

G -homotopy types of G -complexes and representations of G -cohomology theories

阪市大理 村山光孝

§ 0 G は有限群とする。

X が G -complex とは, X : CW-complex with cellular G -action
s.t. $\forall g \in G$ に対し, $X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$ は subcomplex, とする。

G -complex については Bredon [2] に於いて論じられているが
その中で, G -complex の基本的性質を次に挙げておく。

(以下, G -map, G -homotopy 等 $\equiv$ equivariant map, equivariant
homotopy 等を表わすことにする。)

- G -homotopy extension property ([2], Chap I, §1)

- G -cellular approximation theorem ([2], Chap II, Prop 5.6)

これらにより, mapping cylinder, mapping cone, equalizer, telescope
 G -cofibration sequence 等が, (pointed) G -complex の category
の中で構成できる。

又, J.H.C. Whitehead の定理が次の形で成立する。

○ Theorem of J. H. C. Whitehead for G -complexes ([2], Chap II, Cor 5.5)

$X, Y: G$ -complexes, $f: X \rightarrow Y$ G -map とする。

このとき, 次の (1), (2) は同値

(1) f は G -homotopy equivalence.

(2) $\forall H \subset G: \text{subgroup}$ に 対 し $f^H = f|_{X^H}: X^H \rightarrow Y^H$ は (weak) homotopy equivalence

§1 では, さらに G -complex の G -homotopy type を もつ G -space は, Milnor [8] と parallel な性質を持つことを示す。ここでの主要な結果は, [Theorem 1.2] と [Corollary 1.5] である。

§2 では [Corollary 1.5] を使って, Segal [9] で定義された, G -equivariant cohomology theory の Ω - G -spectrum による表現について論じる。

§1

$\mathcal{W}_G$ を G -complex の G -homotopy type を もつ G -space の category,

$\mathcal{W}_G^n$ を G -complex の n -ad の G -homotopy type を もつ G -space の n -ad の category とする。

Definition K が simplicial G -complex とは, K は simplicial complex with simplicial G -action とする。

Theorem 1.1 (Cf J. Milnor [8], Theorem 2)

G -space の n -ad $A = (A; A_1, \dots, A_{n-1})$ に 対 し て 次 は 同 値

(a) $A \in \text{Obj } \mathcal{W}_G^n$

(b) $/A$ は G -complex の n -ad に G -dominated. i.e. $\exists X: G$ -complex の n -ad

$\exists f: /A \rightarrow X, g: X \rightarrow /A$ G -maps s.t. $g \circ f \simeq_{\mathbb{Q}} 1_{/A}$ (G -homotopic)

(c) $/A$ は simplicial G -complex in the weak topology の n -ad の G -homotopy type をもつ。

(d) $/A$ は simplicial G -complex in the strong topology の n -ad の G -homotopy type をもつ。

Proof (a) $\Rightarrow$ (b) は 明らか。

(b) $\Rightarrow$ (c) $S(/A) = (S(A), S(A_1), \dots, S(A_{n-1}))$: singular complex の n -ad. とする。

$S(/A)$ は induced G -action に より, simplicial G -set の n -ad と なる。

一般に K : simplicial G -set と すると, $|K|$ (K の geometric realization)

は G -complex になる。 $\forall g \in G$ に対し, K^g は K の subcomplex

かつ $|K^g| = |K|^g$ 。 又 $|K|$ は G -simplicial subdivision をもつ。

$\therefore |S(/A)|$ は simplicial G -complex の n -ad (weak topology) になる。

$\alpha: |S(/A)| \rightarrow /A, \alpha(\sigma, g) = \sigma(g) \quad (\sigma, g) \in |S(/A)|$ は G -map.

