} = v' - v_0$ とおく。
3. $(\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u}, \tilde{v})$ を計算する。 $x' = x/u = \chi(\tilde{u}, \tilde{v})$ より $x = u\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) = u'\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u}, \tilde{v})$ であるから、 $(\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u}, \tilde{v})$ が $f(x, u, v)$ の冪級数根に対応する。 $(\tilde{u} + s)\chi(\tilde{u}, \tilde{v})$ は $u' - u_0$ と $v' - v_0$ に関する冪級数であるから、 u', v' をそれぞれ u, v と置き換えれば $u - u_0$ と $v - v_0$ に関する冪級数を得る。□

次に、連続特異点が空間曲線 C をなす場合の特異点解消について論じる。従来は C を中心とする MDT のために

$$\begin{cases} x = \lambda_1(t) \\ u = \lambda_2(t) \\ v = \lambda_3(t) \end{cases}$$

なるパラメータ表示を定めることが必要であった [1]。しかしこのパラメータ表示を求めるための計算 [3] は複雑であり、 $\lambda_i(t)$ が無限級数になる場合も多い。そこで本章では新しい方法を提案する。

まず C を 2 つの多項式 $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ で次のように表す。

$$C: \{(x, u, v) \mid \varphi(u, v) = 0\} \cap \{(x, u, v) \mid x = \psi(u, v)\}$$

上式は次に示す幾何学的意味をもつ [2]。 $\varphi(u, v) = 0$ は空間曲線 C の $u-v$ 平面への投影 (projection) を表し、 $x = \psi(u, v)$ は曲線 $\varphi(u, v) = 0$ から C への 1 対 1 の写像 (birational map) を定める。 $\varphi(u, v) = 0$ は当然 $u-v$ 平面上の曲線である。 $\varphi(u, v)$ と $\psi(u, v)$ の具体的な計算方法はアルゴリズム 4,5 で述べる。

前述の $x = u = 0$ を中心とする MDT(2) は、 $\varphi(u, v) = u, \psi(u, v) = 0$ とおくことによって

$$\begin{cases} v' = v \\ u' = u \\ x' = (x - \psi(u', v'))/\varphi(u', v') \end{cases} \quad (3)$$

と書き換えることができる。 (3) が連続特異点 C のブローアップとして機能するか実験で確かめる。 曲面 $S_1: f(x, u, v) = (u - v^3)^4 - (u - v^3)^2(x - u) + (x - u)^3$ (図 5) の連続特異点は $C = \{(x, u, v) \mid \varphi(u, v) = u - v^3, \psi(u, v) = u\}$ と表される。 よって (3) を S_1 に適用すると $f(\varphi(u', v')x' + \psi(u', v'), u', v') = (v'^3 - u')^3(v'^3 - u' + x' - x'^3) = 0$ を得る。 proper transform は $S'_1: f'(x', u', v') = v'^3 - u' + x' - x'^3 = 0$ であり (図 6)、例外曲面は $v'^3 - u' = 0$ である。 S_1 の連続特異点が S'_1 では解消されている。

このようにして C を中心とする新しい MDT を定めることができた。 この MDT は連続特異点のパラメータ表示を必要とせず、従来の算法の問題点を解決する。 (3) を customized MDT と名付ける。

customized MDT を用いて、展開点が連続特異点 (空間曲線) の近傍であっても桁落ち誤差が生じない冪級数根計算法を示す。 先ほどと同様に、展開点は $(u, v) = (u_0, v_0)$ とする。

[アルゴリズム 3(空間曲線を中心とする MDT による冪級数根計算法)]

1. アルゴリズム 4,5 を用いて、 $f(x, u, v)$ の連続特異点 C を表す $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ を計算する。
2. C を中心とする customized MDT によって $f(x, u, v)$ の連続特異点をブローアップする。得られた $f(x, u, v)$ の proper transform を $f'(x', u', v')$ とおく。
3. $f'(x', u', v')$ の x' に関する冪級数根 $\chi(\tilde{u}, \tilde{v})$ を記号的 Newton 法で計算する。展開点は $(u', v') = (u_0, v_0)$ である。 $\tilde{u} = u' - u_0, \tilde{v} = v' - v_0$ とおく。
4. $\varphi(\tilde{u} + u_0, \tilde{v} + v_0)\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) + \psi(\tilde{u} + u_0, \tilde{v} + v_0)$ を計算する。 $f'(x', u', v')$ において以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} x' = (x - \psi(u', v'))/\varphi(u', v') = \chi(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ x = \varphi(u', v')\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) + \psi(u', v') \\ x = \varphi(\tilde{u} + u_0, \tilde{v} + v_0)\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) + \psi(\tilde{u} + u_0, \tilde{v} + v_0) \end{cases}$$

