

# 完全最急降下法

## — 完全 WKB 解析による最急降下法の一般化 —

近畿大理工 青木 貴史 (Takashi AOKI)  
京大数理研 河合 隆裕 (Takahiro KAWAI)  
京大数理研 竹井 義次 (Yoshitsugu TAKEI)

### 1 序 — 積分表示と最急降下法

微分方程式の解であって公式集にも登場し、いわゆる「特殊函数」と呼ばれるほどに種々の性質（例えば大域的な挙動）が良く調べられているものは、ほぼ解の積分表示が存在する場合に限られると言っても過言ではないだろう。その代表的な例が Airy の微分方程式、あるいはそれをもう少し一般化した

$$(1) \quad \left( \frac{d^m}{dx^m} + (c_{m-1}x + d_{m-1})\eta \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + (c_0x + d_0)\eta^m \right) \psi = 0$$

という形（すなわち係数が全て 1 次函数、ここで  $c_j, d_j$  は複素定数）の Laplace 型と呼ばれる線型常微分方程式である。（なお  $\eta > 0$  は大きなパラメータを表す。以下では専ら解の漸近的な性質を論じるので、方程式としては (1) のように大きなパラメータ  $\eta$  を含んだものを扱う。）Laplace 型方程式 (1) については、（大きなパラメータを含んだ）Laplace 変換

$$(2) \quad \hat{\psi}(\xi) = \int e^{-\eta x \xi} \psi(x) dx, \quad \psi(x) = \int e^{\eta x \xi} \hat{\psi}(\xi) d\xi$$

により 1 階の微分方程式に変換されるので、その 1 階の方程式を実際に解くことで容易に解の積分表示が得られる。具体的には、

$$(3) \quad \psi(x) = \int e^{\eta x \xi} e^{\eta g(\xi)} \frac{1}{C(\xi)} d\xi,$$

但し

$$(4) \quad C(\xi) = c_{m-1}\xi^{m-1} + \cdots + c_0, \quad D(\xi) = \xi^m + d_{m-1}\xi^{m-1} + \cdots + d_0, \quad g(\xi) = \int^\xi \frac{D(\xi)}{C(\xi)} d\xi$$

が (1) の解の積分表示を与える。この積分表示 (3) を利用すれば、(1) の解のいろいろな性質を具体的に解析することが可能になる。例えば、 $\eta \rightarrow +\infty$  に関する漸近挙動を調べたければ、 $f(x, \xi) = x\xi + g(\xi)$  を相函数と考えてその（積分変数  $\xi$  に関する）鞍点（すなわち  $\partial^2 f / \partial \xi^2 \neq 0$  であるような  $\partial f / \partial \xi$  の零点）を求め、鞍点法 (saddle point method) を適用すれば良い。さらに、 $x$  を動かした時に、こうした鞍点を通る  $\Re f$  の最

急降下路（すなわち  $-\text{grad}_{\mathbb{C}} \Re f$  の解曲線）がどのように変化するかを追跡すれば，不確定特異点  $x = \infty$  における (1) の形式解の間に起こるいわゆる Stokes 現象といった「指数函数的に微小な項」が関係してくる現象も，具体的に解析できる（“最急降下法 steepest descent method”）。

しかし，解が積分表示式を持つような微分方程式は極めて限られている．本稿では，Voros [V] に始まる完全 WKB 解析を利用して，この種の解析をより一般の多項式係数を持つ線型常微分方程式に拡張することを試みる．そして同時に，高階線型常微分方程式の完全 WKB 解析におけるある重要な問題（これについては次節で説明する）に対する一つの解答（より厳密には，その候補）を与える．

## 2 線型常微分方程式に対する完全 WKB 解析

まず，線型常微分方程式に対する完全 WKB 解析の理論を簡単に復習しておこう．詳細については，2 階の方程式の場合は [KT], [CNP], [DP], [V] 等を，高階方程式の場合は [AKT1] を参照されたい．

以下で考えるのは，大きなパラメータ  $\eta$  を含んだ次の形の方程式である．

$$(5) \quad \left( \frac{d^m}{dx^m} + q_{m-1}(x)\eta \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + q_0(x)\eta^m \right) \psi = 0$$