又 $|S(/A)^g| = |S(/A^g)| = |S(/A)|^g \quad (\forall g \in G)$ により, $\forall H \subset G$: subgroup に対し

$\alpha^H: |S(/A)|^H \rightarrow A^H$ は weak homotopy equivalent (Cf J. Milnor [7])

$\therefore X$: G -complex の n -ad, と すると, Theorem of J. H. C. Whitehead

for G -complex に より, $\alpha_X: |S(X)| \rightarrow X$ は G -homotopy equivalent

$\alpha_X: X \rightarrow |S(X)|$ を α_X の G -homotopy inverse と すれば,

J. Milnor [8] と 同じ diagram を 得る。

$$\begin{array}{ccccc}
 |S(A)| & \xrightarrow{|S(f)|} & |S(X)| & \xrightarrow{|S(g)|} & |S(A)| \\
 \alpha'_A \uparrow \downarrow \alpha_A & \circlearrowleft & \alpha_X \uparrow \downarrow \alpha'_X & \circlearrowleft & \alpha'_A \uparrow \downarrow \alpha_A \\
 A & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & A
 \end{array}$$

$\alpha'_A: A \rightarrow |S(A)|$ を $\alpha'_A = |S(g)| \circ \alpha'_X \circ f$ とすれば, α'_A は α_A の

G -homotopy inverse である。 //

(C) $\Rightarrow$ (A) K_w を simplicial G -complex in the weak topology の n -ad とすれば $Sd K_w$ (一回重心細分) は G -complex の n -ad である。 //

(C) $\Leftrightarrow$ (d) K を simplicial G -complex の n -ad, K_w (resp K_s) を K の weak (resp, strong) topology をもつ polyhedron とする。このとき $K_w \xrightarrow{q} K_s$ を示せばよい。

$\beta \in K^0$ (K の頂点) に対し, K_s の open set U_β を $U_\beta = \{x \in K_s \mid x_\beta > \max_{\beta \in K^0} x_\beta\}$ (x_β, x_γ は x の重心座標), $\mathcal{U} = \{U_\beta\}_{\beta \in K^0}$ とすると, $\mathcal{U}$ は locally finite open covering で, $\forall U_\beta \in \mathcal{U}, \forall g \in G$ に対し, $gU_\beta \in \mathcal{U}$ (このとき, $\mathcal{U}$ を G -covering という), $gU_\beta = U_{g\beta}$ ($\mathcal{U}$ に G -action が入る。)

$P_\beta: K_s \rightarrow \mathbb{R}$ を $P_\beta(x) = d(x, K_s - U_\beta) / \sum_{\beta \in K^0} d(x, K - U_\beta), x \in K_s$ (d は K_s の距離) とすると $\{P_\beta\}_{\beta \in K^0}$ は partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$ 。

又, $P_\beta(x) = P_{g\beta}(gx)$, (このとき $\{P_\beta\}_{\beta \in K^0}$ を G -partition of unity という)

今 $\mathcal{U}$ の nerve は K である。 $\therefore P: K_s \rightarrow K_w$ を $P(x) = \sum_{\beta \in K^0} P_\beta(x) \cdot \beta$ とする。(P は n -ad の continuous G -map)。又 $i: K_w \rightarrow K_s$ (identity) は G -map, 又 $i \circ P$ は各 simplex をそれ自身の中に写す。 $\therefore (1-t) \cdot i \circ P + t \cdot I_{K_s}$ は $i \circ P$ と I_{K_s} の G -homotopy, 同様に $i \circ P \xrightarrow{q} I_{K_w}$ 。 $\therefore K_w \xrightarrow{q} K_s \cdot P$, $q \in d$ 。

Definition (C.f. J. Milnor [8] p277)

G -space X が G -E.L.C.X (G -equilocally convex) とは.

$\exists \mathcal{U} \subset X \times X$, diagonal の G -invariant neighborhood

$\exists \lambda: \mathcal{U} \times I \rightarrow X$ G -map ($X \times X$ の G -action は diagonal action, $I=[0,1]$, trivial action,

s.t (1), $\lambda(x, y, 0) = x$, $\lambda(x, y, 1) = y$, $(x, y) \in \mathcal{U}$

(2) $\lambda(x, x, t) = x$, $x \in X$, $t \in I$.

$\exists \mathcal{V} = \{\bar{V}_\beta\}$ open covering of X ($\bar{V}_\beta$ は convex set)

s.t $\bar{V}_\beta \times \bar{V}_\beta \subset \mathcal{U}$ $\lambda(\bar{V}_\beta \times \bar{V}_\beta \times I) = \bar{V}_\beta$.

同様に G -space の n -ad $X = (X; X_1, \dots, X_{n-1})$ が G -E.L.C.X とは.

X は G -E.L.C.X, X_i $i=1, \dots, n-1$ は closed G -subspace.

s.t (4) $x, y \in X_i$ $(x, y) \in \mathcal{U} \Rightarrow \lambda(x, y, t) \in X_i$, $t \in I$, $i=1, \dots, n-1$.

