

多重ゼータ値の和公式と超幾何微分方程式

近畿大学理工学部	青木 貴史	(Takashi Aoki)
近畿大学総合理工学研究科	昆布 康博	(Yasuhiro Kombu)
近畿大学理工学部	大野 泰生	(Yasuo Ohno)

1 多重ゼータ値の和公式

よく知られたリーマンゼータ関数 $\zeta(z)$ の自然数 $k > 1$ における値 $\zeta(k)$ はリーマンゼータ値と呼ばれる：

$$\zeta(k) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots$$

指数 k を多重指数 $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ に拡張したものを考える. 多重指数 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ は $k_1 \geq 2$ であるとき許容的である (admissible) という. 許容的な多重指数 $\mathbf{k}$ に対し収束級数の値として多重ゼータ値が定義される:

$$\zeta(\mathbf{k}) := \sum_{\substack{m_1 > \dots > m_n \\ m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}.$$

また, 上の定義の方法と異なる, 等号付き多重ゼータ値も定義することが出来る:

$$\zeta^*(\mathbf{k}) := \sum_{\substack{m_1 \geq \dots \geq m_n \\ m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}.$$

この 2 種類の多重ゼータ値間には有理数係数の線型関係式がある. 例えば,

$$\zeta(3, 2) = \frac{1}{2^3 1^2} + \frac{1}{3^3 1^2} + \frac{1}{3^3 2^2} + \cdots$$

であるが,

$$\begin{aligned} \zeta^*(3, 2) &= \frac{1}{1^3 1^2} + \frac{1}{2^3 1^2} + \frac{1}{2^3 2^2} + \frac{1}{3^3 1^2} + \frac{1}{3^3 2^2} + \frac{1}{3^3 3^2} + \cdots \\ &= \zeta(3, 2) + \zeta(5) \end{aligned}$$

となることが容易に分かる.

多重指数 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ について, $k := k_1 + \dots + k_n$ を $\mathbf{k}$ の重さ (weight), n を深さ (depth), $k_i \geq 2$ なる k_i の個数 s を高さ (height) と

呼ぶ. 重さ k , 深さ n , 高さ s の許容的多重指数全体の集合を $I_0(k, n, s)$ で表す. また, $I_0(k, n) := \bigcup_s I_0(k, n, s)$ とおく.

すると, 多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$, $\zeta^*(\mathbf{k})$ それぞれに関する和公式 (Sum formula) が以下で与えられる.

定理 (和公式) (i) $k > n > 0$ なる整数において, 多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ とゼータ値 $\zeta(k)$ との間に

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, n)} \zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k) \quad (1)$$

なる関係式が成立する.

(ii) $k > n > 0$ なる整数において, 等号付き多重ゼータ値 $\zeta^*(\mathbf{k})$ とゼータ値 $\zeta(k)$ との間に

$$\sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, n)} \zeta^*(\mathbf{k}) = \binom{k-1}{n-1} \zeta(k) \quad (2)$$

なる関係式が成立する.

この公式は本質的には A. Granville[1] と D. Zagier[8] が最初に証明し, 多重ゼータ値全体の張る $\mathbb{Q}$ -代数の構造を研究する上で要となっている定理である. 現在までに数通りの別証明が知られている ([4],[6],[7], etc.).

本稿の目的は微分方程式を用いた別証明を与える事である.

2 母関数と微分方程式

まず, パラメーター t と多重指数 $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して形式的冪級数

$$K_{\mathbf{k}}(t) := \sum_{\substack{m_1 > \dots > m_n \\ m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}}} \frac{t^{m_1}}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}$$

を考える. 多重指数 $\mathbf{k}$ が許容的であるとき t の冪の各係数は収束し, また右辺は任意の多重指数 $\mathbf{k}$ と $|t| < 1$ なる t に対して収束する. さらに, 多重指数 $\mathbf{k}$ が許容的であるとき

$$\lim_{t \rightarrow 1} K_{\mathbf{k}}(t) = \zeta(\mathbf{k})$$

が成り立つ。次に、自然数 k, n, s に対して

$$G_0(k, n, s; t) := \sum_{k \in I_0(k, n, s)} K_k(t)$$

とおき、この $G_0(k, n, s; t)$ の母関数を

$$\Phi_0(x, y, z; t) := \sum_{k, n, s} G_0(k, n, s; t) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2}$$

