

MHD系の線形安定理論について

電気通信大学 牛島照夫 (Teruo Ushijima)

共同研究の際には、「トカマク型プラズマ肉じこめにおける数学研究の役割 — 経過報告, 可能性を求めて — 」という演題の下に、かなり詳細な予稿集を作成し、その予稿に基づき講演を行なった。本稿では、その予稿集から、本標題に関する部分を抜粋して述べる。

1. MHD方程式系.

トカマク型肉じこめで通常使われるMHD系は、

$$(1) \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} v,$$

$$(2) \rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + J \times B,$$

$$(3) \frac{D}{Dt}(\rho \rho^{-\gamma}) = 0,$$

$$(4) \frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot} E,$$

$$(5) \operatorname{div} B = 0,$$

$$(6) \operatorname{rot} B = \mu J,$$

$$(7) \quad \eta \mathbf{J} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

のように表わされる。このモデルでは、プラズマは空間内の有界領域 Ω_p 全体に亘る一成分流体と考えている。その密度が ρ 、速度が $\mathbf{v}$ である。スカラー関数 P は圧力、ベクトル関数 $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ は、それぞれ、磁束密度、電場、電流密度である。慣習的に $\mathbf{B}$ は磁場とよばれている。 μ は真空の透磁率をあらわす正定数、 γ は比熱比 (= 定圧比熱 / 定積比熱) で、 $\gamma = 5/3$ などがよく使われる。 η は電気抵抗である。質量微分: $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)$ と勾配演算子: $\nabla = \text{grad}$ を用いる。記号 $\times$ は通常のベクトル外積を表わしている。

(1) は質量保存則である。

(2) の運動方程式において、力の項に流体の粘性の効果を考えないところにこの定式化の一つの特徴がある。圧力勾配と電磁場の相互作用によって生じる力が主要項である。 $\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ は、いわゆる、フレミング左手の法則に起因する。

(3) は断熱条件の式とよばれているが、(1) の下では

$$(3) \quad \frac{DP}{Dt} = -\gamma P \operatorname{div} \mathbf{v}$$
を要請するのと同様である。

(4) はマクスウェル方程式を構成するファラデーの電磁誘導の法則である。

(5) は単極磁場の不存在とあらわす。

(6) はアンペールの電流磁気関係の法則：

$$(6)_0. \quad \frac{\partial D}{\partial t} + J = \nabla \times H,$$

において、電気変位 D の時間変化が注目しているわけに、現象の特徴的な時間に対して無視出来るものとし、さらに構成法則：

$$B = \mu H$$

を代入して得られる。(6) を単にアンペールの法則とよぶことも多い。

(7) はオームの法則であつて、右辺の $E + v \times B$ はローレンツ力である。

抵抗 $\eta = 0$ のとき、理想MHD系とよぶ。このとき、(2),

(4) は、それぞれ、

$$(2)_0. \quad \rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \frac{1}{\mu} \nabla \times B \times B,$$

$$(4)_0. \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B)$$

となり、(1), (2)₀, (3), (4)₀, (5) が理想MHD系の方程式となる。

プラズマ領域 Ω_p の内包は有界領域 Ω に完全に含まれているとする。 Ω_p, Ω の境界をそれぞれ Γ_p, Γ とあらわそう。 Γ は完全電気伝導度をもつものとする。 $\Omega_v = \Omega - \bar{\Omega}_p$ を真空領域とする。以後 $\Omega_p, \Omega_v, \Omega$ は全て連結してい

