

等質錐に付随する小行列式型多項式

伊師英之（横浜市大総合理）

序.

実ベクトル空間 V の中の open かつ直線を含まない凸錐 Ω で, その上に線型変換群 $G(\Omega) := \{g \in GL(V); g \cdot \Omega = \Omega\}$ が推移的に作用しているものを等質錐とよぶ. このとき $G(\Omega)$ は $\mathbb{R}$ 上の代数群の (通常位相に関する) identity component で ([15]), その複素化 $(G(\Omega)_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ は概均質ベクトル空間となる. 双対ベクトル空間 V^* の中の双対錐 $\Omega^* := \{\xi \in V^*; \langle x, \xi \rangle > 0 \ (\forall x \in \bar{\Omega} \setminus \{0\})\}$ も open な凸錐で, $G(\Omega)$ が反傾表現によって推移的に作用する等質錐である. 群 $G(\Omega)$ が簡約可能である必要十分条件は Ω と Ω^* が線型同値なことであり, そのとき錐 Ω は対称錐とよばれる. このような対称錐 $\Omega \subset V$ は完全に分類されており, ベクトル空間 V 上に自然に定義される Jordan 代数を用いてその構造は詳細に記述できる ([11], [1]).

対称錐は等質錐の中では非常に特別なクラスであり (対称錐の線型同値類の集合は可算濃度であるのに対し等質錐のそれは連続濃度), 言い換えれば等質錐の一般論は簡約可能でない概均質ベクトル空間の興味深い具体例を豊富に提供する. 対称でない等質錐については $G(\Omega)$ の構造は一般に複雑であり ([16]), その岩澤部分群 (極大連結可解部分群) $H \subset G(\Omega)$ の Ω への単純推移的な作用に着目することが研究の大きな鍵となる. すなわち H の作用から V 上には clan とよばれる非結合的代数の構造が入り, これが (丁度対称錐の研究における Jordan 代数のように) 等質錐を代数的に研究する強力な道具となるのである. 実際, この clan を基にして等質錐 Ω は形式的な (ベクトル成分の) 対称行列の空間の中で “正定値なもの” の集合として実現され, 群 H の V への作用は下三角行列による対称行列への作用と解釈される ([15, Chapter 3], [3]).

以上の着想に基づいて, 本稿では対称行列の行列式および小行列式に相当する多項式を一般の等質錐に対して定義する. これは具体的には H の作用に関する V 上の基本相対不変多項式であり, 我々はそれらの多項式を簡単に計算するアルゴリズムを与える. 要点は Vinberg および Gindikin によって導入された V 上の相対不変多項式, いわゆる integral power function を一種の互除法によって素因子分解することである (定理 2.5). 得られた既約多項式は Ω が対称錐の場合には Jordan 代数の主小行列式 ([1, p. 113]) と一致する. また小行列の空間に相当する V の部分空間たちの中の等質錐 (部分錐とよぶ) に付随する相対不変式も合わせて考えることにより, 我々はさらに多数の既約多項式を得る. これらを等質錐 Ω に付随する小行列式型多項式とよび, 定理 2.7 (ii) では Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ をそれらの多項式を用いて記述

第 3 節では相対不変多項式に関する結果の応用として、等質錐上の Riesz 超函数 (パラメータ付けされた相対不変超函数) で台が原点に集中するようなものを全て決定する。結論をいうとそのような Riesz 超函数は、その Laplace 変換が双対錐に付随する基本相対不変多項式の巾乗の積となるものとして特徴付けられる (定理 3.2 (i)). もともと Gindikin が等質錐の上の調和解析を展開した動機付けのひとつは波動方程式の基本解を Lorentz 錐の幾何と関連させて構成した M. Riesz [12] の着想を一般化するということであつたが ([3], [5]), 我々の結果によって Riesz-Gindikin の手法で基本解が得られるような微分作用素は全て決定されたといえる。実際 そのような微分作用素は双対錐に付随する相対不変多項式をシンボルとしてもつ定数係数微分作用素に他ならない。定理 3.2 (iii) ではこれらの微分作用素に関する多変数 b -函数の類似物を計算した。

第 4 節では等質錐 Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ の H -軌道分解を与え、小行列式型多項式を用いて各軌道の構造を代数的に調べる。そのような軌道 $\mathcal{O}$ の研究は Riesz 超函数の研究において重要である ([6], [10]) ばかりでなく、等質 Siegel 領域上の調和解析にも応用をもつ ([9])。我々の主結果は次のとおりである (定理 4.5, 4.7): 軌道 $\mathcal{O}$ に対し、以下の (i), (ii) をみたすような既約多項式 $\phi_1, \dots, \phi_d$ と $\psi_1, \dots, \psi_M$ を小行列式型多項式から採ることができる。

- (i) $\mathcal{O} = \{x \in V; \phi_\alpha(x) > 0 \ (\alpha = 1, \dots, d), \ \psi_m(x) = 0 \ (m = 1, \dots, M)\}$,
- (ii) 軌道 $\mathcal{O}$ 上の相対不変函数で V 上の多項式函数に拡張できるものは $\phi_1, \dots, \phi_d$ の巾乗の積に等しい。

以下 本稿で (とくに具体例を論じる際に) 必要な記号を挙げる: 次数 r の実対称行列のなす集合を $\text{Sym}(r, \mathbb{R})$ と表し、 $x = (x_{ij}) \in \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ について下三角行列 $\underline{x}$ と上三角行列 $\hat{x}$ を

$$x_{ij} := \begin{cases} x_{ij} & (i > j), \\ x_{ii}/2 & (i = j), \\ 0 & (i < j), \end{cases}$$

および $\hat{x} := (x)^*$ ($*$ は行列の転置を表す) で定める。また (m, k) -行列単位を E_{mk} で表す。整数 $p \leq q$ について集合 $\{p, p+1, \dots, q\}$ を $[p, q]$ とかく。正則行列の群 $\text{GL}(r, \mathbb{R})$ の $\text{Sym}(r, \mathbb{R})$ への作用 a を $a(g)x := gxg^* \in \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ ($g \in \text{GL}(r, \mathbb{R})$, $x \in \text{Sym}(r, \mathbb{R})$) で定める。ベクトル空間 V について V 上の多項式の集合を $\mathcal{P}(V)$ と表し、 V の双対ベクトル空間 V^* 上の多項式 $\phi \in \mathcal{P}(V^*)$ に対し V 上の微分作用素 $\phi(\frac{\partial}{\partial x})$ を

$$\phi(\frac{\partial}{\partial x})e^{(x, \xi)} = \phi(\xi)e^{(x, \xi)} \quad (\xi \in V^*)$$

をみたすものとして定義する。

§1. 等質錐に付随する clan.

実ベクトル空間 V の中の等質錐 Ω 上に序で述べたような分裂型可解 Lie 群 H が線型かつ単純推移的に作用しているものとする. 錐 Ω の 1 点 E を固定し, 可解 Lie 群 H の Lie 代数を $\mathfrak{h}$ とする. このとき orbit map $H \ni t \mapsto t \cdot E \in \Omega$ の微分写像 $\mathfrak{h} \ni L \mapsto L \cdot E \in V$ は線型同型だから, 任意の $x \in V$ について $L_x \cdot E = x$ となる $L_x \in \mathfrak{h}$ が唯一つ存在する. これを用いて V 上の双線型な積 Δ を $x \Delta y := L_x \cdot y \in V$ ($x, y \in V$) で定めると E はこの積に関する単位元である. Lie 代数 $\mathfrak{h}$ の元 $[L_x, L_y]$ を E に作用させると

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] \cdot E &= L_x \cdot (L_y \cdot E) - L_y \cdot (L_x \cdot E) = L_x \cdot y - L_y \cdot x \\ &= x \Delta y - y \Delta x \end{aligned}$$

となるから, 定義より

$$[L_x, L_y] = L_{x \Delta y - y \Delta x} \quad (1.1)$$

を得る. また [15, p. 362] の議論から (本質的には Ω が凸であることが根拠となつて), 代数 (V, Δ) は「コンパクト性」

$$\text{Tr } L_{x \Delta x} > 0 \quad (x \in V) \quad (1.2)$$

をもつ.