(この λ を structure map という。)

$\mathcal{V}$ は G -covering でなくてよい。実際 λ は G -map であるから

$g\bar{V}_\beta$ は convex, $\therefore \mathcal{V}$ に $g\bar{V}_\beta$ を加えて G -covering にできる。

Theorem 1.2 G -space の n -ad $A = (A; A_1, \dots, A_{n-1})$ に対し, 次の

(i), (ii), (iii) は同値

(i) $A \in \text{Obj } \mathcal{W}_G^n$

(ii) A は metrizable G -E.L.C.X の G -homotopy type をもつ。

(iii) A は paracompact G -E.L.C.X の G -homotopy type をもつ。

proof (i) $\Rightarrow$ (ii) (C.f. J. Milnor [8] lemma 2)

$k_s = (K, K_1, \dots, K_{n-1})$: simplicial G -complex in the strong topology の n -ad が

metrizable G -E.L.C. X であることを示せばよい。 ($\because$ Theorem 1.1)

$$\overline{V}_\beta = C(\beta, K) \text{ (open star)} \quad \mathcal{V} = \{\overline{V}_\beta\}_{\beta \in K^0} \quad U = \bigcup_{\beta \in K^0} \overline{V}_\beta \times \overline{V}_\beta$$

$$\mu: U \rightarrow K \text{ を } \mu(x, y)_\beta = \min(x_\beta, y_\beta) / \sum_{\beta \in K^0} \min(x_\beta, y_\beta) \text{ とし,}$$

$$\lambda: U \times I \rightarrow K \text{ を } \lambda(x, y, t) = \begin{cases} (1-2t)x + 2t\mu(x, y) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2-2t)\mu(x, y) + (2t-1)y & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ とする}$$

と (i), (2) (3) (4) をみたす。 $\therefore K_X$ は G -E.L.C. X である。 //

(ii) $\Rightarrow$ (iii) は明らか, (iii) $\Rightarrow$ (i) (Cf J. Mitnor [8] lemma 4).

A は para compact G -E.L.C. X であることを示す。 Theorem 1.1 より A は G -complex の n -ad に G -dominated, を示せばよい。

$\mathcal{V} = \{\overline{V}_\beta\}$ を A の convex G -covering とする。 A は para compact.

$\therefore$ fully normal. $\therefore \mathcal{V}$ の細分 $\mathcal{W}'$ である A の各点 a の $\mathcal{W}'$ に関する star $S(a, \mathcal{W}')$ がある $\overline{V}_\beta \in \mathcal{V}$ に含まれるような open covering $\mathcal{W}$ とする。

又 G は finite である $A_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ は closed. $\therefore$ 次の (i) (ii) (iii) をみたす open G -covering $\mathcal{W} = \{W_a\}_{a \in A}$ がとれる。

(i) $gW_a = W_a$ or $gW_a \cap W_a = \emptyset \quad \forall g \in G$

(ii) $\mathcal{W}$ は $\mathcal{W}'$ の細分. (iii) $W_a \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow a \in A_i$

$\mathcal{U} = \{\overline{U}_i\}$ を $\mathcal{W}$ の細分である locally finite open G -covering とする。

A_i closed より $\overline{U}_i \cap A_i \neq \emptyset, \dots, \overline{U}_i \cap A_{i_k} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{U}_i \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \neq \emptyset$, とする

ようにとまることができる。 N を $\mathcal{U}$ の nerve, subcomplex N_i を

' $\langle \sigma_0, \dots, \sigma_k \rangle$ は N_i の k -simplex $\xleftarrow{\text{def}} A_i \cap \overline{U}_{\sigma_0} \cap \dots \cap \overline{U}_{\sigma_k} \neq \emptyset$ ' と定義する。これ

により, simplicial G -complex の n -ad $IN = (N; N_1, \dots, N_{n+1})$ を得る。

$\{P_\sigma\}$ を G -partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$ とする。 (partition of

unity $\{P_\sigma\}$ に対し, '平均' $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P_{g\sigma}(g\omega)$ をつくればよい。))

$P: A \rightarrow N$ を $P(a) = \sum_{\sigma} P_\sigma(a)\sigma$ とすると, P は n -ad の G -map $P: A \rightarrow W$ になる。