るものとしておく。

真空領域 Ω_v では,

$$(8) \quad \rho = P = 0, \quad v = J = 0,$$

$$(4)_v \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot } E,$$

$$(5)_v \quad \text{div } B = 0,$$

$$(6)_v \quad \text{rot } B = 0$$

が成立していると考ええる。

境界 P では,

$$(9) \quad n \times E = 0,$$

又は,

$$(10) \quad (B, n) = 0$$

を与える。 n は P の各点における外向き単位法線である。

(10) は (4)_v があるので (9) とは矛盾しないと考ええる。

プラズマ境界 P_p では,

$$(10)_{p,v} \quad (B_p, n) = (B_v, n) = 0,$$

$$(11) \quad (E_p + v_p \times B_p) \times n = (E_v + v_p \times B_v) \times n$$

$$(12) \quad P_p + \frac{1}{2\mu} B_p^2 = \frac{1}{2\mu} B_v^2$$

の三条件が成立しているものと考ええる。(10) と (10)_{p,v} は、 P と P_p が、いわゆる、磁気面であることを要求している。

(11) はプラズマに沿って測った電界の接平面成分の連続性の要求である。(12) は圧力平衡の式とよばれている。その

由縁は項を改めて説明する。(10) p, v , (11), (12) において添字 p と v は, それぞれ, プラズマ側と真空側からの極限をあらわす。

2. 平衡解と圧力平衡の境界条件.

$\eta = 0$ とし, (1.1) ~ (1.12) をみたす解で, 速度が 0 で時間依存しない解を(静止)平衡解という。 $\{ \rho, v (=0), P, J, B, E (=0) \}$ が平衡解であるとすると, $\{ P, J, B \}$ は,

$$(1) \quad \begin{cases} \nabla P = J \times B, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad \rho B = \mu J & \text{in } \Omega_p, \\ P = 0, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad \rho B = 0 & \text{in } \Omega_v, \\ (B, n) = 0 & \text{on } T_p \cup T_v, \\ P_p + \frac{1}{2\mu} B_p^2 = \frac{1}{2\mu} B_v^2 & \text{on } T_p \end{cases}$$

として記述される。

Ω_p において, $J \times B$ はマックスウェルの応力テンソルの磁気成分の発散として表わされる。すなわち,

$$(2) \quad J \times B = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} (B B - \frac{1}{2} B^2 I)$$

である。ここで,

$$B B = (B_i B_j)_{1 \leq i, j \leq 3}, \quad B^2 = \sum_{i=1}^3 B_i^2,$$

$$I = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$$

であり, (2) を成分表示すると,

(2) $(J \times B)_i = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i B_j - \delta_{ij} \frac{1}{2} B^2)$
 である。ただし、今固定した直交座標系 $O-x_1, x_2, x_3$
 に依った単位ベクトルを e_i とし、 $B = \sum_{i=1}^3 B_i e_i$ と
 あらわせるものとした。 Ω_p に含まれる任意の内曲面 S を
 考えると、(1) と (2) により、

$$(3) \quad \oint_S \left[\left\{ P + \frac{1}{2\mu} B^2 \right\} I - \frac{1}{\mu} B B \right] n dS = 0.$$

ここで、 n は S の外向き単位法線ベクトルである。

形式的に Ω_v で $\nabla P = J \times B$ はみたして置くから、

$$(4) \quad \operatorname{div} \left\{ \left(P + \frac{B^2}{2\mu} \right) I - \frac{1}{\mu} B B \right\} = 0 \quad \text{in } \Omega_p \cup \Omega_v$$

ここで Ω 全体で弱い意味 (超関数の意味) での微分としてみる

$$(5) \quad \operatorname{div} \left\{ \left(P + \frac{B^2}{2\mu} \right) I - \frac{1}{\mu} B B \right\} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

が成立することとを要請すると圧力平衡の条件式:

$$(1.12) \quad P_p + \frac{1}{2\mu} B_p^2 = \frac{1}{2\mu} B_v^2$$

が得られることに注意しよう。実際、

$$f_{pi} = \left(\left(P + \frac{1}{2\mu} B^2 \right) \delta_{ij} - \frac{1}{\mu} B_i B_j \right)_{j=1,2,3} \quad \text{in } \Omega_p,$$

$$f_{vi} = \left(\frac{1}{2\mu} B^2 \delta_{ij} - \frac{1}{\mu} B_i B_j \right)_{j=1,2,3} \quad \text{in } \Omega_v$$