一般に 実ベクトル空間 V と その上の双線型な積 Δ の組 (V, Δ) で, 左乗法作用素 L_x が (1.1) を満たすものを左対称代数という (この名称は関係式 (1.1) が結合子 $[x \Delta y \Delta z] := x \Delta (y \Delta z) - (x \Delta y) \Delta z$ ($x, y, z \in V$) を用いれば

$$[x \Delta y \Delta z] = [y \Delta x \Delta z]$$

と書き直せることに由来する [15, Chapter 2]). 左対称代数 (V, Δ) で, 条件 (1.2) を満たし, かつ 作用素の族 $\{L_x\}_{x \in V}$ が同時三角化可能であるものを clan とよぶ. 単位元 E をもつ clan (V, Δ) について $\Omega := \{(\exp L_x) \cdot E; x \in V\} \subset V$ は等質錐であり, さらに次の事実が成り立つ:

定理 1.1 (Vinberg [15]). 上述の対応により, 等質錐 Ω の線型同値類と単位元をもつ clan (V, Δ) の同型類は一対一に対応する.

一般に clan は非結合的代数であるが次のような一種の Peirce 分解 (normal 分解) をもつので比較的扱いやすい.

命題 1.2 (Vinberg [15]). 次の条件をみたす元 $E_1, \dots, E_r \in V$ が存在する.

- (i) $E_i \Delta E_j = \delta_{ij} E_i$ ($1 \leq i, j \leq r$), すなわち $E_1, \dots, E_r$ は互いに直交する巾等元.
- (ii) $V = \sum_{1 \leq k \leq m \leq r}^{\oplus} V_{mk}$, ただし

$$V_{mk} := \left\{ x \in V; c \Delta x = \frac{c_m + c_k}{2} x, x \Delta c = c_k x \quad (\forall c = \sum_{i=1}^r c_i E_i, c_i \in \mathbb{R}) \right\}.$$

- (iii) $V_{kk} = \mathbb{R} E_k$ ($k = 1, \dots, r$).

なお Ω が対称錐のとき, この分解は Ω に付随する Jordan 代数の Peirce 分解 ([1, Chapter IV]) と一致する. 命題 1.2 に従って任意の $x \in V$ は $x = \sum_{k=1}^r x_{kk} E_k + \sum_{1 \leq k < m \leq r} X_{mk} (x_{kk} \in \mathbb{R}, X_{mk} \in V_{mk})$ と表される. 空間 V 上の線型形式 $E^* \in V^*$ を $\langle x, E^* \rangle := \sum_{k=1}^r x_{kk} (x \in V)$ で定義し, $(x|y) := \langle x \Delta y, E^* \rangle / 2 (x, y \in V)$ とすると $(\cdot|\cdot)$ は V 上の内積を定め, 部分空間 V_{mk} たちは互いに直交する.

双対錐 Ω^* は E^* を含む open な凸錐で, 群 H は反傾表現によってその上に単純推移的に作用する. これから等質錐 Ω^* に対応するものとして, 双対ベクトル空間 V^* には E^* を単位元とする $\text{clan}(V^*, \Delta')$ の構造が入る. 定理 1.1 から, Ω が対称錐でない限り 2 つの $\text{clan}(V, \Delta)$ と (V^*, Δ') は代数として同型ではない. また $\text{clan}(V^*, \Delta')$ は $\langle x, \mathfrak{E}_k \rangle := x_{r+1-k, r+1-k} (x \in V)$ で定まる巾等元 $\mathfrak{E}_k \in V^*$ に関して normal 分解され, その (m, k) -成分は $V_{r+1-k, r+1-m}$ の双対空間に等しい. このような“添数の反転”は議論のあちこちに現れて煩わしいが, 双対性を反映する必然的なものである ([15, Chapter 3, Section 6], [5, p. 86], [7, section 2] 参照).

例 1.1. 次数 r の実対称行列の集合 $\text{Sym}(r, \mathbb{R})$ を V , その中で正定値なものの全体の集合を Ω とする. このとき Ω は open な凸錐であり, その線型変換群 $G(\Omega)$ は $a(\text{GL}(r, \mathbb{R}))$ と等しく, この群は Ω に推移的に作用している. 対角成分が正であるような r 次の下三角行列からなる群を $H \subset \text{GL}(r, \mathbb{R})$ とすると, H は a によって Ω に単純推移的に作用する (以後しばしば H と $a(H) \subset \text{GL}(V)$ を同一視する). 固定点 E として単位行列をとると, 群 H および $E \in \Omega$ から定まる V 上の clan 構造は

$$x \Delta y := xy + yx \in V \quad (x, y \in V)$$

で与えられる. このとき巾等元 E_k は行列単位 E_{kk} であって部分空間 V_{mk} は $\mathbb{R}(E_{mk} + E_{km}) (1 \leq k \leq m \leq r)$ に等しい. すなわち normal 分解は成分に関する V の自然な直和分解に他ならない.

カップリング $\langle x, \xi \rangle := \text{tr}(x\xi) (x, \xi \in V)$ によって V^* と $V = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ を同一視する. この同一視のもとで Ω^* と Ω は一致し (よって Ω は対称錐), 群 H の V^* への反傾表現 a^* は $a^*(t)\xi = a((t^*)^{-1})\xi = (t^*)^{-1}\xi t^{-1} (t \in H, \xi \in V^*)$ となる. 双対錐 Ω^* に対応する $\text{clan}(V^*, \Delta')$ は

$$\xi \Delta' \eta := \hat{\xi}\eta + \eta\xi \in V^* \quad (\xi, \eta \in V^*)$$

で与えられ, その normal 分解を与える巾等元 $\mathfrak{E}_k$ は $E_{r+1-k, r+1-k}$ に等しい.

例 1.1 は一般論を研究するうえでの見本となるような等質錐の典型例である. 実際, 一般の $\text{clan}(V, \Delta)$ についてその元 $x = \sum_{k=1}^r x_{kk} E_k + \sum_{m > k} X_{mk}$ を対称行列

$$\begin{pmatrix} x_{11} & X_{21} & \cdots & X_{r1} \\ X_{21} & x_{22} & & X_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_{r1} & X_{r2} & & x_{rr} \end{pmatrix}$$

の形に表示し 適当な代数構造を定めてやれば, 群 H の作用が下三角行列で表されるなど 例 1.1 と形式的に平行した議論をすすめることができる (いわゆる T 代数の理論 [15, Chapter 3]. なお [3] および [6, section 2] も参照).

例 1.2 (Vinberg [15]). 実ベクトル空間 V と可解 Lie 群 H を, それぞれ次のような 3 次の対称行列および下三角行列の集合として定める:

$$V := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{31} \\ 0 & x_{22} & x_{32} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} ; x_{11}, x_{31}, x_{22}, x_{32}, x_{33} \in \mathbb{R} \right\}, \quad (1.3)$$

$$H := \left\{ t = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} ; t_{11}, t_{22}, t_{33} > 0, \quad t_{32}, t_{33} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.4)$$

このとき a による群 H の作用は V を保ち, H は open な凸錐 $\Omega := \{x \in V; x \gg 0\}$ の上には単純推移的に作用する. なお Ω の線型変換群 $G(\Omega) \subset GL(V)$ は $a(H)$ と次の 3 つの線型変換から生成される ([10]):

$$a \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

とくに $G(\Omega)$ は可解 Lie 群であり, $a(H)$ はその identity component である. 例 1.1 と同様に, Ω の固定点 E として単位行列をとると $x \Delta y := xy + yx \in V$ ($x, y \in V$) であり, $\text{clan}(V, \Delta)$ の normal 分解は成分に関する直和分解に一致する (ただし $V_{21} = \{0\}$).