（但し  $q_j(x)$  は多項式）．この方程式 (5) に対して，WKB 解と呼ばれる次のような解が存在する．

$$(6) \quad \begin{aligned} \psi &= \eta^{-1/2} \exp \int^x (\eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1} S_1(x) + \cdots) dx \\ &= \exp \left( \eta \int^x S_{-1}(x) dx \right) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \eta^{-(n+1/2)}, \end{aligned}$$

ここで  $S_{-1}(x)$  は

$$(7) \quad \xi^m + q_{m-1}(x)\xi^{m-1} + \cdots + q_0(x) = 0$$

という代数方程式（特性方程式）の根（以下，それらを  $\xi_j(x)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) で表す）であり，他の  $S_j(x)$  ( $j \geq 0$ ) はすべて帰納的に一意に定まる．幸か不幸か，WKB 解はほとんど大抵の場合発散する．完全 WKB 解析においては，一般には収束しない WKB 解に対して，（パラメータ  $\eta$  に関する）Borel 総和法を用いて解析的な意味づけを行う．すなわち，WKB 解  $\psi$  の代わりにその Borel 変換（形式的逆 Laplace 変換）

$$(8) \quad \psi_B(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(x)}{\Gamma(n+1/2)} (y + y_0(x))^{n-1/2} \quad (\text{但し } y_0(x) = \int^x S_{-1} dx)$$

を考え（これは収束して解析関数を定める），その Laplace 積分

$$(9) \quad \Psi = \int_{-y_0(x)}^{\infty} e^{-\eta y} \psi_B(x, y) dy$$

を（この積分が意味をもつ時に） $\psi$  の Borel 和と呼んで、元の WKB 解の代用物と見なすのである。（なお (9) の積分路は正の実軸に平行に取るものと約束する。）

WKB 解の Borel 和の性質を述べるために、少し言葉を準備しよう。

**Definition 1** (i) 特性方程式 (7) が重根を持つ点、すなわち (7) の判別式の零点を turning point（変わり点）と呼ぶ。

(ii)  $a$  を turning point,  $\xi_j(x)$  と  $\xi_{j'}(x)$  を  $x = a$  で重なる (7) の 2 根とする時、

$$(10) \quad \Im \int_a^x (\xi_j(x) - \xi_{j'}(x)) dx = 0,$$

で定義される  $x = a$  から出る曲線を type  $(j, j')$  の Stokes 曲線と呼ぶ。（より詳しくは、当該の Stokes 曲線上での  $\Re \int_a^x (\xi_j(x) - \xi_{j'}(x)) dx$  の正負に応じて “type  $j > j'$ ” または “type  $j < j'$ ” と呼ぶ。）

方程式 (5) の WKB 解  $\psi$  の Borel 和は、Borel 和を定義する積分 (9) の積分路に  $\psi_B(x, y)$  の特異点がぶつかるという状況が生じた時（これがどこで起こるかは方程式の独立変数である  $x$  に依存する）、well-defined でなくなる（いわゆる Stokes 現象が起きる）。特に方程式が 2 階の場合は、上で定義した Stokes 曲線上においてのみこうした状況が現われる。ところが、3 階以上の方程式に対しては、Stokes 曲線以外の曲線上でもしばしば Stokes 現象が起きる。Berk-Nevins-Roberts [BNR] により見いだされた次の例を見てみよう。

**Example 1** 次の 3 階方程式を考える。

$$(11) \quad \left( \frac{d^3}{dx^3} + 3\eta^2 \frac{d}{dx} + 2ix\eta^3 \right) \psi = 0.$$

この方程式は  $x = \pm 1$  に turning point を持ち、 $x = 1$  からは（適当にカットを入れて特性方程式の根に番号をつけたものとして）type  $(0, 1)$  の Stokes 曲線が、また  $x = -1$  からは type  $(1, 2)$  の Stokes 曲線がそれぞれ出て行く。Figure 1 からわかるようにこれらの Stokes 曲線は虚軸上の点で交わるが、実はその交点から引いた type  $(0, 2)$  の “new Stokes curve” (Figure 1 の太い線、特にその実線部分) の上でも Stokes 現象が起きていることが、Berk 達の議論を完全 WKB 解析の立場から解釈し直すことにより確かめられる。