とし、これらは、 $\overline{\Omega_p}$ と $\overline{\Omega_v}$ で、それぞれ、連続なものとしよう。

$$f_i = \begin{cases} f_{pi} & \text{in } \Omega_p, \\ f_{vi} & \text{in } \Omega_v \end{cases}$$

と定めれば、 f_i は Ω 上の可積分ベクトル値関数である。

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ の台が Γ_P と交わるものとする。超関数微分の定義から、

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} f_i)(\varphi) &= - \int_{\Omega} f_i \nabla \varphi \, dx \\ &= - \int_{\Omega_P} f_{Pi} \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega_V} f_{Vi} \nabla \varphi \, dx \\ &= - \int_{\Omega_P} \operatorname{div}(f_{Pi} \varphi) \, dx + \int_{\Omega_P} \operatorname{div} f_{Pi} \varphi \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega_V} \operatorname{div}(f_{Vi} \varphi) \, dx + \int_{\Omega_V} \operatorname{div} f_{Vi} \varphi \, dx. \end{aligned}$$

(4) より上式最右辺の才二項と才四項は 0 である。

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} f_i)(\varphi) &= - \int_{\Gamma_P} (f_{Pi}, n) \varphi \, dP - \int_{\partial \Omega_V} (f_{Vi}, n) \varphi \, dP \\ &= (\varphi \text{ の台は有界だから}) \\ &= - \int_{\Gamma_P} \{ (f_{Pi}, n) - (f_{Vi}, n) \} \varphi \, dP. \end{aligned}$$

(5) の下では、 φ の任意性から

$$(f_{Pi}, n) = (f_{Vi}, n) \quad \text{on } \Gamma_P$$

である。ところで Γ_P では、

$$\begin{aligned} (f_{Pi}, n) &= (P_P + \frac{1}{2\mu} B_P^2) n_i - \frac{1}{\mu} B_{Pi} (B_P, n) \\ (f_{Vi}, n) &= \frac{1}{2\mu} B_V^2 n_i - \frac{1}{\mu} B_{Vi} (B_V, n) \end{aligned}$$

1.4.17. $(B_P, n) = (B_V, n) = 0$ より、

$$\begin{aligned} (f_{Pi}, n) &= (P_P + \frac{1}{2\mu} B_P^2) n_i, \\ (f_{Vi}, n) &= \frac{1}{2\mu} B_V^2 n_i \end{aligned}$$

結局 (5) の下では、

$$\left\{ \left(P_P + \frac{1}{2\mu} B_P^2 \right) - \frac{1}{2\mu} B_V^2 \right\} n = 0$$

となつて (1.12) が得られる。

(4) の下で (5) を期待するのは、物理的にはもっともなことと言つてよいであらう。

3. 線形化MHD方程式

1) 導出

平衡解

$$(1) \quad \{ \rho, v=0, P, J, B, E=0 \}$$

が与えられたとしよう。 $\{P, J, B\}$ は (2.1) に従っている。この平衡解の近くで次の形をした非定常理想MHD系の解 $\{\tilde{\rho}, \tilde{v}, \tilde{P}, \tilde{J}, \tilde{B}, \tilde{E}\}$ が存在したと考える。

$$(2) \quad \begin{cases} \tilde{\rho} = \rho + \varepsilon \rho_1, & \tilde{v} = \varepsilon v_1, & \tilde{P} = P + \varepsilon P_1, \\ \tilde{J} = J + \varepsilon J_1, & \tilde{B} = B + \varepsilon B_1, & \tilde{E} = \varepsilon E_1, \end{cases}$$