により定める。

また、同様にして、

$$K_k^*(t) := \sum_{\substack{m_1 \geq \dots \geq m_n \\ m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}}} \frac{t^{m_1}}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}},$$

$$G_0^*(k, n, s; t) := \sum_{k \in I_0(k, n, s)} K_k^*(t),$$

$$\Phi_0^*(x, y, z; t) := \sum_{k, n, s} G_0^*(k, n, s; t) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2}$$

と定める。

命題 (i) 母関数 Φ_0 は微分方程式

$$t(1-t)\Phi_0'' + \{(1-t)(1-x) - yt\}\Phi_0' + (xy - z^2)\Phi_0 = 1 \quad (3)$$

を満たす。逆にこの微分方程式の $t=0$ における正則解で $\Phi_0(x, y, z; 0) = 0$ となるものは Φ_0 に限る。

(ii) 母関数 Φ_0^* は微分方程式

$$t^2(1-t)\Phi_0^{*''} + t\{(1-t)(1-x) - y\}\Phi_0^{*'} + (xy - z^2)\Phi_0^* = t \quad (4)$$

を満たす。逆にこの微分方程式の $t=0$ における正則解は Φ_0^* に限る。

微分方程式 (3) は [6] で与えられた。同様に微分方程式 (4) も導くことができる。

3 和公式の微分方程式を用いた証明—概略—

1° 和公式 (i)

$\Phi_0(x, y, z; t)$ にて $z^2 = xy$ とおいたものを $\tilde{\Phi}_0(x, y; t)$ で表す: この $\tilde{\Phi}_0(x, y; t)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数を $g(t)_{k-n-1, n-1}$ とおくと,

$$\begin{aligned} g(t)_{k-n-1, n-1} &= \sum_s G_0(k, n, s; t) \\ &= \sum_s \sum_{h \in I_0(k, n, s)} K_h(t) \\ &= \sum_{h \in I_0(k, n)} K_h(t) \rightarrow \sum_{h \in I_0(k, n)} \zeta(h) \quad (t \rightarrow 1) \end{aligned}$$

となり, これは和公式 (i) の左辺である.

ところで微分方程式 (3) にて $z^2 = xy$ とおいたもの, つまり $\tilde{\Phi}_0$ の満たす微分方程式の解で, $t = 0$ において正則な解 $\tilde{\Phi}_0$ を, 微分方程式を解くことによって求める. 微分方程式の階数を下げるため $u = \tilde{\Phi}'_0$ とおくと u に対する微分方程式

$$t(1-t)u' + \{(1-t)(1-x) - yt\}u = 1$$

が得られる. この微分方程式の一般解は

$$u = ct^{-(1-x)}(1-t)^{-y} + \frac{(1-t)^{-y}}{1-x} F(1-x, 1-y; 2-x; t)$$

で与えられるが, $t = 0$ で正則な解は $c = 0$ として得られる. 従って

$$\tilde{\Phi}_0(x, y; t) = \frac{1}{1-x} \int_0^t (1-s)^{-y} F(1-x, 1-y; 2-x; s) ds$$

と表される.

その解 $\tilde{\Phi}_0$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数 $g(t)_{k-n-1, n-1}$ を計算し t を 1 に近づけた値を求めたい. その値は, Abel の定理より解 $\tilde{\Phi}_0(x, y; t)$ にて先に t を 1 に近づけたもの $\tilde{\Phi}_0(x, y; 1)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数と一致することより求められる.

$$\tilde{\Phi}_0(x, y; 1) = \frac{1}{1-x} \int_0^1 (1-s)^{-y} F(1-x, 1-y; 2-x; s) ds.$$

ここで $F(1-x, 1-y; 2-x; s)$ は超幾何級数であるが, これを先に項別積分して

$$\tilde{\Phi}_0(x, y; 1) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(h+1-x)(h+1-y)}$$

と求まり, この $\tilde{\Phi}_0(x, y; 1)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数を計算すると $\zeta(k)$ になる. これは和公式 (i) の右辺である. これにより和公式 (i) が示された.

