

Some applications of non-standard methods

P. Roquette (Heidelberg)

現在まで non-standard method は known theorem の re-proof に威力を発揮してきたが、これは non-standard method の威力の test であると考えられる。数論関係の known theorem の re-proof の例として以下の3例が特に重要である：

- ① Siegel - Mahler theorem,
- ② Hilbert irreducibility theory,
- ③ Mordell - Weil theorem,

①の reproof は Roquette と A. Robinson による、と与えられた (J. of Number Theory, 1975)¹⁾。

②は Gilmore - Robinson による (1956) また Springer Lecture notes, Robinson Memorial volume (1976)²⁾ 参照。

③の re-proof は Kani の学位論文 (未公表) である。

まず①の non-standard equivalent の描出を試みよう。

$f(x, y)$ を $\mathbb{Z}$ 上の既約多項式とし, 不定方程式

$$f(x, y) = 0 \quad \dots (*)$$

の integer solutions, i.e., $x, y \in \mathbb{Z} \wedge f(x, y) = 0$, を探す。

もしも genus g が positive であれば有限個の整数解しか存在しない。これが Siegel の定理である。

Mahler は $g = 1$ の場合に次のように拡張した (1934)。

$S = \{p_1, \dots, p_r\}$ を prime number の finite set とする。

また $\mathbb{Z}^{(S)} = \{m/n \mid p \mid n \Rightarrow p \in S\}$ とする。これは "めまいたす S -integer x, y (i.e. $x \in \mathbb{Z}^{(S)}, y \in \mathbb{Z}^{(S)}$) は有限個しか存在しない。

Siegel の定理は整数格子点は genus positive の curve の上に有限個しか存在しないことを主張するが, Mahler の定理は格子の目をもっと細かくしても同じことが成立することを主張する。Mahler の定理は $g > 1$ の場合にも成立する (S. Lang, Le Vegue)。最も一般的な Siegel-Mahler の定理の表現は次のようである。

K を finite algebraic number field, $\mathcal{O}$ を ring of all integers in K , S を finite set of prime divisors in K とする。
 $f(x, y)$ を $\mathcal{O}$ 上の irreducible polynomial とする。

$$\mathcal{O}^{(S)} \stackrel{\text{put}}{=} \{ \alpha/\beta \mid \alpha, \beta \in \mathcal{O}, \text{かつ } \wp \mid (\beta) \Rightarrow \wp \in S \}$$

すると $f(x, y) = 0$ の solutions x, y 中 $x, y \in \mathcal{O}^{(S)}$ なる

ものは $g > 0$ ならば有限個である。

S は empty $\Rightarrow K = \mathbb{Q}$ の場合が先にあって Siegel の定理である。

*K は K の enlargement とする。すると $K \subset {}^*K$ で、 K は alg. closed in *K である。更に精しくいうと、 *K は K の regular extension である。

もしも $(x, y) \in \mathcal{O}^{(S)} \times \mathcal{O}^{(S)}$ with $f(x, y) = 0$ が無数にあるとすれば、enlargement の性質から

$\exists (x, y) \in {}^*\mathcal{O}^{(S)} \times {}^*\mathcal{O}^{(S)}$ (non-standard); $f(x, y) = 0$ がいゝ。 $\Rightarrow$ $\exists x, y$ に対して $F = K(x, y)$ とおけば、 F/K は function field of the curve $f=0$ となる。 S は finite set であるから x, y の分母はやはり S の素数のみからなり、 $\mathbb{P}^1$ only standard primes in its denominator である。 Siegel-Mahler の non-standard equivalent は

Theorem $K \subset F \subset {}^*K$, F/K : ft field of genus $g > 0$ とするとき、どの $x \in F - K$ も少なくも 1 つの non-standard prime を分母にもつ。

と表わすことができる。

② については京大の連続講義で述べたから、③については述べることにしよう。(実際には Mordell-Weil の定理の non-standard equivalent を述べる所までには行かなかった。)³⁾

F/K is finite alg. number field K 上の ft. field とする。
 $D(F/K)$ is divisor group と, $C(F/K)$ is divisor class group と,
 $Co(F/K)$ is divisor class group of deg. 0 を表わすことにする。
 $Co(F/K)$ はまた $J(F/K)$ でも表わされる。
 Mordell-Weil の定理は

$J(F/K)$ is finitely generated.

と表現される。これを non-standard に表現するのはどうすればよいのか? そのための順序としていくつかの準備を行うことはする。

Chapter 1 Finitely generated abelian groups

A is abelian group とする。enlargement *A は ${}^*\mathbb{Z}$ -module とある。

Prop. 1 A : finitely generated

$\Leftrightarrow {}^*A = {}^*\mathbb{Z} \downarrow$ (i.e. ${}^*\mathbb{Z}$ -module generated by A)

(proof) $\Rightarrow$)

$A = \sum_{i=1}^r \mathbb{Z} a_i$ とする。non-standard model の general

principle によって ${}^*A = \sum_{i=1}^r {}^*\mathbb{Z} a_i$

$\Leftarrow$) *A は $<$ に starfinitely generated とある。general principle によって A は finitely generated とある。

Prop. 2 $\exists n > 1$ とする。 A/nA is finite.