G -map $q: N \rightarrow A$ を次の様に定義する。 $Sd N$ を N の重心
細分とし, $Sd N$ の頂点に順序を $\sigma < \sigma' \Leftrightarrow \sigma < \sigma'$ となるように入れ
る。このとき G -action はこの順序を保つ。 $Sd N = \{\sigma'_i : \sigma'_i \wedge \dots \wedge \sigma'_k (\neq \emptyset)\}$ $\sigma = \langle \sigma_0, \dots, \sigma_k \rangle$ とする。各 $\sigma'_i \in Sd N$ に対し, $w_{\sigma'_i} \in W$
を, $\sigma'_i \subset w_{\sigma'_i}$, $q w_{\sigma'_i} = w_{q\sigma'_i}$ となるように選ぶ。 ($a_r \in A$)

q を $Sd N$ の skeleton による induction で構成する。

(1) $\sigma \in Sd N^0$ (σ は $Sd N$ の頂点) に対し, $q(\sigma) = a_\sigma$ 。

(2) k -simplex $\langle \sigma_0, \dots, \sigma_k \rangle$ の点 $x \in \langle \sigma_0, \dots, \sigma_k \rangle$, $x = (1-t)\sigma_0 + ty$, $y \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k \rangle$
に対し, $q(x) = \lambda(a_{\sigma_0}, q(y), t)$, $t \in I$ 。

こうすると q は well defined, continuous G -map になる。又,

$\langle \sigma_0, \dots, \sigma_k \rangle \subset Sd N_i \Rightarrow \sigma'_0 \wedge \dots \wedge \sigma'_k \neq \emptyset$, $\therefore a_{\sigma'_j} \in A_i$ ($j=0, \dots, k$, 従って λ の性
質により), inductive に q は n -ad の G -map $q: N \rightarrow A$ が示される。

$\forall a \in A$ に対し, $\overline{V}_\beta$ を $S(a, W) \subset \overline{V}_\beta$ なるものとする。 $q \circ P(a) \in \overline{V}_\beta$ 。

$\therefore (a, q \circ P(a)) \in \overline{V}_\beta \times \overline{V}_\beta \subset U$, $\therefore f_t: A \rightarrow A$, $f_t(a) = \lambda(a, q \circ P(a), t)$ は $q \circ P(a)$

と I_A の G -homotopy を与える。 $q.e.d.$

Proposition 1.3 (Cf. [8], prop 3)

$A = (A; A_1, \dots, A_{n-1}) \in \text{Ob } \mathcal{W}_G^n$, $B = (B; B_1, \dots, B_{m-1}) \in \text{Ob } \mathcal{W}_G^m$ ならば

$A \times B = (A \times B; A_1 \times B_1, \dots, A_{n-1} \times B_1, A \times B_1, \dots, A \times B_{m-1}) \in \text{Ob } \mathcal{W}_G^{n+m-1}$

proof Theorem 1.2 に於いて, A, B は metrizable, G -E.L.C.X.

としてよい。このとき $A \times B$ は product metric に よる metrizable かつ convex set として, A, B の convex set の product を, structure map として A, B の structure map の product をとれば $A \times B$ は G -E.L.C.X. $\therefore$ Theorem 1.2 に よる $A \times B \in \text{Ob } \mathcal{N}_G^{n+m}$ //

X, Y を G -spaces とする。function space $F(X, Y)$ は 次の G -action に よる G -space となる。 $(g\psi)(x) = g\psi(g^{-1}x)$, $\psi \in F(X, Y)$, $x \in X$, $g \in G$,

Theorem 1.4 (C.f. [8], Thm. 3)