実ベクトル空間 $W \subset \text{Sym}(4, \mathbb{R})$ を

$$W := \left\{ \xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} & 0 & \xi_{31} & 0 \\ 0 & \xi_{22} & 0 & \xi_{32} \\ \xi_{31} & 0 & \xi_{33} & 0 \\ 0 & \xi_{32} & 0 & \xi_{33} \end{pmatrix} ; \xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{31}, \xi_{32} \in \mathbb{R} \right\}.$$

によって定める. 元 $\xi \in W$ に対して

$$\tilde{\xi} := \begin{pmatrix} \xi_{11} & 0 & \xi_{31} \\ 0 & \xi_{22} & \xi_{32} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix} \in V$$

とし, カップリング

$$\langle x, \xi \rangle := \text{tr}(x\tilde{\xi}) \quad (x \in V, \xi \in W)$$

によって W を 双対空間 V^* と同一視する. このとき

$$\Omega^* = \{\xi \in W; \xi \gg 0\} = \{\xi \in W; \xi_{33} > 0, \xi_{33}\xi_{22} - \xi_{32}^2 > 0, \xi_{33}\xi_{11} - \xi_{31}^2 > 0\}$$

となる. 二つの錐 Ω と Ω^* は線型同値ではなく ([15]), すなわち Ω は対称でない等質錐である. 群 H の元 $t \in H \subset \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ ((1.4) 参照) について

$$t' := \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & t_{31} & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & t_{32} \\ 0 & 0 & t_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$$

とすると, H の反傾表現 a^* は $a^*(t)\xi = a((t')^{-1})\xi$ ($\xi \in W$) となる. これから Ω^* に対応する clan 構造は $\xi\Delta'\eta = \hat{\xi}\eta + \eta\xi$ ($\xi, \eta \in W$) で与えられ, その normal 分解を与える巾等元は $\mathfrak{E}_1 = E_{33} + E_{44}$, $\mathfrak{E}_2 = E_{22}$, $\mathfrak{E}_3 = E_{11}$ となる.

集合 $I \subset \{1, \dots, r\}$ について $E_I := \sum_{i \in I} E_i \in V$ とする. このとき E_I は (V, Δ) の巾等元であり, 逆に任意の巾等元は全てこの形にかける ([15, Chapter 2, Theorem 9]). 集合 I が空でないとき $V^I := \sum_{m,k \in V}^{\oplus} V_{mk} \subset V$ とすると (V^I, Δ) は (V, Δ) の部分代数であり, E_I はその単位元である. 対応する等質錐

$$\Omega^I := \{(\exp L_x) \cdot E_I; x \in V^I\} \subset V^I \quad (1.5)$$

たちを Ω の部分錐とよぶ. 直交射影 $P_I: V \rightarrow V^I$ による $x \in V$ の像を x_I とかく. 例 1.1 の場合, $x = (x_{mk}) \in V$ に対し x_I とは小行列 $(x_{mk})_{m,k \in I}$ に他ならない.

§2. V 上の基本相対不変多項式.

パラメータ $s = (s_1, s_2, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ について群 H の 1 次元表現 $\chi_s: H \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を

$$\chi_s(\exp(\sum_{k=1}^r c_k L_{E_k})) := e^{s_1 c_1 + \dots + s_r c_r} \quad (c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}) \quad (2.1)$$

で定義すると, H の任意の 1 次元表現はこのような χ_s の形にパラメータ付けされる. ベクトル空間 V 上の多項式 f が χ_s に対応する相対不変多項式であるとは

$$f(t \cdot x) = \chi_s(t)f(x) \quad (t \in H, x \in V) \quad (2.2)$$

が成り立つことをいう. 等質錐 $\Omega \subset V$ は open な H -軌道だから, χ_s に対応する f は存在するならば定数倍を除き一意に定まる. この節ではこのような相対不変多項式 f を全て決定する.

補題 2.1. 相対不変多項式 f に対応する 1 次元表現 χ_s について各 $s_1, s_2, \dots, s_r$ は非負整数である.

証明) 元 $t = \exp(\sum_{k=1}^r c_k L_{E_k}) \in H$ に対して $t \cdot E = e^{c_1} E_1 + e^{c_2} E_2 + \cdots + e^{c_r} E_r$ だから (2.1) と (2.2) より $f(e^{c_1} E_1 + e^{c_2} E_2 + \cdots + e^{c_r} E_r) = (e^{c_1})^{s_1} (e^{c_2})^{s_2} \cdots (e^{c_r})^{s_r} f(E)$.
ここで f は多項式だから $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. $\square$

整数 $l = 1, 2, \dots, r$ について

$$V^{[l,r]} = \sum_{l \leq k \leq m \leq r}^{\oplus} V_{mk} \subset V$$

は H -不変な部分空間である (記号 $[\cdot, \cdot]$ については序章参照). 任意の $x \in V^{[l,r]}$ は $x = x_{ll} E_l + \sum_{m>l} X_{ml} + x_{[l+1,r]}$ ($x_{ll} \in \mathbb{R}$, $X_{ml} \in V_{ml}$, $x_{[l+1,r]} \in V^{[l+1,r]}$) とかけるが, これに対し

$$\varphi_l(x) := x_{ll}, \quad \Phi_l(x) := x_{ll} x_{[l+1,r]} - (\sum_{m>l} X_{ml}) \Delta(\sum_{m>l} X_{ml})/2$$

として函数 $\varphi_l : V^{[l,r]} \rightarrow \mathbb{R}$ および写像 $\Phi_l : V^{[l,r]} \rightarrow V^{[l+1,r]}$ を定義する. たとえば $V = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ のとき, 埋め込み $\text{Sym}(r+1-l, \mathbb{R}) \ni x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in V$ によって $\text{Sym}(r+1-l, \mathbb{R})$ と $V^{[l,r]}$ を同一視すると,

$$\begin{aligned} \Phi_l : V^{[l,r]} \ni & \left(\begin{array}{c|ccc} x_{ll} & x_{l+1,l} & \cdots & x_{rl} \\ \hline x_{l+1,l} & x_{l+1,l+1} & \cdots & x_{r,l+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{rl} & x_{r,l+1} & \cdots & x_{rr} \end{array} \right) \\ & \mapsto x_{ll} \begin{pmatrix} x_{l+1,l+1} & \cdots & x_{r,l+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r,l+1} & \cdots & x_{rr} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{l+1,l} \\ \vdots \\ x_{rl} \end{pmatrix} (x_{l+1,l} \cdots x_{rl}) \in V^{[l+1,r]} \end{aligned}$$

となる. 整数 $l = 1, 2, \dots, r$ について $\delta^l := (0, \dots, 0, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ とする.

補題 2.2. ベクトル空間 $V^{[l,r]}$ ($l = 1, \dots, r$) の元 x と群 H の元 t について

$$\varphi_l(t \cdot x) = \chi_{\delta^l}(t) \varphi_l(x), \quad (2.3)$$

$$\Phi_l(t \cdot x) = \chi_{\delta^l}(t) t \cdot \Phi_l(x) \quad (2.4)$$

が成り立つ.

