

シンボリック・ダイナミクス

阪大・基礎工 金江哲朗

確率測度空間 (X, ν) (i.e. ν は X 上の測度, $\nu(X)=1$) とその上の保測変換 γ の組 $(X, \gamma, \nu) \in \text{metrical system}$ と呼ぶ。但し, ν が定義される X の σ -部分集合体はとくに表示されないが, わかっているものとする。metrical system (X, γ, ν) と (X', γ', ν') が同型であるというのは, 測度空間 (X, ν) から (X', ν') への同型写像 ϕ で, ほとんどすべての α (w.r.t. ν) に対して $\phi \circ \gamma(\alpha) = \gamma' \circ \phi(\alpha)$ を満たすものが存在することである。metrical system (X, γ, ν) がエルゴータ的であるというのは, γ が測度空間 (X, ν) 上のエルゴータ変換であることである。よく知られているように, (X, γ, ν) がエルゴータ的であるための必要十分条件は, X 上の γ -不変な確率測度 μ , λ と実数 $0 < p < 1$ に対して, もし $\nu = p\mu + (1-p)\lambda$ ならば $\nu = \mu = \lambda$ となることである。

$\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots$ を勝手な J -ノルム空間とする。
 直積位相が定義された直積空間 $\prod_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ を考える。 $W = W(\Sigma)$
 $= \prod_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ と記す。 W の元 α の第 i 成分 ($i=1, 2, \dots$) を
 $\pi_i(\alpha)$ と記す。 W 上の shift を $T = T_{\Sigma}$ と記す。 すなわ
 ち, $\alpha \in W$ に対して, $T\alpha \in W$ は $\pi_i(T\alpha) = \pi_{i+1}(\alpha)$ であ
 りて定義される。 T は W 上の連続変換である。 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ とする。
 W 上で定義された実数値連続関数の全体
 に, $\|f\| = \max_{\alpha \in W} |f(\alpha)|$ によってノルムを入れた位相ベクト
 ル空間を $C(W)$ と記す。 $C(W)$ は可算な base を持つ。
 σ^* を $C(W)$ の可算な base とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(T^{ki}\alpha)$
 がどんな $f \in \sigma^*$ に対しても存在するようには $\alpha \in W$ と $k \in N$ に
 対しては, どんな $f \in C(W)$ に対しても

$$\int_W f d\mu_{\alpha}^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(T^{ki}\alpha)$$

となるような W 上の確率 Borel 測度 μ_{α}^k が唯一に存在す
 る ([1])。 しかも μ_{α}^k は T^k -不変である ([1])。
 $\mu_{\alpha} = \mu_{\alpha}^1$ と記す。 上の関係から容易にわかるように, もし
 μ_{α}^k が存在するならば, どんな $i \in N$ に対しても $\mu_{T^i\alpha}^k$ が存在
 し且 $\mu_{T^i\alpha}^k = \mu_{\alpha}^k \cdot T^{-i}$ となる。 また, もし μ_{α}^k が存在す
 るならば, μ_{α} も存在し,

$$\mu_\alpha = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_{T^i \alpha}^k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_\alpha^k \cdot T^{-i}$$

と定める。 $W(\Sigma)$ の元 α と $k \in \mathbb{N}$ に対して, $W(\Sigma^k)$ の元 $\phi_k(\alpha)$ を

$$\pi_i(\phi_k(\alpha)) = (\pi_{k(i-1)+1}(\alpha), \pi_{k(i-1)+2}(\alpha), \dots, \pi_{ki}(\alpha)) \in \Sigma^k$$

をもって定義する。 ϕ_k は $W(\Sigma)$ から $W(\Sigma^k)$ の上への同相写像で $\phi_k \circ T_\Sigma^k = T_{\Sigma^k} \circ \phi_k$ を満たす。 それ故, μ_α^k が存在するとは $\mu_{\phi_k(\alpha)}^k$ が存在することと同値で且つそのような場合 $\mu_{\phi_k(\alpha)}^k = \mu_\alpha^k \circ \phi_k^{-1}$ となる。 すなわち, metrical system $(W(\Sigma), T_\Sigma^k, \mu_\alpha^k)$ は metrical system $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)}^k)$ と同型となる。

さて, どんな T -不変な確率 Borel 測度 μ に対しても, W の元 α が存在して, $\mu = \mu_\alpha$ となることが知られている ([2])。 それでは, metrical system (W, T, μ_α) の諸性質が α の中にどのようにに反映されるだろうか? これに關する一つの結果を報告する ([3])。

定義 μ_α が存在するような W の元 α が regionally uniform であるというのは, どんな $\delta \in (0, 1)$ と実数 $\varepsilon > 0$ に対しても