2 階の方程式の場合は、Stokes 曲線の大域的な形状を調べ、そしてその形状に応じて（各 Stokes 曲線上で起きる Stokes 現象を具体的に記述する）接続公式を適宜組み合わせることで、量子化条件やモノドロミー群といった解の大域的な性質を論じることが可能だった。解の大域的な解析を、WKB 解の Borel 和が Stokes 現象を起こす集合及びそうした Stokes 現象を記述する接続公式の解析に還元するというのが、完全 WKB 解析の大きな特色である。従って、高階方程式の場合にどこで WKB 解の Borel 和の Stokes 現象が起きるのか、その完全な記述を与えることは完全 WKB 解析における非常に重要な問題である。

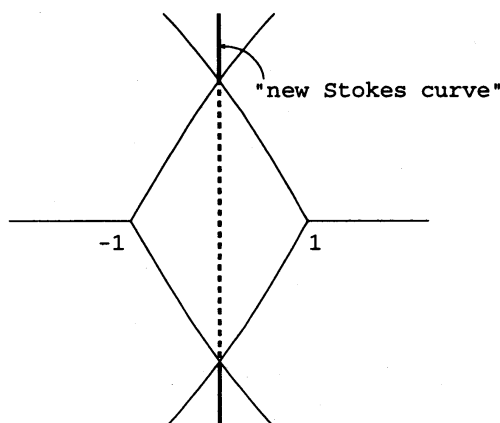


Figure 1

### 3 完全最急降下法

この完全 WKB 解析を利用して、一般の多項式係数の線型常微分方程式 (5) に対する積分表示（あるいは最急降下法）を求めることを試みる。（§1 で述べたように、それは同時に高階方程式の WKB 解がどこで Stokes 現象を起こすかを決定するという問題に対する一つの解答も与える。）

方程式を次の形に書いておく。

$$(12) \quad P\psi = \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} a_{jk} x^k \eta^{m-j} \left( \frac{d}{dx} \right)^j \psi = 0.$$

（すなわち、 $q_j(x)$  の次数のうちで最大のものを  $n$  とし、 $q_j(x) = \sum_k a_{jk} x^k$  とおいた。なお  $n = 1$  の時が Laplace 型である。）この特性方程式を

$$(13) \quad p(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_{jk} x^k \xi^j = 0$$

で表す。

この方程式 (12) の解の積分表示を求めたい。アイデアは単純である。Laplace 型方程式の場合のやり方を単純に一般化して、(12) に Laplace 変換 (2) を施す。

$$(14) \quad \hat{P}\hat{\psi} = \eta^{m-n} \left\{ \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} a_{jk} \xi^j \eta^{n-k} \left( -\frac{d}{d\xi} \right)^k + (\eta \text{ について低次の項}) \right\} \hat{\psi} = 0.$$

もちろん  $n \geq 2$  だとこの方程式は簡単には解けない。しかし、(14) の  $\eta$  に関する依存性が（WKB 解が構成できるような）標準的な形をしているので、(14) を直接解く代わ

りにその WKB 解を利用することを考える. (14) の特性方程式は (12) のそれと本質的に同じであり, その根は (13) を  $x$  に関して解いた  $x = x_k(\xi)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) を用いて  $-x_k(\xi)$  で与えられることに注意すれば, 次の積分 (Laplace 逆変換) が, (少なくとも形式的には) 方程式 (12) の解を与えることが期待される.

$$(15) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}(x) &= \int e^{\eta x \xi} \hat{\psi}_k(\xi) d\xi \\ &= \int e^{\eta x \xi} e^{-\eta \int^\xi x_k(\xi) d\xi} (\text{amplitude}) d\xi. \end{aligned}$$

( $\hat{\psi}_k$  は  $S_{-1} = -x_k(\xi)$  で始まる  $\hat{P}\hat{\psi} = 0$  の WKB 解.) WKB 解が無限級数である点に目をつぶれば, (15) は  $f_k(x, \xi) = x\xi - \int^\xi x_k(\xi) d\xi$  を相関数とするような大きなパラメータ  $\eta$  を含んだ積分である. 相関数が具体的な式で与えられたこの (15) を, 方程式 (12) の解の積分表示と見なそうというのが我々のアイデアである. 以下, このアイデアがどの程度うまく働くのかを検証していこう.