多項式写像 Φ_l と φ_l を用いて V 上の多項式 D_k ($k = 1, \dots, r$) を

$$D_1 := \varphi_1, \quad D_k := \varphi_k \circ \Phi_{k-1} \circ \cdots \circ \Phi_1 \quad (k = 2, \dots, r) \quad (2.5)$$

と定義すると, これらは H -相対不変である. 実際, φ_l と Φ_l がそれぞれ 1 次と 2 次の写像であるということと補題 2.2 から, たとえば

$$\begin{aligned} D_3(t \cdot x) &= \varphi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1(t \cdot x) \\ &= \chi_{\delta^1}(t)^2 \varphi_3 \circ \Phi_2(t \cdot \Phi_1(x)) \\ &= \chi_{\delta^1}(t)^2 \chi_{\delta^2}(t) \varphi_3(t \cdot \Phi_2 \circ \Phi_1(x)) \\ &= \chi_{\delta^1}(t)^2 \chi_{\delta^2}(t) \chi_{\delta^3}(t) \varphi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1(x) \\ &= \chi_{2\delta^1 + \delta^2 + \delta^3}(t) D_3(x). \end{aligned}$$

同様の議論から, 次の命題を得る.

命題 2.3 (Vinberg [15], Gindikin [3]). 整数 $k = 1, \dots, r$ について

$$\mu(k) := \begin{cases} (1, 0, \dots, 0) & (k = 1), \\ (2^{k-2}, 2^{k-3}, \dots, 1, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0) & (k = 2, \dots, r). \end{cases}$$

とすると

$$D_k(t \cdot x) := \chi_{\mu(k)}(t) D_k(x) \quad (t \in H, x \in V)$$

が成り立つ.

部分錐 $\Omega^{[l, r]} \subset V^{[l, r]}$ は Φ_l によって $\Omega^{[l+1, r]} \subset V^{[l+1, r]}$ に移る. 実際

$$\Phi_l^{-1}(\Omega^{[l+1, r]}) = \Omega^{[l, r]} \cup (-\Omega^{[l, r]}) \quad (2.6)$$

$$\Omega^{[l, r]} = \{x \in V^{[l, r]}; \varphi_l(x) > 0, \Phi_l(x) \in \Omega^{[l+1, r]}\} \quad (2.7)$$

が成り立ち, さらに (2.7) と (2.5) から次の命題が帰納的に示される.

命題 2.4 (Vinberg [15]). 等質錐は多項式 $D_1, \dots, D_r$ を用いて次のように記述される:

$$\Omega = \{x \in V; D_k(x) > 0 \ (k = 1, \dots, r)\}.$$

命題 2.3 と 2.4 の Vinberg による証明はより直接的な計算に基づいており, 補題 2.2 を用いた我々のアプローチは Piatetskii-Shapiro [13, p. 64] に近い.

多項式 D_k は 2^{k-1} 次の多項式で多くの場合 '余計な' 因子を含んでおり, 必ずしもそれらの巾乗の積が相対不変多項式全体を生成するとは限らない (例 2.1, 2.2 参照). 以下で我々は D_k を一種の互除法によって素因子分解し, そうして得られた素因子たちの巾乗の積として全ての相対不変多項式が表されることを示す.

ベクトル空間 V 上の多項式 Δ_k ($k = 1, \dots, r$) を次のように定める: (i) $\Delta_1 := D_1$, (ii) $\Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}$ まで定まったとき, それらで D_k を割れるだけ割り, 残った商を Δ_k とする. すなわち

$$D_k = \Delta_k \cdot (\Delta_1)^{a_{k1}} (\Delta_2)^{a_{k2}} \dots (\Delta_{k-1})^{a_{k,k-1}} \quad (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{k,k-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

かつ Δ_k は $\Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}$ のいずれによっても整除されないものとする.

定理 2.5. (i) 各 Δ_k ($k = 1, \dots, r$) は既約な相対不変多項式であり, 対応する 1 次元表現を $\chi_{\sigma(k)}$ とすると $\sigma(k)_k = 1$ かつ $\sigma(k)_m = 0$ ($m = k+1, \dots, r$). すなわち r 個の整数の組 $\sigma(k)$ は

$$\sigma(k) = (*, \dots, *, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0) \quad (* \text{ は非負整数}) \quad (2.8)$$

の形をしている.

(ii) $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$ は H の作用に関する基本相対不変式である. すなわち V 上の任意の H -相対不変多項式は $C(\Delta_1)^{a_1}(\Delta_2)^{a_2} \dots (\Delta_r)^{a_r}$ ($C \in \mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の形にかかる.

証明) (i) 整数 k に関する帰納法で証明する. 多項式 D_k が

$$D_k = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_N \quad (2.9)$$

と素因子分解されているとしよう. このとき各 φ_n ($n = 1, \dots, N$) も H -相対不変である ([14, Proposition 2(2)]). 多項式 φ_n に対応する 1 次元表現を χ_{s^n} ($s^n = (s_1^n, \dots, s_r^n) \in \mathbb{C}^r$) とする. 命題 2.3 と (2.9) から $\mu(k) = s^1 + s^2 + \dots + s^N$ である. とくに $m = k+1, \dots, r$ については

$$0 = \mu(k)_m = s_m^1 + s_m^2 + \dots + s_m^N$$

で, 補題 2.1 より $s_m^1, \dots, s_m^N$ は非負整数だから $s_m^1 = s_m^2 = \dots = s_m^N = 0$. 同様に

$$1 = \mu(k)_k = s_k^1 + s_k^2 + \dots + s_k^N$$

から, $s_k^1, \dots, s_k^N$ のうちの何れか一つだけが 1 で他は 0 ということがわかる. ここで $s_k^1 = 1$ としよう. このとき $\bar{\sigma} := s^2 + \dots + s^N$ とすると $\bar{\sigma}_m = 0$ ($m \geq k$) だから, $\sigma(i)$ ($i = 1, \dots, k-1$) に関する帰納法の仮定 (2.8) より

$$s^2 + \dots + s^N = \bar{\sigma} = a_{k1}\sigma(1) + a_{k2}\sigma(2) + \dots + a_{k,k-1}\sigma(k-1)$$

となるような整数 $a_{k1}, \dots, a_{k2}, \dots, a_{k,k-1}$ がとれる. 両辺に対応する相対不変式を比較すると, ある定数 $C_0 \in \mathbb{C}$ があって

$$\varphi_2 \dots \varphi_N = C_0 (\Delta_1)^{a_{k1}} (\Delta_2)^{a_{k2}} \dots (\Delta_{k-1})^{a_{k,k-1}}.$$

ここで帰納法の仮定より $\Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}$ は既約多項式だから $a_{k1}, \dots, a_{k,k-1}$ は負でない. したがって Δ_k の定義から $\Delta_k = C_0 \varphi_1$ かつ $\sigma(k) = s^1$ であり, 主張は成り立つ. (ii) 相対不変多項式 f に対応する χ_s について, 補題 2.1 と (2.8) から $s = a_1\sigma(1) + a_2\sigma(2) + \dots + a_r\sigma(r)$ となる整数 $a_1, \dots, a_r$ がとれる. これからある定数 C があって

$$f = C(\Delta_1)^{a_1}(\Delta_2)^{a_2} \dots (\Delta_r)^{a_r}$$

とかけるが, $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ は既約だから $a_1, \dots, a_r$ は負でない. $\square$

以上の議論を双対錐 Ω^* に対応する $\text{clan}(V^*, \Delta')$ に適用して, V^* 上の H -基本相対不変多項式 $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_r^*$ が得られる. ただし (V^*, Δ') の normal 分解から定まる H の 1 次元表現のパラメータ付けを χ_s^* ($s = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$) としたとき, 前節で述べた“添数の反転”から $t \in H$ について

$$\chi_s^*(t) = \chi_{-s^*}(t) \quad (\text{ただし } s^* := (s_r, \dots, s_2, s_1)) \quad (2.10)$$

となる ([7, Section 2]). このことと定理 2.5 から次が従う.

命題 2.6. 双対錐 Ω^* に付随する基本相対不変式 Δ_k^* ($k = 1, \dots, r$) について,

$$\rho(k) = (*, \dots, *, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0)$$

という形の非負整数の組 $\rho(k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ で

$$\Delta_k^*(t \cdot \xi) = \chi_{-\rho(k)^*}(t) \Delta_k^*(\xi) \quad (t \in H, \xi \in V^*)$$

となるものが存在する.