$A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \text{Ob } \mathcal{N}_G^n$, $C = (C, C_1, \dots, C_{n-1})$ compact G -space の n -ad とする。 $F(C, A) = (F(C, A_1), F(C, C_1, A_2), \dots, F(C, C_{n-1}, A_n)) \in \text{Ob } \mathcal{N}_G^n$

proof Theorem 1.2 に よる A は metrizable G -E.L.C.X. としてよい。このとき $F(C, A)$ は metrizable かつ $F(C, C_i, A_{i+1})$ $i=1, \dots, n-1$ は closed G -sub space, (C, C_i は compact による) [8], lemma 3 と同様に, $\mathcal{U} \subset F(C, A) \times F(C, A)$ を $\mathcal{U}' = \{(\psi, \varphi) \in F(C, A) \times F(C, A) \mid (\psi(c), \varphi(c)) \in \mathcal{U}, c \in C\}$ $\chi: \mathcal{U}' \times I \rightarrow F(C, A)$ を $\chi(\psi, \varphi, t)(c) = \chi(\psi(c), \varphi(c), t)$, $c \in C, (\psi, \varphi) \in \mathcal{U}', t \in I$ 各 $\varphi \in F(C, A)$ に対し, φ の convex open neighborhood を $F(C, D_1, \dots, D_k; A, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_k)$ とすれば $F(C, A)$ は G -E.L.C.X. $\therefore$ ここに $\varphi(D_i) \subset \bar{V}_{\beta_i}$, $i=1, \dots, k$ $D_1, \dots, D_k$ は C の compact set covering. //

V を finite dimensional G -module とする。 $\Sigma^V = V^C$: V の 1 点 compactification, とする。 X を pointed G -space, $x_0 \in X$ を base point とする。(base point は常に X^G の中にあるとする。)

$\Omega^V(X) = F(\Sigma^V, *; X, x_0)$ とおき, ($\dim V$ fold) loop space と呼ぶ。

$\Omega^{\mathbb{T}}(X)$ は constant map $\epsilon: \Sigma^{\mathbb{T}} \rightarrow x_0$ を base point に持つ。

Corollary 1.5 (Cf. [8], Cor 3)

$(X; x_0) \in \mathcal{M}_G^2$ ならば $(\Omega^{\mathbb{T}}(X), \epsilon) \in \mathcal{M}_G^2$.

Proof Theorem 1.4 より $C = (\Sigma^{\mathbb{T}}; *, \Sigma^{\mathbb{T}})$, $A = (X, x_0, x_0)$ とすれば $(F(\Sigma^{\mathbb{T}}, X), \Omega^{\mathbb{T}}(X), \epsilon) \in \mathcal{M}_G^3$ $\therefore (\Omega^{\mathbb{T}}X, \epsilon) \in \mathcal{M}_G^2 //$

§2

まず Brown-Adams の表現定理について論じ、それを使って G -cohomology theory の Ω - G -spectrum による表現を考える。

$\mathcal{CM}_0^G$ を pointed G -complex の category, $\mathcal{CM}_*^G$ を $\mathcal{CM}_0^G$ の full subcategory $\tau: X \in \text{Ob } \mathcal{CM}_*^G \iff X^H$ は connected, $\forall H \subset G$ subgroup なるものとする。 h を $\mathcal{CM}_0^G$ 上の Brown functor (G -homotopy functor τ Wedge axiom, Mayer-Vietoris axiom を満たすもの) とする。 $Y \in \text{Ob } \mathcal{CM}_*^G$, $u \in h(Y)$ に対し, $Tu: [X, Y]^G \rightarrow h(X)$, $Tu[f] = f^*u$ ($[,]^G$ は pointed G -homotopy class の set) は $\mathcal{CM}_*^G$ 上の functor の natural transformation τ がある。

$[G/H^+ \wedge S^n, Y]^G \cong \pi_n(Y^H)$ (S^n の G -action は trivial) に注意する。 $f: X \rightarrow Y'$ $\mathcal{CM}_*^G$ の map が $X = G/H^+ \wedge S^n$ に対し, $\forall H \subset G$ subgroup に対し $f_*: [X, Y]^G \xrightarrow{\cong} [X, Y']^G$ を満たせば, Theorem of J.H.C. Whitehead for G -complexes により f は G -homotopy equivalence。

従って, mapping cone, equator 等が $\mathcal{CW}_*^G$ の中で構成できることに注意して, $\{S^n; n \geq 1\}$ のかわりに $\{G_{H^1}^+ \wedge S^n; n \geq 1, H \in G \text{ subgroup}\}$ に対して Brown の construction を行なえば次の proposition を得る。

Proposition 2.1

$\mathcal{CW}_*^G$ 上の Brown functor h は representable。

i.e., $\exists Y \in \mathcal{CW}_*^G, \exists u \in h(Y)$, such that $T_u: [X, Y]^G \cong h(X), X \in \mathcal{CW}_*^G$.