### 3.1 Laplace 型方程式の場合

まず Laplace 型方程式 (1) の場合に, こうして得られた積分表示式 (15) (より具体的には (3)) と完全 WKB 解析がどのように関係しているのかを見ておこう. (積分表示と Stokes 現象の関係については, これまでもいくつかの研究がある. 例えば [U1, U2] を参照.)

この場合, (3) の相関数  $f(x, \xi) = x\xi + g(\xi)$  は一価関数である. しかも, この相関数  $f(x, \xi)$  は  $m$  個の鞍点を持ち, それらが特性方程式の根  $\xi_j(x)$  に一致することが, (4) を用いれば容易に確かめられる. そこで, 鞍点  $\xi_j(x)$  を通る  $\Re f$  の最急降下路を  $C^{(j)}$  とし,  $C^{(j)}$  に沿う積分 (3) を考える. 実は, この  $C^{(j)}$  に沿う積分 (3) として与えられる方程式 (1) の解  $\tilde{\psi}^{(j)}$  と,  $S_{-1} = \xi_j(x)$  で始まる (1) の WKB 解の Borel 和とが密接に関係している. 実際, (いずれの解も積分の形で与えられていることを考慮して)  $y = -f(x, \xi)$  という変数変換を (3) に施すと,

$$(16) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}^{(j)} &= \int_{C^{(j)}} e^{\eta(x\xi + g(\xi))} \frac{1}{C(\xi)} d\xi \\ &= \int_{C^{(j)'}} e^{-\eta y} \left[ \left( C(\xi) \frac{dy}{d\xi} \right)^{-1} \Big|_{\xi=\xi_+(x,y)} - \left( C(\xi) \frac{dy}{d\xi} \right)^{-1} \Big|_{\xi=\xi_-(x,y)} \right] dy. \end{aligned}$$

(鞍点  $\xi_j(x)$  は  $f(x, \xi)$  の非退化な臨界点であるので, 変換  $y = -f(x, \xi)$  の逆変換は 2 つの分枝  $\xi = \xi_\pm(x, y)$  を持つことに注意.) 最急降下路上では  $\Im f(x, y)$  の値は一定であるので,  $C^{(j)}$  の変換  $y = -f(x, \xi)$  による像  $C^{(j)'}$  は, Borel 和を与える積分 (9) の積分路に等しい. さらに, 次が成立する ([T]).

**Proposition 1** 最急降下路  $C^{(j)}$  に沿う積分として与えられる上記の解  $\tilde{\psi}^{(j)}$  は,  $S_{-1} = \xi_j(x)$  で始まる WKB 解の Borel 和と (正規化のための定数因子を除いて) 一致する.

すなわち、Laplace 型方程式に対しては、最急降下法と完全 WKB 解析は実質的に同等である。

特に、上記の変換  $y = -f(x, \xi)$  により  $f(x, \xi)$  の鞍点と WKB 解の Borel 変換  $\psi_B(x, y)$  の特異点が対応していることに注意すれば、次が得られる。