例 2.1. 例 1.1 に続いて $V = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ の場合を考える. このとき

$$D_k(x) = \begin{cases} \det x_{[1,k]} & (k = 1, 2), \\ (\det x_{[1,1]})^{2^{k-3}} (\det x_{[1,2]})^{2^{k-4}} \dots (\det x_{[1,k-2]}) \cdot (\det x_{[1,k]}) & (k = 3, \dots, r). \end{cases}$$

よって $\Delta_k(x) = \det x_{[1,k]}$, すなわち Δ_k は k 次の主小行列式に等しい. 一方, 可解 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ を下三角行列の集合として実現すると $L_{E_k} = E_{kk}/2$ だから (2.1) より

$$\chi_s(t) = (t_{11})^{2s_1} (t_{22})^{2s_2} \dots (t_{rr})^{2s_r} \quad (t \in H)$$

である. よって $\Delta_k(a(t)x) = (t_{11})^2 \dots (t_{kk})^2 \Delta_k(x)$ から $\sigma(k) = (1, \dots, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0)$.

双対錐 Ω^* の基本相対不変多項式については $\Delta_k^*(\xi) = \det \xi_{[r+1-k, r]}$ ($\xi \in V^*$) となり, $t \in H$ について

$$\Delta_k^*(a^*(t)\xi) = (t_{r+1-k, r+1-k})^{-2} \dots (t_{r-1, r-1})^{-2} (t_{rr})^{-2} \Delta_k^*(\xi) = \chi_{-\sigma(k)^*}(t) \Delta_k^*(\xi)$$

だから $\rho(k) = \sigma(k) = (1, \dots, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0)$.

例 2.2. 例 1.2 で論じた状況を考える. 元 $x = (x_{mk}) \in V$ について

$$D_1(x) = x_{11}, \quad D_2(x) = x_{11}x_{22}, \quad D_3(x) = x_{11}(x_{11}x_{22}x_{33} - x_{22}x_{31}^2 - x_{11}x_{32}^2),$$

よって

$$\Delta_1(x) = x_{11}, \quad \Delta_2(x) = x_{22}, \quad \Delta_3(x) = x_{11}x_{22}x_{33} - x_{22}x_{31}^2 - x_{11}x_{32}^2 = \det x.$$

例 2.1 と同様 $\chi_{(s_1, s_2, s_3)}(t) = (t_{11})^{2s_1}(t_{22})^{2s_2}(t_{33})^{2s_3}$ ($t \in H$) だから

$$\sigma(1) = (1, 0, 0), \quad \sigma(2) = (0, 1, 0), \quad \sigma(3) = (1, 1, 1).$$

双対錐 $\Omega^* \subset W$ については, 元 $\xi \in W$ について

$$D_1^*(\xi) = \xi_{33}, \quad D_2^*(\xi) = \xi_{33}\xi_{22} - \xi_{32}^2, \quad D_3^*(\xi) = (\xi_{33}\xi_{22} - \xi_{32}^2)(\xi_{33}\xi_{11} - \xi_{31}^2)$$

から

$$\Delta_1^*(\xi) = \xi_{33}, \quad \Delta_2^*(\xi) = \xi_{33}\xi_{22} - \xi_{32}^2, \quad \Delta_3^*(\xi) = \xi_{33}\xi_{11} - \xi_{31}^2$$

となり, よって

$$\rho(1) = (1, 0, 0), \quad \rho(2) = (1, 1, 0), \quad \rho(3) = (1, 0, 1).$$

このように Ω が対称錐でないことを反映して, V 上の相対不変多項式と $V^* \equiv W$ 上の相対不変多項式の様子は全く異なる. なお, この例は Gindikin [5, p. 98] によっても考察されている.

多項式 D_r と Δ_r をそれぞれ D, Δ と書き, 等質錐 Ω に付随する合成行列式および被約行列式とよぶ. 部分錐 $\Omega^I \subset V^I$ に付随する V^I 上の合成行列式と被約行列式をそれぞれ D^I と Δ^I で表し, 直交射影 $P_I : V \rightarrow V_I$ と合成してそれらを V 上の多項式に拡張する: $D^I(x) := D^I(x_I)$, $\Delta^I(x) := \Delta^I(x_I)$ ($x \in V$). 定義から D_k, Δ_k ($k = 1, \dots, r$) はそれぞれ $D^{[1, k]}, \Delta^{[1, k]}$ に他ならない. こうして得られた多項式たちを等質錐 Ω に付随する小行列式型多項式とよぶ. 実際 $V = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ の場合, $\Delta^I(x)$ ($x \in V$) は小行列式 $\det x_I$ ($x \in V$) に等しい.

定理 2.7. 等質錐 Ω および その閉包 $\bar{\Omega}$ は小行列式型多項式を用いて次のように記述される:

- (i) $\Omega = \{x \in V; \Delta_k(x) > 0 \quad (k = 1, \dots, r)\}.$
- (ii) $\bar{\Omega} = \{x \in V; \Delta^I(x) \geq 0 \quad (I \subset [1, r], I \neq \emptyset)\}.$

この定理の (i) は 命題 2.4 から従う. なお (i) から $\bar{\Omega} \subset \{x \in V; \Delta_k(x) \geq 0 \quad (k = 1, \dots, r)\}$ となるが, 逆の包含関係は必ずしも成り立たない. たとえば V が 2 次の対称行列のとき, $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ について $\Delta_k(x) = 0$ ($k = 1, 2$) だが $x \notin \bar{\Omega}$. すなわち (ii) で述べているように $\bar{\Omega}$ を特徴づけるには多項式 Δ_k だけでなく $2^r - 1$ 個の小行列式型多項式 Δ^I が必要になるのである.

例 2.3. 例 1.2 の場合, $\Omega \subset V$ および $\Omega^* \subset W$ に付随する小行列式型多項式は次の通り ($\Delta^{[1,k]} = \Delta_k$ と $\Delta_{[1,k]}^* = \Delta_k^*$ については例 2.2 を参照): 元 $x \in V$ と $\xi \in W$ について

$$\begin{aligned}\Delta^{\{2\}}(x) &= x_{22}, & \Delta^{\{3\}}(x) &= x_{33}, & \Delta^{\{1,3\}}(x) &= x_{11}x_{33} - x_{31}^2, \\ \Delta^{\{2,3\}}(x) &= x_{22}x_{33} - x_{32}^2, \\ \Delta_{\{2\}}^*(\xi) &= \xi_{22}, & \Delta_{\{3\}}^*(\xi) &= \Delta_{\{2,3\}}^*(\xi) = \xi_{11}, & \Delta_{\{1,3\}}^*(\xi) &= \xi_{33}\xi_{11} - \xi_{31}^2.\end{aligned}$$

§3. Ω 上の Riesz 超関数.

パラメータ $s \in \mathbb{C}^r$ について等質錐 Ω 上の関数 Υ_s を

$$\Upsilon_s(t \cdot E) := \chi_s(t) \quad (t \in H)$$

によって定義する. このとき (2.8) から $s = \alpha_1 \sigma(1) + \alpha_2 \sigma(2) + \cdots + \alpha_r \sigma(r)$ となる $\alpha_k \in \mathbb{C}$ ($k = 1, \dots, r$) がとれて,

$$\Upsilon_s(x) = \Delta_1(x)^{\alpha_1} \Delta_2(x)^{\alpha_2} \cdots \Delta_r(x)^{\alpha_r} \quad (x \in \Omega)$$

が成り立つ ($x \in \Omega$ ならば定理 2.7 (i) から $\Delta_k(x)$ は正数なのでその複素数巾も定義できる).