(natural equivalence), Y は unique upto G -homotopy equivalence.

次に $\mathcal{CW}_*^G$ を finite G -complex からなる $\mathcal{CW}_*^G$ の full subcategory, として, $\mathcal{CW}_*^G$ 上の group-valued Brown functor h の表現を Adams の方法に従って述べる。

$X \in \mathcal{CW}_*^G$ に対し, $\hat{h}(X) = \varprojlim_{\substack{\rightarrow \\ \mathcal{CW}_*^G}} h(X_i), X_i \in \mathcal{CW}_*^G, X_i \subset X: G\text{-subcomplex}$

とおく。次のことに注意する。

Lemma

$X \in \mathcal{CW}_*^G$ は $X = \bigcup_i X_i$ と表わせる。ここに $X_i \in \mathcal{CW}_*^G, X_i \subset X: G\text{-subcomplex}$

proof $K \subset X: \text{finite } G\text{-subcomplex}$ に対し, $\exists K' \in \mathcal{CW}_*^G$, s.t. $K \subset K'$, $K' \subset X, G\text{-subcomplex}$, を G の subgroup H の inclusion による induction で示す。 $K \subset K_1$, finite G -subcomplex of X を $\forall H' \subseteq H$, proper subgroup に対し, $K_1^{H'}$ は connected なるものと仮定する。 $K_1^{H'}$ の各 connected component と base point を結ぶ $X^{H'}$ 内の path を L_i とし $K_2 = K_1 \cup (\bigcup_i G \cdot L_i)$ とすれば G は finite $\neq 1$, K_2 は finite G -subcomplex $\supset K \subset K_2$, $K_2^{H'}$ は connected for $\forall H' \subseteq H$ subgroup (L_i は sub

complex となるようにとり。) 又 G -finite よりこの操作は有限回
で終る。 //

$\hat{h}$ は $\mathcal{C}\mathcal{M}_*^G$ 上の weak G -homotopy functor (G -[1]) で,
 $Y \in \mathcal{C}\mathcal{M}_*^G$, $u \in \hat{h}(Y)$ に対し.

$$T_u: [X, Y]^G \rightarrow h(X), \quad X \in \mathcal{C}\mathcal{M}_*^G \quad T_u([f]) = f^*u$$

$$\hat{T}_u: [X, Y]_w^G \rightarrow \hat{h}(X) \quad X \in \mathcal{C}\mathcal{M}_*^G \quad \hat{T}_u([f]) = f^*u$$

は natural transformation.

又, finite G -complex は, ある finite simplicial G -complex に G -homotopy equivalent だから, finite G -complex の G -homotopy type は countable, 又 finite simplicial G -complexes K, K' に対し, $\forall k: K \rightarrow K'$ G -map は, simplicial G -map に G -approximate される。

$\therefore [K, K']^G$ は countable set. (これらの construction は各 cell (simplex) の G -orbit の代表元に対してつくり, G -action が equivariant に拡張することにより, 普通の場合と同様にして得られる。) 従って Adams [1] と同様にして次の proposition を得る。

Proposition 2.2

$\mathcal{C}\mathcal{M}_*^G$ 上の group valued Brown functor h は representable

i.e., $\exists Y \in \mathcal{C}\mathcal{M}_*^G \quad \exists u \in \hat{h}(Y) \text{ s.t. } T_u[X, Y]^G \cong h(X), X \in \mathcal{C}\mathcal{M}_*^G$

と Y は unique, up to G -homotopy equivalence.

Remark [1] Theorem 1.9 の analogue; $\hat{T}_u: [X, Y] \cong \hat{h}(X)$ は, Y にある種の Hopf space structure を与え, $\hat{T}_u$ を group

の isomorphism にすることが出来る。

次に G -cohomology theory (C.f. G. Segal [9]) を定義する。

Definition

$\hat{h}_G^* = \{ \hat{h}^x \mid x \in RC(G) \}$ ($RC(G)$ は G の実表現環) が $\mathcal{N}_0^G(\mathcal{F}_0^G)$ 上の reduced G -cohomology theory とは次の A1), A2) をみたすもの。
 A1) $\hat{h}^x, x \in RC(G)$ は $\mathcal{CN}_0^G(\mathcal{CF}_0^G)$ 上で Mayer-Vietoris axiom, Wedge axiom をみたす contravariant G -homotopy functor.
 A2) 各 V : finite dimensional G -module に対し, natural, suspension isomorphism $\sigma^V: \hat{h}^x(X) \cong \hat{h}^{x+V}(\Sigma^V X)$, $x \in RC(G)$ $\Sigma^V X = \Sigma^V \wedge X$ が定義される。