$\Leftrightarrow {}^*A/A$ is divisible by n .

proof) $\Rightarrow a_1, \dots, a_r \in A$ $\mathbb{Z}$ representatives mod n $A \cong \mathbb{Z}$

$$\exists : A = \bigcup_{i=1}^r (a_i + nA)$$

$$\therefore {}^*A = \bigcup_{i=1}^n (a_i + {}^*A) = A + {}^*A$$

$\Leftarrow$) Assume A/nA infinite. non-st. is general principle 1: $\exists \lambda \exists x + n^*A$; non-standard in *A

$$\therefore *A \not\subseteq A + n *A \quad \text{Q.E.D.}$$

$\mathbb{R}_{fin} = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} (|x| < y)\}$ $\times \mathbb{C}$, ${}^*\mathbb{R}/\mathbb{R}_{fin}$ は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ $\times$ 。 $\mathbb{R}$ は ordered additive group である。

Prop. 3 A/nA finit for some $n > 1$ & $\nexists 3$.

A : finitely g.t.d. (=generated)

$$\Leftrightarrow \exists \text{ internal map } \varphi: {}^*A \rightarrow {}^*\mathbb{R} \text{ satisfying}$$

① $\dot{\varphi}: {}^*A \rightarrow \mathbb{R}$ is a positive definite form,

② $\ker \varphi = A$

$$\Rightarrow \text{if } \varphi \text{ is } \varphi_k, \text{ induce } \pm \varphi \text{ is canonical map } \tau \text{ of } \mathcal{A}$$

proof) $\Leftarrow$) $V = \{a_1, \dots, a_r\}$ $\subseteq$ representatives of $A/nA \subseteq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $X \in A = \mathbb{Z}$:

$$X = X_0 + v_i n, \quad X_0 \in V, \quad v_i \in A$$

とかける。 induction に よる 2

$$X = X_0 + X_1 n + \dots + X_{k-1} n^{k-1} + r_k n^k,$$

$$x_i \in V, \quad r_k \in A$$

9 桁にはあるが $\pm$ あり。故に $\forall R \in {}^*N, \forall X \in {}^*A$ に対して

$X = X_0 + X_1 n + \cdots + X_{k-1} n^{k-1} + r_k n^k$, $X_j \in V$, $r_k \in A$
とあらわされろ。

$$\dot{\varphi}(r_k) = 0, \text{ if } k \text{ large}$$

を証明しよう。もし、これが示されたら、②から $r_k \in A$. 4
こで上の X の式を

$$X = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + r_k n^k, \lambda_i \in {}^*\mathbb{Z}$$

の形に書き直せば

$$X \in \sum_{j=1}^r {}^*\mathbb{Z} a_j + {}^*\mathbb{Z} A \subset {}^*\mathbb{Z} A \quad \therefore {}^*A = {}^*\mathbb{Z} A \text{ となり,}$$

Prop.1 によつて A の fin. gtd 加わがる。

notation: $\dot{\varphi}(X) = 0$ と $\varphi(X) \doteq 0$ と書く。即ち $\equiv 0$
(mod R_{fin}) の意である。

$$\text{Put } f(x, y) = \frac{1}{2} (\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)).$$

$f(x, y)$ は symmetric, bilinear mod R_{fin} , positive mod
 R_{fin} である, 即ち f は bilinear で $f(x, x) \doteq \varphi(x)$, $\varphi(x) \geq 0$
がなりたつ。これは $\dot{\varphi}$ のみたす Φ という性質の定義から解る。

次の (1), (2) がなりたつ:

$$(1) \quad \varphi(x_1 + \cdots + x_r) \doteq 2^{r-1} (\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_r)) \quad (r \in \mathbb{N})$$

$$(2) \quad \frac{\varphi(nx)}{n^2} \doteq \varphi(x) \quad \text{for } \forall n \in {}^*\mathbb{N}$$

(1) は簡単。実際, $\varphi(x+y) + \varphi(x-y) \doteq 2\varphi(x) + 2\varphi(y)$ より
 $\varphi(x+y) \doteq 2\varphi(x) + 2\varphi(y)$. Induction によつて (1) を示す。