非負整数の組 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ と非負半整数の組 $d \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ を

$$\begin{aligned}p_k &:= \sum_{i < k} \dim V_{ki}, & q_k &:= \sum_{m > k} \dim V_{mk}, \\ d_k &:= 1 + (p_k + q_k)/2 \quad (k = 1, \dots, r).\end{aligned} \tag{3.1}$$

で定めると, $\Upsilon_{-d}(x) dm(x)$ (dm は V の内積から定まる Lebesgue 測度) は Ω 上の H -不変な測度である. 条件

$$\Re s_k > p_k/2 \quad (k = 1, \dots, r) \tag{3.2}$$

をみたすパラメータ s について Ω 上の Γ 積分

$$\Gamma_\Omega(s) := \int_\Omega e^{-\langle x, E^* \rangle} \Upsilon_{s-d}(x) dm(x)$$

は絶対収束し, その値は

$$2^{-r/2} \pi^{(\dim V - r)/2} \prod_{k=1}^r \Gamma(s_k - p_k/2) \tag{3.3}$$

と通常の Γ 関数の積として表される ([3, Theorem 2.1]). さらに (3.2) の下で V 上の緩増加超関数 $\mathcal{R}_s \in \mathcal{S}'(V)$ を

$$\langle \mathcal{R}_s, \varphi \rangle := \frac{1}{\Gamma_\Omega(s)} \int_\Omega \varphi(x) \Upsilon_{s-d}(x) dm(x) \tag{3.4}$$

(φ は V 上の急減少関数) で定めると, 右辺は s に関する $\mathbb{C}^r$ 上の整関数に解析接続され, それによって全ての $s \in \mathbb{C}^r$ について $\mathcal{R}_s \in \mathcal{S}'(V)$ が定義される ([3, Theorem 3.1]). この定義から直ちに $\langle \mathcal{R}_s, e^{-\langle \cdot, E^* \rangle} \rangle = 1$ および H -相対不変性

$$\langle \mathcal{R}_s, \varphi \circ t \rangle = \chi_{-s}(t) \langle \mathcal{R}_s, \varphi \rangle \quad (t \in H)$$

がわかり, これらからさらに次のことが従う.

命題 3.1 (Gindikin [3]). (i) $\langle \mathcal{R}_s, e^{-\langle \cdot, t E^* \rangle} \rangle = \chi_s(t) \quad (t \in H).$

(ii) $\mathcal{R}_s * \mathcal{R}_{s'} = \mathcal{R}_{s+s'}.$

(iii) $\mathcal{R}_0$ は原点における Dirac 超関数 δ に等しい.

定義 (3.4) より, 超関数 $\mathcal{R}_{s'+d}$ の Ω への制限は函数 $\Gamma_\Omega(s'+d)^{-1} \Upsilon_{s'}$ と同一視できる. よって命題 3.1 (ii) および (3.1) と (3.3) から $x \in \Omega$ について

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s * \Upsilon_{s'}(x) &= \frac{\Gamma_\Omega(s'+d)}{\Gamma_\Omega(s+s'+d)} \Upsilon_{s+s'}(x) \\ &= \left(\prod_{k=1}^r \frac{\Gamma(s'_k + 1 + q_k/2)}{\Gamma(s_k + s'_k + 1 + q_k/2)} \right) \Upsilon_{s+s'}(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

を得る. 一方 命題 3.1 (i) から, Laplace 変換 が双対錐 Ω^* 上の H -相対不変函数 に等しいような超関数として $\mathcal{R}_s$ が特徴付けられることがわかる. このことと 前節の相対不変多項式に関する結果を合わせて次の定理を得る.

定理 3.2. (i) 整数の組 $\rho(k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ ($k = 1, \dots, r$) は命題 2.6 のものとする. Riesz 超関数 $\mathcal{R}_s$ の台が 1 点集合 $\{0\}$ に等しい必要十分条件は非負整数 $a_1, a_2, \dots, a_r$ があって $-s^* = a_1 \rho(1) + a_2 \rho(2) + \dots + a_r \rho(r)$ となることである. このとき

$$\mathcal{R}_s = \Delta_1^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{a_1} \Delta_2^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{a_2} \dots \Delta_r^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{a_r} \delta$$

が成り立つ.

(ii) 上の状況で $\phi := (\Delta_1^*)^{a_1} (\Delta_2^*)^{a_2} \dots (\Delta_r^*)^{a_r} \in \mathcal{P}(V^*)$, $m := -s^* \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ とすると

$$\phi \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{R}_{m^*} = \delta.$$

(iii) 任意の $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{C}^r$ と $x \in \Omega$ について

$$\phi \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \Upsilon_{\sigma+m^*}(x) = \left(\prod_{m_{r+1-k} > 0} \prod_{l=1}^{m_{r+1-k}} (\sigma_k + q_k/2 + l) \right) \Upsilon_\sigma(x)$$

が成り立つ (はじめの $\prod$ は $m_{r+1-k} > 0$ となるような k についての積をとることを意味する).

証明) (i) 超函数の一般論から, $\text{supp } \mathcal{R}_s = \{0\}$ ならば $\mathcal{R}_s$ は V^* 上のある多項式 $\phi \in \mathcal{P}(V^*)$ を用いて $\mathcal{R}_s = \phi(\frac{\partial}{\partial x})\delta$ と表され, その Laplace 変換は $\langle \mathcal{R}_s, e^{-\langle \cdot, \xi \rangle} \rangle = \phi(\xi)$ ($\xi \in V^*$) と計算される. 命題 3.1 (i) から ϕ は H -相対不変性

$$\phi(t \cdot \xi) = \chi_s(t)\phi(\xi) \quad (t \in H, \xi \in V^*)$$

をもつ. したがって定理 2.5 と $\phi(E^*) = 1$ から $\phi = (\Delta_1^*)^{a_1} \dots (\Delta_r^*)^{a_r}$ となる非負整数 a_k ($k = 1, \dots, r$) が存在し, よって命題 2.6 から主張は従う.

(ii) $\mathcal{R}_s = \mathcal{R}_{-m^*} = \phi(\frac{\partial}{\partial x})\delta$ を命題 3.1 (ii) に代入して $\phi(\frac{\partial}{\partial x})\mathcal{R}_{s'} = \mathcal{R}_{s'-m^*}$. とくに $s' = m^*$ とすれば, 命題 3.1 (iii) より与式を得る.

(iii) 同じく $\mathcal{R}_s = \mathcal{R}_{-m^*} = \phi(\frac{\partial}{\partial x})\delta$ を (3.5) に代入して

$$\begin{aligned} \phi(\frac{\partial}{\partial x})\Upsilon_{s'}(x) = \\ \left(\prod_{m_{r+1-k} > 0} (s'_k + q_k/2)(s'_k + q_k/2 - 1) \dots (s'_k + q_k/2 - m_{r+1-k} + 1) \right) \Upsilon_{s'-m^*}(x), \end{aligned}$$

これに $s'_k = \sigma_k + m_{r+1-k}$ を代入して与式を得る. □

例 3.1. 例 1.1 および 2.1 に続き, $V = \text{Sym}(r, \mathbb{R})$ の場合を考える. このとき

$$\Upsilon_s(x) = \Delta_1(x)^{s_1-s_2} \Delta_2(x)^{s_2-s_3} \dots \Delta_{r-1}(x)^{s_{r-1}-s_r} \Delta_r(x)^{s_r}$$