$\mathcal{F}_0^G$ 上の G -cohomology theory の表現を考える。

$\hat{h}^x|_{\mathcal{CF}_0^G}$ に対し, $\exists Y_\alpha \in \mathcal{CN}_*^G$ st $[X, Y_\alpha]^G \cong \hat{h}^x(X)$, $X \in \mathcal{CF}_0^G$, (Prop. 2.2)

$Y_\alpha = \Omega Y_{\alpha+1}$ ($= \Omega^1 Y_{\alpha+1}$) (1 は 1-dim. trivial G -module) とおく。

Y_α は loop space として Hopt space (H -space) で, $\times$ の積は G -action と可換。この意味で Y_α を Hopt G -space と呼ぶ。このとき、各 $H \subset G$ -subgroup に対し, Y_α^H は Hopt space。

又, $X \in \mathcal{CN}_0^G \Rightarrow \Sigma X = \Sigma^1 X \in \mathcal{CN}_*^G$ であるから, $X \in \mathcal{CF}_0^G$ に対し $\hat{h}^x(X) \cong \hat{h}^{x+1}(\Sigma X) \cong [\Sigma X, Y_{\alpha+1}]^G \cong [X, \Omega Y_{\alpha+1}]^G = [X, Y_\alpha]^G$, $x \in RC(G)$ は natural group isomorphism。

$X \in \mathcal{CN}_*^G$ に対し, $\hat{h}^x(X) = \varprojlim_j \hat{h}^x(X_j)$, $X_j \in \mathcal{CF}_0^G$, $X_j \subset X$, G -subcomplex とおくと, $\hat{h}^x(X) = \varprojlim_j \hat{h}^x(X_j) \cong \varprojlim_j [X_j, Y_\alpha]^G = [X, Y_\alpha]_w^G$ 。

又, $\hat{h}^d(X) = \varprojlim_{\mathcal{F}} \hat{h}^d(X_{\mathcal{F}}) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}} \hat{h}^{d+\tau}(\Sigma^{\tau} X_{\mathcal{F}}) = \hat{h}^{d+\tau}(\Sigma^{\tau} X)$.
 $\therefore [X, Y_{\alpha}]_W^G \cong \hat{h}^d(X) \cong \hat{h}^{d+\tau}(\Sigma^{\tau} X) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}} [\Sigma^{\tau} X_{\mathcal{F}}, Y_{\alpha}]^G \cong \varprojlim_{\mathcal{F}} [X_{\mathcal{F}}, \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau}]^G \cong [X, \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau}]^G$
 今, Thm 1.5 に より, $Y_{\alpha}, \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau} \in \mathcal{CN}_G^G$ と して 好 い。

$[X, Y_{\alpha}]_W^G \cong [X, \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau}]_W^G$ において $X = Y_{\alpha}, \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau}$ と して, $1_{Y_{\alpha}}, 1_{\Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau}}$ に対応する G -map を $f_{\alpha, \tau}: Y_{\alpha} \rightarrow \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau}, g_{\alpha, \tau}: \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau} \rightarrow Y_{\alpha}$ と する。
 このとき $(f_{\alpha, \tau})_{\#} = (g_{\alpha, \tau})_{\#}^{-1}, f_{\alpha, \tau} \circ g_{\alpha, \tau} \simeq_{G, W} 1_{\Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau}}, g_{\alpha, \tau} \circ f_{\alpha, \tau} \simeq_{G, W} 1_{Y_{\alpha}}, \tau''$
 $f_{\alpha, \tau}, g_{\alpha, \tau}$ は Hopf G -space の weak morphism。又 $Y_{\alpha}, \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau} \in \mathcal{CN}_G^G$
 $\therefore HCG$: subgroup に対し $f_{\alpha, \tau}^H, g_{\alpha, \tau}^H$ は Hopf complex の weak morphism。
 $f_{\alpha, \tau}^H \circ g_{\alpha, \tau}^H \simeq_W 1_{(\Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau})^H}, g_{\alpha, \tau}^H \circ f_{\alpha, \tau}^H \simeq_W 1_{Y_{\alpha}^H} \therefore (f_{\alpha, \tau}^H)_{\#}: \pi_n(Y_{\alpha}^H) \cong \pi_n((\Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau})^H) (n \geq 0)$
 $\therefore f_{\alpha, \tau}^H$ は Hopf complex の weak homotopy equivalence を与える。
 $\therefore$ Theorem of J.H.C. Whitehead for G -complexes に より, $f_{\alpha, \tau}$ は G -homotopy equivalence, $f_{\alpha, \tau}: Y_{\alpha} \simeq_G \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau, 0}$ 従って 2 次を得る。