**Proposition 2** Laplace 型方程式の場合、WKB 解の Borel 和が Stokes 現象を起こすのは、積分表示式 (3) において  $\Re f$  の最急降下路が 2 つの鞍点を結ぶ時、かつその時に限る。

このように、積分表示を用いることで、Laplace 型の高階方程式については前節の最後に述べた問題に対する一つの解答が与えられた訳である。

### 3.2 一般の多項式係数の方程式の場合

では、一般の多項式係数の方程式の場合はどうだろうか。

Laplace 型方程式の場合と同様に、この場合も相関数  $f_k(x, \xi) = x\xi - \int^\xi x_k(\xi)d\xi$  は  $m$  個の鞍点を持ちそれらが  $\xi = \xi_j(x)$  で与えられることが、特性方程式の根の定義を用いれば確かめられる。そこで、§3.1 と同様に、鞍点  $\xi_j(x)$  を通る  $\Re f_k$  の最急降下路を  $C^{(j)}$  (あるいは簡単に  $C$ ) で表し、 $C$  に沿う積分 (15) として与えられる  $\tilde{\psi}(x)$  と、 $S_{-1} = \xi_j(x)$  で始まる (12) の WKB 解  $\psi_j(x)$  とを比べることにしよう。

以下、議論の厳密化のため  $n = 2$  (つまり Laplace 変換された方程式が 2 階) と仮定する。“積分表示” (15) を解析的に扱うには、当然 WKB 解  $\hat{\psi}_k$  の Borel 和  $\hat{\Psi}_k$  を考えなければならない。すなわち、我々が考察するべきは正確には次の積分である。

$$(17) \quad \tilde{\psi}(x) = \int_C e^{\eta x \xi} \hat{\Psi}_k(\xi) d\xi = \int_C e^{\eta x \xi} \left( \int e^{-\eta z} \hat{\psi}_{k,B}(\xi, z) dz \right) d\xi.$$

( $z$  に関する積分は、 $z = \int^\xi x_k(\xi)d\xi$  から出て正の実軸に平行に  $z = \infty$  まで走る積分路に沿って行う。) これと (12) の WKB 解  $\psi_j(x)$  の Borel 和を比較するために、2 重積分 (17) において  $z \mapsto y = z - x\xi$  という変数変換を行い、さらに積分の順序を交換すれば、次式が得られる。

$$(18) \quad \tilde{\psi}(x) = \int e^{-\eta y} \left( \int \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y + x\xi) d\xi \right) dy.$$

ここで、 $y$  に関する積分は、 $y = -\int^x \xi_j(x)dx$  から出て正の実軸に平行に  $y = \infty$  まで走る積分路  $y = -\int^x \xi_j(x)dx + w$ ,  $w \geq 0$  に沿って、また  $\xi$  に関する積分は、最急降下路  $C$  上の鞍点  $\xi_j(x)$  を含む部分  $[\xi^{(-)}, \xi^{(+)}]$  (但し  $\xi^{(\pm)}$  は  $\Re f_k(x, \xi^{(\pm)}) - \Re f_k(x, \xi_j(x)) = -w$  を満たす  $C$  の点) 上で、それぞれ行うものとする。この積分 (18) は、まさしく Borel 和の形をしている。実際、

$$(19) \quad \chi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\xi^{(-)}}^{\xi^{(+)}} \hat{\psi}_{k,B}(\xi, y + x\xi) d\xi$$

とおけば、次が成立する。

**Proposition 3**  $\chi(x, y)$  は,  $|y + \int^x \xi_j(x) dx|$  が十分小さい時, (12) の WKB 解  $\eta^{-1/2}\psi_j$  の Borel 変換である.

Prop. 3 は, Laplace 型の場合と同様に, 一般の場合も (15) (あるいは (17)) が方程式 (12) の “良い” 積分表示を与えていることを意味している.

ところが, 一般の場合の状況は Laplace 型の時のように単純ではない. 我々は積分表示の被積分函数として  $\hat{P}\hat{\psi} = 0$  の WKB 解の Borel 和を用いており, この WKB 解の Borel 和が  $\hat{P}$  の Stokes 曲線上で Stokes 現象を起こすが故に, 最急降下路  $C$  がそうした Stokes 曲線と交わるともはや Prop. 3 は成立しなくなるのである. もう少し詳しく状況を見てみよう. 議論を明確にするために, Figure 2 のように, 最急降下路  $C$  がただ 1 本の (type  $k > k'$ ) の Stokes 曲線  $\Im \int_{\hat{a}}^{\xi} (x_k(\xi) - x_{k'}(\xi)) d\xi = 0$  とある点  $\xi_0$  で交わる状況を考える. この時, Stokes 曲線との交点  $\xi_0$  において, (17) の  $\hat{\Psi}_k$  を定める積分の積