となる. また $(\frac{\partial}{\partial x})$ を (l, l) -成分 ($l = 1, \dots, r$) が $\frac{\partial}{\partial x_{ll}}$ で (m, l) -成分 ($m \neq l$) が $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{ll}}$ となるような対称行列とすれば, $\Delta_k^*(\frac{\partial}{\partial x})$ は小行列式 $\Delta_k^*(\xi) = \det \xi_{[r+1-k, r]}$ において ξ に $(\frac{\partial}{\partial x})$ を代入して得られる微分作用素である. 一方 $\text{supp } \mathcal{R}_s = \{0\}$ となる必要十分条件は $s \in \mathbb{Z}^r$ かつ $s_r \leq s_{r-1} \leq \dots \leq s_1 \leq 0$ で, このとき

$$\mathcal{R}_s = \Delta_1^*(\frac{\partial}{\partial x})^{-s_1} \Delta_2^*(\frac{\partial}{\partial x})^{s_1-s_2} \dots \Delta_r^*(\frac{\partial}{\partial x})^{s_{r-1}-s_r} \delta.$$

他方 $q_k = r - k$, $\rho(k) = (1, \dots, \overset{(k)}{1}, 0, \dots, 0)$ だから

$$\Delta_k^*(\frac{\partial}{\partial x})\Upsilon_{s+\rho(k)^*}(x) = \left(\prod_{i=r+k-1}^r (s_i + \frac{r-i+2}{2}) \right) \Upsilon_s(x) \quad (x \in \Omega).$$

とくに $\Upsilon_{(\alpha, \dots, \alpha)}(x) = (\det x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) と $\Delta_r^*(\frac{\partial}{\partial x}) = \det(\frac{\partial}{\partial x})$ から

$$\det(\frac{\partial}{\partial x})[(\det x)^{\alpha+1}] = (\alpha+1)(\alpha+3/2) \dots (\alpha+(r+1)/2)(\det x)^\alpha$$

となる (Gårding [2]).

例 3.2. 例 1.2 および 2.2 と同じ状況を考える. このとき $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3$ について $\Upsilon_s(x) = \Delta_1(x)^{s_1-s_3} \Delta_2(x)^{s_2-s_3} \Delta_3(x)^{s_3}$ であり ([5, p. 98 (e)]),

$$\Delta_1^*(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x_{33}}, \quad \Delta_2^*(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_{33} \partial x_{22}} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_{32}^2}, \quad \Delta_3^*(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_{33} \partial x_{11}} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_{31}^2}$$

となる. 超関数 $\mathcal{R}_s$ について $\text{supp } \mathcal{R}_s = \{0\}$ となる必要十分条件は $s \in -\mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ かつ $s_1 + s_2 \geq s_3$ で, このとき $\mathcal{R}_s = \Delta_1^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-s_1} \Delta_2^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-s_2} \Delta_3^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{s_1+s_2-s_3} \delta$ である (cf. [5, p. 98 (f)]). また $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 0$ だから

$$\begin{aligned}\Delta_1^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Upsilon_{(s_1, s_2, s_3+1)}(x) &= (s_3 + 1) \Upsilon_{(s_1, s_2, s_3)}(x), \\ \Delta_2^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Upsilon_{(s_1, s_2+1, s_3+1)}(x) &= (s_2 + 3/2)(s_3 + 1) \Upsilon_{(s_1, s_2, s_3)}(x), \\ \Delta_3^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Upsilon_{(s_1+1, s_2, s_3+1)}(x) &= (s_1 + 3/2)(s_3 + 1) \Upsilon_{(s_1, s_2, s_3)}(x).\end{aligned}$$

たとえば $\alpha \in \mathbb{C}$ について $\Upsilon_{(\alpha, \alpha, \alpha)}(x) = (\det x)^\alpha$, $\Upsilon_{(\alpha+1, \alpha, \alpha+1)}(x) = x_{22}^{-1}(\det x)^{\alpha+1}$ であるから

$$\Delta_3^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) [x_{22}^{-1}(\det x)^{\alpha+1}] = (\alpha + 3/2)(\alpha + 1)(\det x)^\alpha.$$

§4. 等質錐の閉包に含まれる H -軌道の構造.

集合 $I \subset [1, r]$ について $E_I \in V$ を通る H -軌道を $\mathcal{O}_I$ とする. とくに $I = [1, r]$ のときは $\mathcal{O}_I = \Omega$ であるが, そうでないとき $\mathcal{O}_I$ は Ω の境界に含まれる次元の小さい軌道で, $I = \emptyset$ のときは $\mathcal{O}_I = \{0\}$ である.

命題 4.1. 等質錐 Ω の閉包は 2^r 個の H -軌道 $\mathcal{O}_I$ に分解される:

$$\bar{\Omega} = \bigsqcup_{I \subset \{1, \dots, r\}} \mathcal{O}_I.$$

集合 I は空でないものとする. このとき $\mathfrak{h}_{mk} := \{L_x; x \in V_{mk}\} \subset \mathfrak{h}$ ($1 \leq k < m \leq r$) として

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^I &:= \{L_x \in \mathfrak{h}; x \in V^I\} = \sum_{k \in I}^{\oplus} \mathbb{R} L_{E_k} \oplus \sum_{m, k \in I, m > k}^{\oplus} \mathfrak{h}_{mk}, \\ \mathfrak{n}^I &:= \{L \in \mathfrak{h}; [L_{E_I}, L] = (-1/2)L\} = \sum_{m \notin I, k \in I, m > k}^{\oplus} \mathfrak{h}_{mk},\end{aligned}$$

$$\mathfrak{h}(\mathcal{O}_I) := \mathfrak{n}^I \oplus \mathfrak{h}^I$$

と定義すると, これらは $\mathfrak{h}$ の部分 Lie 代数である. 対応する H の部分 Lie 群をそれぞれ $H^I, N^I, H(\mathcal{O}_I)$ とすると N^I は $H(\mathcal{O}_I)$ の可換な正規部分群であり $H(\mathcal{O}_I) = N^I \rtimes H^I$ が成り立つ.

補題 4.2. (i) 群 $H(\mathcal{O}_I)$ は $\mathcal{O}_I$ に単純推移的に作用する.

(ii) 直交射影 $P_I: V \rightarrow V^I$ は $H(\mathcal{O}_I)$ の作用に関して次のような変換性をもつ:

$$P_I(nt \cdot x) = t \cdot P_I(x) \quad (x \in V, n \in N^I, t \in H^I).$$

ここで部分錐 $\Omega^I \subset V^I$ は E_I を通る H^I 軌道であること ((1.5) 参照) に注意すると, 補題 4.2 から次のことがわかる:

命題 4.3. (i) 射影 P_I による $\mathcal{O}_I$ の像は部分錐 Ω^I に等しい.

(ii) 元 $x \in \Omega^I$ について $P_I^{-1}(x) \cap \mathcal{O}_I = N^I \cdot x$. これらの N^I -軌道たちは H^I の作用によって互いに移り合う.

すなわち射影 $P_I: \mathcal{O}_I \rightarrow \Omega^I$ によって軌道 $\mathcal{O}_I$ には群 $H(\mathcal{O}_I) = N^I \rtimes H^I$ の作用と整合するファイバー束の構造が入る.

例 4.1. 例 1.1 で $r = 2$ のとき, すなわち $V = \text{Sym}(2, \mathbb{R})$ の場合を考える. このとき $I = \{1\}$ とすると

$$\begin{aligned} H^I &= \left\{ \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; t_{11} > 0 \right\}, & N^I &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_{21} & 1 \end{pmatrix}; t_{21} \in \mathbb{R} \right\}, \\ \Omega^I &= \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; x > 0 \right\}, & \mathcal{O}_I &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}; x > 0, xz - y^2 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

とくに $\mathcal{O}^I$ は N^I -軌道たち $a(N^I) \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & t_{21}x \\ t_{21}x & (t_{21})^2 x \end{pmatrix}; t_{21} \in \mathbb{R} \right\} \quad (x > 0)$ がファイバーとして連なった構造をしていることがわかる.

Lie 代数 $\mathfrak{n}^I$ は $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \sum_{1 \leq k < m \leq r} \mathfrak{h}_{mk}$ に含まれているから, H の任意の 1 次元表現 χ_s の N^I 上での値は 1 である. このことと命題 4.3 から次がわかる.