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta\left(\left\{i \in N; \left| \frac{1}{n} \sum_{i=j+1}^{j+n} f(T^i \alpha) - \int_W f d\mu_\alpha \right| > \varepsilon \right\}\right) = 0$$

が成立することをいう。但し, N の部分集合 S として,
 $\delta(S) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_S(i)$, $\chi_S(i)$ は $i \in S$ のとき 1,
 $i \notin S$ のとき 0。

補題 ([1] の (4.2)) metrical system (W, T, μ_α) が
 エルゴディクであるための必要十分条件は, α が regionally
 uniform であることである。但し, $\alpha \in W$ 。

定理 $\alpha \in W, k \in \mathbb{N}$ とする。metrical system (W, T^k, μ_α)
 がエルゴディクであるための必要十分条件は, 以下が満たさ
 れることである。

(1) $\phi_k(\alpha)$ は regionally uniform。

(2) $\mu_\alpha^k = \mu_\alpha$

(証明) まず, μ_α^k が存在し且 $\mu_\alpha^k \neq \mu_\alpha$ と仮定しよう。

このとき,

$$\mu_\alpha = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_\alpha^k \circ T^{-i}$$

で且 μ_α^k は T^k -T 変換から, (W, T^k, μ_α) はエルゴディク

クでよい。次に、 μ_α^k が存在しないことを仮定しよう。このとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(T^{ki}\alpha) \right| \leq \|f\|$ だから、増大列 $j_n \uparrow \infty$ が存在し、 $\frac{1}{j_n} \sum_{i=1}^{j_n} f(T^{ki}\alpha)$ が $\int_W f d\mu_\alpha$ と異なる値に収束するように出来る。 σ^* は可算集合だから、 j_n の部分列 $j'_n \uparrow \infty$ で次のようなものを選ぶことが出来る。すなわち、任意の $g \in \sigma^*$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{j'_n} \sum_{i=1}^{j'_n} g(T^{ki}\alpha)$ が存在する。さて、このとき、 W 上の確率 Borel 測度 λ が存在して、

$$\int_W g d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{j'_n} \sum_{i=1}^{j'_n} g(T^{ki}\alpha)$$

が任意の $g \in C(W)$ に対して成立する ([1])。このような λ は T^k -不変な測度で且つ $\mu_\alpha = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \lambda \circ T^{-i}$ が成り立つことが容易にわかる。 $\int f d\lambda \neq \int f d\mu_\alpha$ だから $\lambda \neq \mu_\alpha$ 。故に、この場合にも (W, T^k, μ_α) はエルゴード的でない。以上より、もし (W, T^k, μ_α) がエルゴード的ならば、(2) が満たされることを示さねば。このような場合 (1) も満たされることを示そう。 μ_α^k が存在するのだから、 $\mu_{\phi_k(\alpha)}^k$ も存在し且つ $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)}^k)$ は (W, T^k, μ_α^k) と同型になる。 $\mu_\alpha^k = \mu_\alpha$ だから、 $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)}^k)$ はエルゴード的となり、補題より (1) が成立する。逆に、(1) (2) が満たされたい。このとき、 (W, T^k, μ_α)

は $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)})$ と同型となり, 補題より, エルゴ
ーティックとなる。

系 $(W(\Sigma), T_{\Sigma}, \mu_{\alpha})$ が弱混合的ならば, $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)})$
も弱混合的となる。但し, $\alpha \in W(\Sigma)$, $k \in \mathbb{N}$ 。

(証明) $(W(\Sigma), T_{\Sigma}, \mu_{\alpha})$ が弱混合的ならば,
 $(W(\Sigma), T_{\Sigma}^k, \mu_{\alpha})$ はエルゴーティックであって, 定理より,
 $\mu_{\alpha}^k = \mu_{\alpha}$ となる。更に, $(W(\Sigma), T_{\Sigma}^k, \mu_{\alpha})$, 従って
 $(W(\Sigma), T_{\Sigma}^k, \mu_{\alpha}^k)$, 従って $(W(\Sigma^k), T_{\Sigma^k}, \mu_{\phi_k(\alpha)})$
は弱混合的となる。

[文 献]

[1] J.C. Oxtoby, Ergodic sets, Bull. Amer. Math. Soc.
58 (1952), 116-136.

[2] Tetsuro Kamae, Representation of shift invariant
measures by sequences, Proc. Japan Acad. (to appear)

[3] Tetsuro Kamae, On the ergodicity of T^k , where
 T is the shift on a sequence space, Proc. Japan Acad.
(to appear)