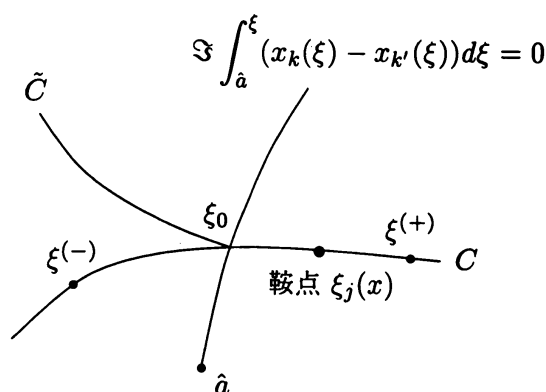


Figure 2

分路上に  $\hat{\psi}_{k,B}$  の特異点が現われ, その結果  $\hat{\Psi}_k$  に Stokes 現象が起きる. 同様な現象は (17) を書き直して得られた (18) についても起こるはずであり, 実際対応する点において  $\chi(x, y)$  を定義した (19) の積分路上にやはり  $\hat{\psi}_{k,B}$  の特異点が現われる. こうして  $\chi(x, y)$  にも Stokes 現象が起きて, その解析接続 (これが  $\eta^{-1/2}\psi_j$  の Borel 変換を与える筈) は新たに余分な項を拾い込むことになる. 実は, この余分な項は,  $C$  と問題の Stokes 曲線との交点  $\xi_0$  から出るもう一つの相函数  $f_{k'}$  に関する最急降下路  $\tilde{C}$  (cf. Figure 2) に沿った, Borel 和  $\hat{\Psi}_{k'}$  の Laplace 逆変換から得られることが証明できる. すなわち, Prop. 3 の大域的なバージョンとして, 次が成り立つ ([AKT2], [AKT3]).

**Proposition 4**  $n = 2$  とし, さらに鞍点  $\xi_j(x)$  を通る  $\Re f_k$  の最急降下路  $C$  はただ 1 本の type  $k > k'$  の Stokes 曲線と交わると仮定する (cf. Figure 2). この時,

$$(20) \quad \int_C e^{\eta x \xi} \hat{\Psi}_k(\xi) d\xi + \alpha \int_{\tilde{C}} e^{\eta x \xi} \hat{\Psi}_{k'}(\xi) d\xi$$

という形の積分 (Laplace 逆変換) が, (12) の WKB 解  $\eta^{-1/2}\psi_j$  の Borel 和を与える. ここで  $\alpha$  は, 問題の Stokes 曲線上で  $\hat{\Psi}_k$  が満たす接続公式から決まる定数である.

つまり, Laplace 逆変換 (15) を積分表示と見なす時には, 鞍点を通る  $\Re f_k$  の通常の意味での最急降下路  $C$  に加えて, Stokes 曲線との交点から分岐させた他の最急降下路  $\tilde{C}$  も同時に考えなければならない. ( $\tilde{C}$  に沿う積分の部分に, 指数函数的に微小な情報が隠れている訳である.)

ここでは議論の厳密さのために状況を限定したが, Prop. 4 はかなり一般的な状況において成立すると予想される. すなわち, 通常的最急降下路の代わりに次の意味での “完全最急降下路” を考えれば, Laplace 逆変換 (15) に対する「完全最急降下法」が, 元の方程式 (12) の解の (指数函数的に微小な部分まで含めた) 漸近的な性質を引き出すと考えられる.

**Definition 2** 相函数  $f_k = x\xi - \int^\xi x_k(\xi)d\xi$  の鞍点  $\xi = \xi_j(x)$  を通る  $\Re f_k$  の最急降下路  $C$  が,  $\hat{P}$  の type  $k > k'$  の Stokes 曲線と交わったならば, その交点から出る  $\Re f_{k'}$  の最急降下路  $C_{k'}$  を分岐させる. さらに, もし  $C_{k'}$  が type  $k' > k''$  の Stokes 曲線と交われば  $\Re f_{k''}$  の最急降下路  $C_{k''}$  を分岐させ... と, この操作を可能な限り続ける. この時, こうしてできる最急降下路の全体 (和集合)  $C \cup C_{k'} \cup C_{k''} \cup \dots$  を, 完全最急降下路と呼ぶ.