補題 4.4. (i) 軌道 $\mathcal{O}_I$ 上の H -相対不変関数 ϕ について $\phi(x) = \phi(x_I) \quad (x \in \mathcal{O}_I)$ が成り立つ.

(ii) 部分錐 Ω^I 上の H^I -相対不変関数 ψ について $\mathcal{O}_I$ 上の関数 ϕ を $\phi(x) := \psi(x_I) \quad (x \in \mathcal{O}_I)$ によって定義すると ϕ は H -相対不変である.

多項式 $f \in \mathcal{P}(V)$ の軌道 $\mathcal{O}_I$ への制限が H -相対不変関数であるとき, すなわちある 1 次元表現 χ_s について

$$f(t \cdot x) = \chi_s(t)f(x) \quad (t \in H, x \in \mathcal{O}_I)$$

が成り立つとき, f は $\mathcal{O}_I$ 上 H -相対不変であるという. 補題 4.4 により軌道 $\mathcal{O}_I$ 上 H -相対不変な多項式を決定するという問題は部分錐 Ω^I 上の H^I -相対不変多項式についての議論に帰着する. ここで $I = \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq r$) のとき, $\alpha = 1, \dots, d$ について $I_\alpha := \{i_1, \dots, i_\alpha\}$ とする. 定理 2.5 を $\text{clan}(V^I, \Delta)$ に適用すれば d 個の多項式 $\Delta^{I_1}, \Delta^{I_2}, \dots, \Delta^{I_d}$ が H^I の作用に関する V^I 上の基本相対不変多項式であることがわかり, したがって我々は次の定理を得る.

定理 4.5. 軌道 $\mathcal{O}_I$ 上 H -相対不変多項式 ϕ に対し, 定数 $C \in \mathbb{C}$ と非負整数 $a_1, a_2, \dots, a_d$ が存在して

$$\phi(x) = C \Delta^{I_1}(x)^{a_1} \Delta^{I_2}(x)^{a_2} \dots \Delta^{I_d}(x)^{a_d}$$

が任意の $x \in \mathcal{O}_I$ について成り立つ.

この定理は ϕ が多項式として $C(\Delta^{I_1})^{a_1}(\Delta^{I_2})^{a_2}\dots(\Delta^{I_d})^{a_d}$ と等しいことを主張しているわけではないことを注意しておく. 実際, $\mathcal{O}_I$ 上で 0 となる任意の多項式を ϕ に加えたものも $\mathcal{O}_I$ 上 H -相対不変な多項式である.

定理 2.7 では等質錐 Ω および その閉包 $\bar{\Omega}$ を小行列式型多項式を用いて特徴付けたが, この節の後半では各軌道 $\mathcal{O}_I$ に対して D^I や Δ^I による同様の代数的記述を与える. 集合 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ と $1 \leq k \leq m \leq r$ (ただし $k \notin I$) について $I^{km} := (I \cap \{1, \dots, k\}) \cup \{k\} \cup \{m\}$ とする. たとえば $i_\alpha < k < i_{\alpha+1}$ のときは $I^{kk} = \{i_1, \dots, i_\alpha, k\}$, $I^{km} = \{i_1, \dots, i_\alpha, k, m\}$ である. 部分集合 $I^{km} \subset \{1, 2, \dots, r\}$ ($k \notin I, m \geq k$) の族を $\mathcal{N}(I)$ と表す.

命題 4.6. 軌道 $\mathcal{O}_I$ は次のように記述される:

$$\mathcal{O}_I = \left\{ x \in V; \begin{array}{ll} D^{I_\alpha}(x) > 0 & (\alpha = 1, \dots, d) \\ D^J(x) = 0 & (J \in \mathcal{N}(I)) \end{array} \right\}.$$

次に既約多項式 Δ^J を用いて $\mathcal{O}_I$ の記述をしよう. 一般に D^J は H^J -相対不変多項式だから Δ^{J_α} ($1 \leq \alpha \leq \|J\|$) たちの巾乗の積であることに注意し, 次のような $\mathcal{N}(I)$ の部分族を $\mathcal{M}(I)$ とする:

$$\{I^{kk}; k \notin I\} \cup \{I^{km}; k \notin I, m > k, D^{I^{km}} \text{ は } \Delta^{I^{kk}} \text{ で整除されない}\}. \quad (4.1)$$

集合族 $\mathcal{N}(I)$ が I のみから定まるのに対し, $\mathcal{M}(I)$ は Ω の構造にも依存する.

定理 4.7. 軌道 $\mathcal{O}_I$ は小行列式型多項式 Δ^J たちを用いて次のように記述される:

$$\mathcal{O}_I = \left\{ x \in V; \begin{array}{ll} \Delta^{I_\alpha}(x) > 0 & (\alpha = 1, \dots, l) \\ \Delta^J(x) = 0 & (J \in \mathcal{M}(I)) \end{array} \right\}.$$

例 4.2. 例 1.1 で $r = 4$ の場合 (すなわち $V = \text{Sym}(4, \mathbb{R})$) を考え, $I = \{1, 2\}$ とすると

$$\mathcal{O}_I = \mathfrak{a}(H)(E_{11} + E_{22}) = \left\{ x \in V; \begin{array}{ll} \Delta^{\{1\}}(x) > 0, & \Delta^{\{1,2\}}(x) > 0 \\ \Delta^{\{1,2,3\}}(x) = 0, & \Delta^{\{1,2,3,4\}}(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

そして $\Delta^{\{1\}}$ と $\Delta^{\{1,2\}}$ は $\mathcal{O}_I$ 上 H -相対不変な多項式を生成する. 一方, 群 $G(\Omega) = \mathfrak{a}(\text{GL}(4, \mathbb{R}))$ による $E_I = E_{11} + E_{22}$ の軌道を $\mathcal{O}$ とすると, これは階数 2 の半正定値対称行列の集合であり, H -軌道 $\mathcal{O}_I$ は $\mathcal{O}$ の中で稠密である. しかし $\mathcal{O}$ 上の $\text{GL}(4, \mathbb{R})$ -相対不変多項式は定数函数以外に存在しない.

References

- [1] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [2] L. Gårding, The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 785–826.
- [3] S. G. Gindikin, Analysis in homogeneous domains, *Russian Math. Surveys*, **19** (1964), 1–89.
- [4] —, Invariant generalized functions in homogeneous domains, *Funct. Anal. Appl.*, **9** (1975), 50–52.
- [5] —, Tube domains and the Cauchy problem, *Transl. Math. Monogr.*, **11**, Amer. Math. Soc., 1992.
- [6] H. Ishi, Positive Riesz distributions on homogeneous cones, *J. Math. Soc. Japan*, **52** (2000), 161–186.
- [7] —, Representations of the affine transformation groups acting simply transitively on homogeneous Siegel domains, *J. Funct. Anal.*, **167** (1999), 425–462.
- [8] —, Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications, *J. Lie Theory*, **11** (2001), 155–171.
- [9] —, Determinant type differential operators on homogeneous Siegel domains, *J. Funct. Anal.*, to appear.
- [10] —, Riesz distributions on multi-Lorentz cones, in preparation.
- [11] M. Koecher, Positivitätsbereiche in $\mathbb{R}^n$, *Amer. J. Math.*, **79** (1957), 575–596.
- [12] M. Riesz, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math.*, **81** (1949), 1–223.
- [13] I. I. Piatetskii-Shapiro, *Automorphic functions and the geometry of classical domains*, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [14] M. Sato, T. Shintani, and M. Muro, Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part) —the English translation of Sato's lecture from Shintani's note, *Nagoya Math. J.*, **120** (1990), 1–34.

- [15] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963), 340–403.
- [16] —, The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **13** (1965), 63–93.