したがって $\varphi(\tilde{u} + u_0, \tilde{v} + v_0)\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) + \psi(\tilde{u} + u_0, \tilde{v} + v_0)$ が $f(x, u, v)$ の冪級数根に対応する。 $\square$

$\varphi(u, v), \psi(u, v)$ の計算法を述べる。この算法では複数の多項式間の PRS[4],[7] と可約多項式の因数分解 [5],[6] を用いる。以後 $\partial f/\partial x, \partial f/\partial u, \partial f/\partial v$ をそれぞれ f_x, f_u, f_v と表す。まず始めに f_x, f_u, f_v の共通因子を計算する (アルゴリズム 4)。この共通因子の零点集合で、かつ $f(x, u, v) = 0$ を満たす点の集合が特異点であるから、 f_x, f_u, f_v の共通因子に対して後述のアルゴリズム 5 を用いることで $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ を決定する。

[アルゴリズム 4(複数の多項式間の PRS)]

1. f_x, f_u, f_v の中で主変数 x に関して最低次数をもつ多項式を選ぶ。ここではそれを f_x と仮定する。
 $P_1 = f_u, P_2 = f_x$ とした PRS($P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1}$) と $Q_1 = f_v, Q_2 = f_x$ とした PRS($Q_1, Q_2, \dots, Q_k, Q_{k+1}$) を計算する。ただし P_{k+1}, Q_{k+1} ともに 0 とする。すなわち P_k と Q_k は変数 u, v のみをもつ多項式である。

2. 主変数を u として P_k と $Q_{k'}$ の PRS を計算する。 $\deg_u(P_k) \geq \deg_u(Q_{k'})$ と仮定し、この PRS を $(R_1, R_2, \dots, R_k, R_{k+1})$ とおく。ただし $R_1 = P_k, R_2 = Q_{k'}, R_{k+1} = 0$ とする。 $\square$

$\varphi(u, v)$ は R_k をもとに計算される。 $f(x, u, v)$ が連続特異点をもつ場合は $R_k \in C[u, v]$ が成り立ち、さらに $R_k(u, v)$ が $C[u, v]$ 上既約な場合は $R_k(u, v) = \varphi(u, v)$ である。可約の場合は $R_k(u, v)$ に含まれるいずれかの因子が $\varphi(u, v)$ であり、それはアルゴリズム 5 によって決まる。

$\psi(u, v)$ の計算方法を述べる。簡単のために $\deg_x(P_{k-1}) = \deg_x(Q_{k'-1}) = 1$ と仮定する。 $\psi(u, v)$ の計算には $P_{k-1}, Q_{k'-1}$ のいずれか一方を用いれば十分である。ここでは P_{k-1} を用いる。 $P_{k-1} = \tilde{q}(u, v)x - \tilde{r}(u, v)$ とすると、 $x = \frac{\tilde{r}(u, v)}{\tilde{q}(u, v)}$ が $\varphi(u, v)$ から C への birational map である [2]。よって $\psi(u, v) = \frac{\tilde{r}(u, v)}{\tilde{q}(u, v)}$ が導かれる。

[アルゴリズム 5($\varphi(u, v)$ の計算アルゴリズム)]

1. $R_k(u, v)$ を既約な因子に分解する。可約多項式の因数分解に関しては [5], [6] を参照されたい。これらを用いると次の因数分解を得る。

$$\begin{aligned} R_k(u, v) &= \lambda_1(u, v)^{r_1} \lambda_2(u, v)^{r_2} \cdots \lambda_m(u, v)^{r_m} \\ \lambda_i(u, v) &\in C[u, v] \quad (1 \leq i \leq m) \\ \gcd(\lambda_i(u, v), \lambda_j(u, v)) &= 1 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

2. birational map $\psi(u, v)$ を各 $\lambda_i(u, v)$ に限定した関数 $M_i(u, v)$ を計算する。「 $D(u, v)$ を $H(u, v)$ に限定した関数」とは $D(u, v)$ の $H(u, v)$ による剰余を指す。ただし $D(u, v)$ が $H(u, v)$ で割り切れないときは $D(u, v)$ 自身を指す。
3. 各 i に対して $f(M_i(u, v), u, v)$ を計算すると $f(M_j(u, v), u, v) = 0$ なる $\exists j$ ($1 \leq j \leq m$) が得られる。このとき $\lambda_j(u, v) = \varphi(u, v)$ が成り立つ。 $\psi(u, v)$ の次数が低い場合は $f(\psi(u, v), u, v)$ を計算する。 $f(\psi(u, v), u, v)$ は $\lambda_1(u, v), \dots, \lambda_m(u, v)$ のいずれかの多項式を因子にもち、それが $\varphi(u, v)$ に該当する。 $\square$