特に, Laplace 型方程式に対する Prop. 2 の一般化として, 次の予想が導かれる.

**Exact Steepest Descent Path Conjecture** 多項式係数の線型常微分方程式 (12) の WKB 解の Borel 和が Stokes 現象を起こすのは, こうした完全最急降下路が 2 つの鞍点を結ぶ時, かつその時に限る.

**Example 2** 次の 3 階方程式を考える.

$$(21) \quad \left( \frac{d^3}{dx^3} + \eta^2(i - 4x^2) \frac{d}{dx} + \eta^3 \left( \frac{i}{2} - x^2 \right) \right) \psi = 0.$$

この方程式の Stokes 曲線を Figure 3 に図示した.

Figure 3 に示した Stokes 曲線の交点 A から最も右側に出て行く Stokes 曲線に注目する. この Stokes 曲線の両側で, 我々の積分表示 (15) の通常の意味での最急降下路を描いたのが Figure 4 である. この Figure 4 から明らかなように, 問題の Stokes 曲線の両側で通常的最急降下路の形状はほとんど変化していない. 従って, この間に通常の意味での最急降下路が 2 つの鞍点を結んだとはとても考えられない. つまり, 通常的最急降下法では, Stokes 現象が起きている筈の問題の Stokes 曲線を検出できない訳である.

次に, 同じ Stokes 曲線の両側で完全最急降下路 (の一部) を図示すると Figure 5 が得られる. 鞍点を通る通常的最急降下路に加えて, 第 4 象限にある鞍点から出た最急降下路が  $\hat{P}$  の Stokes 曲線とすぐ近くで交わったその交点から分岐した新たな最急降下路が, 太い実線で描かれている. (図が複雑になることを恐れて, 完全最急降下路の全体は描いていない. なお, 細い実線は  $\hat{P}$  の Stokes 曲線を表す.) この新たに分岐した最急降下路が, 2 つの図の間で他の鞍点に突っ込んでいることが図から読み取れる. すなわち, 完全最急降下路を用いることで, 通常的最急降下法では検出できなかった Stokes 曲線が見事に捕えられた.

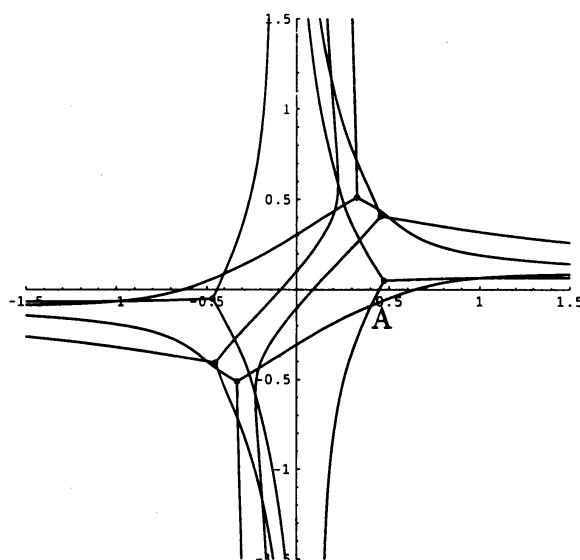


Figure 3 : 方程式 (21) の Stokes 曲線

## References

- [AKT1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations, *Analyse algébrique des perturbations singulières. I*, Hermann, 1994, pp. 69–84.
- [AKT2] ———: 完全最急降下法を目指して, 数理解析研究所講究録, No. 1168, 2000, pp. 1–40.
- [AKT3] ———: On the exact steepest descent method — a new method for the description of Stokes curves, to appear in *J. Math. Phys.*
- [BNR] H. L. Berk, W. M. Nevins and K. V. Roberts: New Stokes lines in WKB theory, *J. Math. Phys.*, **23**(1982), 988–1002.
- [CNP] B. Candelpergher, J.C. Nosmas et F. Pham: *Approche de la résurgence*, Hermann, 1993.
- [DP] E. Delabaere and F. Pham: Resurgent methods in semi-classical asymptotics, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **71**(1999), 1–94.
- [KT] T. Kawai and Y. Takei: 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.