2° 和公式 (ii)

$\Phi_0^*(x, y, z; t)$ にて $z^2 = xy$ とおいたものを $\tilde{\Phi}_0^*(x, y; t)$ で表す. この $\tilde{\Phi}_0^*$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数 $g^*(t)_{k-n-1, n-1}$ を計算し t を 1 に近付けた値は和公式 (ii) の左辺 $\sum_{k \in I_0(k, n)} \zeta^*(k)$ である.

微分方程式 (4) にて $z^2 = xy$ とおいたもの, つまり $\tilde{\Phi}_0^*$ の満たす微分方程式の解で, $t = 0$ において正則な解 $\tilde{\Phi}_0^*$ を, 微分方程式を解くことによって求める. 微分方程式の階数を下げるため $u^* = \tilde{\Phi}_0^{*'}$ とおくと u^* に対する微分方程式

$$t(1-t)u^{*'} + \{(1-t)(1-x) - y\}u^* = 1$$

が得られる. この微分方程式のと一般解は

$$u^* = ct^{-(1-x-y)}(1-t)^{-y} + \frac{(1-t)^{-y}}{1-x-y} F(1-x-y, 1-y; 2-x-y; t)$$

で与えられるが, $t = 0$ で正則な解は $c = 0$ として得られる. 従って

$$\tilde{\Phi}_0^*(x, y; t) = \frac{1}{1-x-y} \int_0^t (1-s)^{-y} F(1-x-y, 1-y; 2-x-y; s) ds$$

と表される.

その解 $\tilde{\Phi}_0^*$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数 $g^*(t)_{k-n-1, n-1}$ を計算し t を 1 に近付けた値を求めたい. その値は, Abel の定理より解 $\tilde{\Phi}_0^*(x, y; t)$ にて先に t を 1 に近付けたもの $\tilde{\Phi}_0^*(x, y; 1)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数と一致することより求められる.

$$\tilde{\Phi}_0^*(x, y; 1) = \frac{1}{1-x-y} \int_0^1 (1-s)^{-y} F(1-x-y, 1-y; 2-x-y; s) ds.$$

ここで $F(1-x-y, 1-y; 2-x-y; s)$ は超幾何級数であるが, これを先に項別積分して

$$\tilde{\Phi}_0^*(x, y; 1) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(h+1-x-y)(h+1-y)}$$

と求まり, この $\tilde{\Phi}_0^*(x, y; 1)$ の $x^{k-n-1}y^{n-1}$ の係数を計算すると $\binom{k-1}{n-1} \zeta(k)$ になる. これは和公式 (ii) の右辺である. これにより和公式 (ii) が示された.

参考文献

- [1] Andrew Graville, *A Decomposition of Riemann's Zeta-Function*, in Analytic Number Theory, London Mathematical Society Lecture Note Series, **247**, Y. Motohashi(ed.), Cambridge, 1997, pp. 95-101.
- [2] Takashi Aoki and Yasuo Ohno, *Sum Relations for Multiple Zeta Values and Connection Formulas for the Gauss Hypergeometric Functions*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **41**, 329-337 (2005).
- [3] Michel E. Hoffman, *Multiple Harmonic Series*, Pacific Journal of Mathematics, **152**, 275-290 (1992).
- [4] Michel E. Hoffman and Yasuo Ohno, *Relation of Multiple Zeta Values and Their Algebraic Expression*, J. Algebra, **262**, 332-347 (2003).
- [5] Yasuo Ohno, *A Generalization of the Duality and Sum Formulas on the Multiple Zeta Values*, J. Number Theory, **74**, 39-43 (1999).
- [6] Yasuo Ohno and Don Zagier, *Multiple Zeta Values of Fixed Weight, Depth, and Height*, Indag. Mathem., N.S., **12**(4), 483-487 (2001).
- [7] Jun-ichi Okuda and Kimio Ueno, *Relation for Multiple Zeta Values and Mellin Transforms of Multiple Polylogarithms.*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **40**, 537-564 (2004).
- [8] Don Zagier, *Values of zeta Function and Their Applications*, in Proceedings of ECM 1992, Progress in Mathematics, **120**, Birkhäuser, 1994, pp. 497-512.