以上の議論で $\varphi(u, v)$ と $\psi(u, v)$ が計算できる。例を示す。

[$S_2: f(x, u, v) = ((u+v^2)^2 + (x-u-1)^2)^2 - ((u+v^2)^2 - (x-u-1)^2)$ の連続特異点]

曲面 S_2 は $C = \{(x, u, v) \mid \varphi(u, v) = u + v^2 = 0, x = \psi(u, v) = u + 1\}$ なる連続特異点をもつ。アルゴリズム 4, 5 によって正しく計算できるか確かめる。アルゴリズム 4 によって

$$\begin{aligned} (P_1, P_2, P_3, P_4) &= (f_x, f_v, -4(1+u-x), 4v(2v^6 + 6v^4u + u(-1+2u^2) + v^2(-1+6u^2))) \\ (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) &= (f_u, f_v, 4(1+u-x), 4v(2v^6 + 6v^4u + u(-1+2u^2) + v^2(-1+6u^2))) \end{aligned}$$

を得る。この例では偶然 $Q_k = P_k$ となるので、これを R_k とおく。 R_k を因数分解すると

$$\begin{aligned} R_k(u, v) &= 4v(u+v^2)(-1+2v^4+4v^2u+2u^2) \\ \lambda_1(u, v) &= v \\ \lambda_2(u, v) &= u+v^2 \\ \lambda_3(u, v) &= -1+2v^4+4v^2u+2u^2 \end{aligned}$$

を得る。 $Q_{k-1} = -P_{k-1} = 4(1+u-x)$ より $\psi(u, v) = u+1$ が導かれる。ここでアルゴリズム 5 によって $f(\psi(u, v), u, v) = f(u+1, u, v) = (u+v^2)((u+v^2)^2 - 1)$ を得るので、 $\varphi(u, v) = u+v^2$ である。正しい計算結果が得られることを確認できた。

5 結論

本稿では、展開点が特異点近傍であっても桁落ち誤差が発生しない安全な冪級数根計算法を、従来とは異なるアプローチにより構築した。そのアプローチとは、冪級数根計算に先立って特異点を解消することであり、特異点の解消には [1],[10] を用いた。本稿では多変数多項式を 2 変数と 3 変数に限定して算法を構築し、次の結論を得た。

2 変数多項式の冪級数根計算では、孤立特異点をあらかじめ解消することにより、従来の算法では回避できなかった桁落ち誤差の発生を抑えることができた。冪級数根計算の際に展開点近傍の特異点を解消することがいかに重要であるかも明らかになった。この算法を用いた全ての実験例で良好な結果が得られ、本稿が提案する算法の有用性が示された。従来の算法では Hensel 構成の再計算が必要であった実験例も、本稿の算法を用いれば 1 回の記号的 Newton 法で計算できる。

3 変数多項式の冪級数根計算では、連続特異点が空間曲線をなす場合に対して新しい MDT(customized MDT) を提案した。この算法は複数の多項式の PRS を計算しなければならないが、連続特異点のパラメータ表示を必要としない点が長所である。ただし、customized MDT が任意の連続特異点を解消できるかどうかを数学的に証明するには至らず、いくつかの実験で確認するにとどまった。

参 考 文 献

- [1] S.S.Abhyankar, *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*, Amer. Math. Soc, 1990.
- [2] S.S.Abhyankar, *Automatic parameterization of rational curves and surfaces IV: algebraic space curves*, ACM Transactions on Graphics, Special Issue on Computer-Aided Design 8(4), 1989, 325-334.
- [3] S.S.Abhyankar and C.L.Bajaj, *Automatic parameterization of rational curves and surfaces 3: algebraic plane curves*, Computer Aided Geometric Design 5(4), 1988, 309-321.
- [4] C.L.Bajaj, *Geometric computations with algebraic varieties of bounded degree*, Proc. of the Sixth Ann. Symp. on Computational Geometry, 1990, 148-156.
- [5] S.Gao, *Factoring multivariate polynomials via partial differential equations*, Math. Comput 72(242), 2003, 801-822.
- [6] W.M.Ruppert, *Reducibility of polynomials $f(x,y)$ modulo p* , J.Number Theory 77, 1999, 62-70.
- [7] T.Sasaki and A.Furukawa, *Theory of multiple polynomial remainder sequence*, Publ. RIMS (Kyoto Univ.) 20(2), 1984, 367-399.
- [8] T.Sasaki, T.Kitamoto and F.Kako, *On cancellation error in Newton's method of power series roots of multivariate polynomial*, preprint of Univ. of Tsukuba, 30pages, 1994.
- [9] T.Sasaki and S.Yamaguchi, *An analysis of cancellation errors in multivariate Hensel construction with floating-point number arithmetic*, Proc. of ISSAC'98, 1998, 1-8.
- [10] 上野健爾, *代数幾何入門*, 岩波書店, 1995.