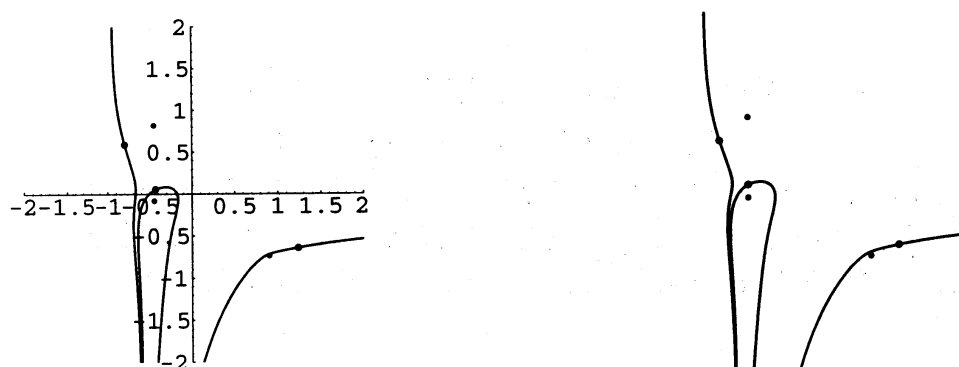


Figure 4 : 問題の Stokes 曲線の両側での通常的最急降下路

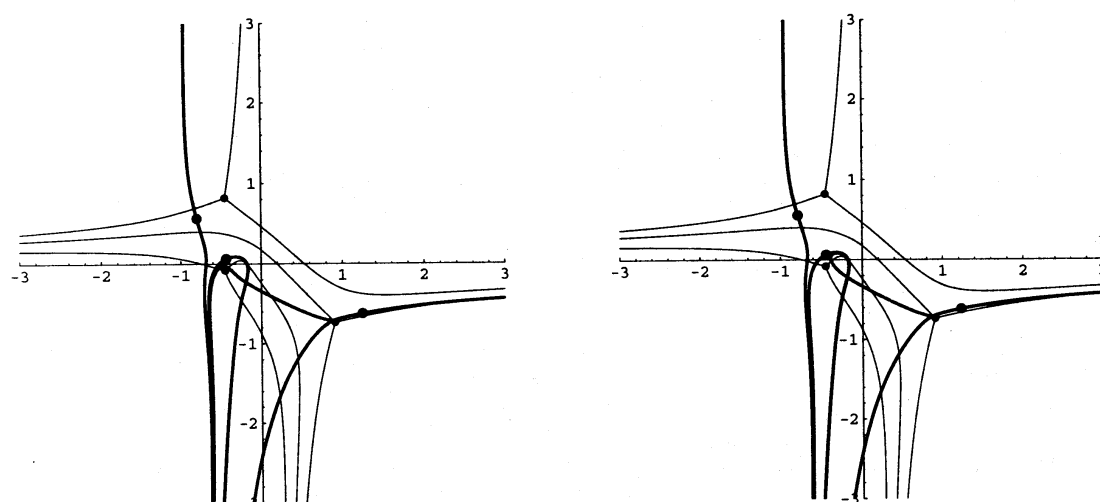


Figure 5 : 問題の Stokes 曲線の両側での完全最急降下路

- [T] Y. Takei: Integral representation for ordinary differential equations of Laplace type and exact WKB analysis, 数理解析研究所講究録, No. 1168, 2000, pp. 80–92.
- [U1] K. Uchiyama: On examples of Voros analysis of complex WKB theory, *Analyse algébrique des perturbations singulières. I*, Hermann, 1994, pp. 104–109.
- [U2] ———: Graphical illustration of Stokes phenomenon of integrals with saddles, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 87–96.
- [V] A. Voros: The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **39**(1983), 211–338.