Theorem 2.3

$\hat{h}_G^* = \{ \hat{h}^*(\alpha \in RO(G)) \}$ を $\mathcal{N}_G^G(\mathcal{T}_0^G)$ 上の G -cohomology theory と する と,
 $\alpha \in RC(G), \exists Y_{\alpha} \in \mathcal{CN}_G^G$ s.t Y_{α} は Hopf G -complex $\tau'' \hat{h}^*$ を group
 valued functor と して represent する。又 finite dimensional G -module V
 に対し, $\exists f_{\alpha, \tau}: Y_{\alpha} \simeq_G \Omega^{\tau} Y_{\alpha+\tau}, f_{\alpha, \tau}$ は (Weak) morphism of Hopf G -
 complexes, これ は suspension isomorphism σ_{τ} を induce する。

ω を 各 irreducible G -module の copy を 1 つづつ 直和 した もの と
 する。(trivial G -module を 含む。) G -spectrum E を $E = \{E_n; \varepsilon_n, \varepsilon_n: \Sigma^{\omega} E_n \rightarrow E_{n+1}, n \in \mathbb{Z}\}$ ($E_n \in \mathcal{N}_G^G, \varepsilon_n: G$ -map) と 定義 する。

$\forall n \in \mathbb{Z}$, に 対 し, $\varepsilon'_n: E_n \rightarrow \Omega^w E_{n+1}$ (adjoint of ε_n) が G -homotopy equivalence の とき, $E \in \Omega$ - G -spectrum と いう。

Theorem 2.3 1°, $E_n = \gamma_{nw}$, $\varepsilon'_n = \{n\omega, \omega: E_n \xrightarrow{\sim} \Omega^w E_{n+1}$ と おく。 Ω - G -spectrum $E = \{E_n, \varepsilon_n: \Omega^w E_n \rightarrow E_{n+1}, n \in \mathbb{Z}\}$ を 得る。

Theorem 2.4

全 2 の reduced G -cohomology theory $\tilde{h}_G^* = \{\tilde{h}_G^d; d \in RO(G)\}$ は Ω - G -spectrum を represent する。 i.e. $\forall d \in RO(G)$ に 対 し,

次の natural isomorphism (as groups) を 得る。

$$\tilde{h}_G^d(X) \cong [X, \Omega^d E_n]^G \quad X \in \mathcal{W}_0^G(\mathcal{F}_0^G).$$

ここに, V : finite dimensional G -module, $d+V = n\omega$.

References

- [1] J.F. Adams, A variant of E.H. Brown's representability theorem, *Topology* 10 (1971) 185-198
- [2] G.E. Bredon, *Equivariant cohomology theories*, Lect. Note in Math. 34, Springer-Verlag
- [3] E.H. Brown, *Cohomology theories*, *Ann. of Math.* 75 (1962) 467-484. Correct. *Ann of Math* 78, p201
- [4] E.H. Brown, *Abstract homotopy theory*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 119 (1965) 79-85.
- [5] T. Matumoto, *On G -CW complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead*, *J. Fac. Soc., Univ. of Tokyo Sect I* 18 (1973) 363-374.
- [6] T. Matumoto, *Equivariant cohomology theories on G -CW complexes*, *Osaka J. Math.* 10 (1973) 51-68
- [7] J. Milnor, *The geometric realization of a semi-simplicial complex*, *Ann. of Math.* 65 (1957) 357-362
- [8] J. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, *Trans. Amer.*

Math. Soc. 90 (1959) 272-280

[9] G. B. Segal Equivariant stable homotopy theories, Actes Congrès intern. math. 1970 tom 2 59-63