(2) の証明

$$f(2x, y) - 2f(x, y) = 0 \quad \text{より} \quad \exists c \in \mathbb{R};$$

$$|f(2x, y) - 2f(x, y)| \leq c$$

$$\therefore |f(nx, y) - nf(x, y)| \leq (n-1)c \quad \text{by induction}$$

よって $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|f(nx, ny) - n^2 f(x, y)| \leq (n^2 - 1)c$$

$$\therefore \left| \frac{f(nx, ny)}{n^2} - f(x, y) \right| \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)c < c$$

よって $\frac{f(nx, ny)}{n^2} = f(x, y)$ を意味する。

よって、目標の $\varphi(r_k) = 0$ if k large を示す。 $x = y$ とし

$$0 \leq \varphi(r_k) = \frac{\varphi(n^k r_k)}{n^{2k}} \leq \frac{2\varphi(x)}{n^{2k}} + \frac{2\varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r)}{n^{2k}}$$

右辺の1項は < 1 if k large である。

$$\begin{aligned} \text{2項} &\leq 2^{r-1} \sum_j \frac{\varphi(\lambda_j a_j)}{n^{2k}} \quad \text{by (1)} \\ &\leq 2^{r-1} \sum_{j=1}^r \left(\frac{\lambda_j}{n^k}\right)^2 \frac{\varphi(\lambda_j a_j)}{\lambda_j^2} \end{aligned}$$

λ_j の定義から $0 \leq \left(\frac{\lambda_j}{n^k}\right)^2 < 1$, よって (2) によらず結局

$$0 \leq \varphi(r_k) \leq 1 + 2^{r-1} \sum_j \varphi(a_j).$$

よって $\varphi(A) = 0$ によらず $\varphi(r_k) = 0$.

Prop. 4 仮定は Prop. 3 と同じとする。

$\exists \psi: A \rightarrow \mathbb{R}$ (unique positive definite quadr. form)

s.t. $\psi - \varphi$ bdd on A

証明 $\frac{f(\omega x, \omega y)}{\omega^2} = g(x, y)$ とおく。但し $\omega \in {}^*N - N$

$\psi(x) = {}^0g(x, x)$ と定義する。こゝに 0g は g の standard part であらう。 ψ が positive definite q.d. form であることは直ちに示される。 $g(x, x) - \varphi(x)$ ($x \in {}^*A$) は internal で $g(x, x) \doteq f(x, x) \doteq \varphi(x)$ だから finite value である。これは $g(x, x) - \varphi(x)$ が A 上 bdd であることを意味する。実際、 $\theta(x) = g(x, x) - \varphi(x)$ が bdd on A であることは、 $\forall c \in \mathbb{R} \exists a \in A; c < \theta(a)$. enlargement の general principle による。

$$\forall c \in {}^*\mathbb{R} \exists a \in {}^*A; c < \theta(a)$$

これは $\theta({}^*A) \subset \mathbb{R}_{fin}$ に及ぶ。 uniqueness は $\psi' - \psi$ が bdd. q.d.r. form $\neq 0$ であるはず、(bdd でない) によることを示す。

もし φ が standard であるならば $\psi = \dot{\varphi}$ である。

Properties of ψ :

- (i) ψ は positive definite quadr. form on A である,
- (ii) ψ は discrete on A , 即ち, $\forall c(>0) \in \mathbb{R} \exists$ only finitely many $x \in A; \psi(x) \leq c$ となる。

Chapter II Non-standard Formulation

K is alg. number field of finite degree とする。

F is K 上の ft. field とする。

$C_0(F/K) = J(F/K) \in A$ とおく。

Theorem $*A = *C_0(F/K)$ は canonically isomorphic with $C_0(F^*K/K) = J(F^*K/K)$ である。

この定理は Riemann-Roch Theorem の non-standard equivalent である。

Theorem For any $x, y \in D(FL/L)$ (relatively prime) $\exists x \cdot y \in D(L/K)$ s.t.

- (1) bilinear,
 - (2) symmetric,
 - (3) $x \cdot y = 0$ if x, y algebraic over K
 - (4) if $\deg x = 0$, then $y \sim z$ implies $x \cdot y \sim x \cdot z$
- (L は K の任意の拡大とする。)

仮定: degree ft $\delta: D(L/K) \rightarrow \Gamma$ (ordered group)
 が $x \leq y \Rightarrow \delta(x) \leq \delta(y)$, $x \sim 0 \Rightarrow \delta(x)$ をみたすとする。

Theorem (Castelnuovo-Severi) $\delta(x, x) \leq 0$ for $x \in C_0(FL/L)$

$*J(F/K) = *A$ 上 $\sim$ positive definite quadratic form φ

が存在する。(Prop. 3)

$J(F/K) = A$ 上で standard quadratic form ψ (positive definite, discrete) が存在する。(Prop 4)

(足立恒雄記)

注 1) あとがきの文献 [6]

2) " [7]

3) この論文のついでには、数学会年会総合講演でなされた。
("教子" 参照).