ここで、 ε は十分小さい実のパラメータである。プラズマ領域 Ω_p は変換:

$$(3) \quad \tilde{r}(t, r) = r + \varepsilon \xi(t, r)$$

によつて $\tilde{\Omega}_p$ にうつされたと考える。

(2) を方程式 (1.1) ~ (1.7) に代入する。ただし $\eta = 0$ である。得られた方程式を ε の中で整理し、 ε の一次の項の係数を比較することによつて、 $\{\rho_1, v_1, P_1, J_1, B_1\}$ に対する次の線形系が得られる。

$$(4) \begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_1) = 0, \\ \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\operatorname{grad} P_1 + J \times B_1 + J_1 \times B, \\ \frac{\partial P_1}{\partial t} + (v_1, \nabla) P + \sigma P \operatorname{div} v_1 = 0, \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} = \operatorname{rot}(v_1 \times B), \\ \operatorname{div} B_1 = 0. \end{cases}$$

初期条件として

$$(5) \quad \xi(0, r) = 0, \quad r \in \Omega_p,$$

および

$$(6) \begin{cases} P_1(0, r) = 0, \bar{P}_1(0, r) = 0, B_1(0, r) = 0, \\ J_1(0, r) = 0, \quad r \in \Omega_p \end{cases}$$

を要求する。\$r_0 \in \Omega_p\$ を固定すると。

$$v(t, r(t, r_0)) = \frac{d}{dt} r(t, r_0) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \xi(t, r_0)$$

であり、テイラー展開から。

$$v(t, r(t, r_0)) = \varepsilon v_1(t, r_0) + O(\varepsilon^2)$$

となるはずだから、上二式が \$\varepsilon\$ の一次の係数を比較して、

$$(7) \quad v_1(t, r) = \frac{\partial}{\partial t} \xi(t, r), \quad t > 0, \quad r \in \Omega_p$$

の成立を認めるにとする。(7)を(4)に代入し、初期条件(5), (6)を使うと、

$$(8) \begin{cases} P_1 = -\operatorname{div}(\rho \xi) \\ \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} P_1 + \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} B \times B_1 + \operatorname{rot} B_1 \times B) \\ P_1 = -(\xi, \nabla) P - \sigma P \operatorname{div} \xi \end{cases}$$

$$B_1 = \text{rot}(\xi \times B)$$

が、 Ω_p で成立しているものと考えられる。

真空領域 Ω_v では、 $\tilde{B}$ と $\tilde{E}$ を (4)_v, (5)_v, (6)_v に代入して ε の一次の係数を比較して

$$(9) \begin{cases} \frac{\partial B_1}{\partial t} = -\text{rot} E_1, \\ \text{div} B_1 = 0, \\ \text{rot} B_1 = 0 \end{cases}$$

が成立しているものと考ええる。さらに次の性質 (10) をみたす B_1 のベクトルポテンシャル α が存在すると考える。

$$(10) \begin{cases} B_1 = \text{rot} \alpha, & E_1 = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} & \text{in } \Omega_v, \\ n \times \alpha(0, \mathbf{r}) = 0 & & \text{on } T_p. \end{cases}$$

(9) の第一式をみたすために、

$$(11) \quad \text{rot} \text{rot} \alpha = 0 \quad \text{in } \Omega_v$$

を要請し、(1, 10) をみたすために

$$(12) \quad n \times \alpha = 0 \quad \text{on } T$$

を要請する。

接続条件 (1. 11) の処理をしよう。

$$(13) \quad \tilde{E} + \tilde{v} \times \tilde{B} = 0 \quad \text{in } \tilde{\Omega}_p$$

より、 ε の一次の係数を比較して、

$$(14) \quad E_{1p} + v_1 \times B_p = 0 \quad \text{in } \overline{\Omega}_p$$

とありと考える。(1. 11) の両辺に $\tilde{E}$, $\tilde{v}$, $\tilde{B}$ を代入す

ることにより

$$(15) \quad n \times (E_p + v_1 \times B_p) = n \times (E_v + v_1 \times B_v)$$

を得る。(15)の左辺に(14), 右辺に(10)と(7)を代入すると,

$$\begin{aligned} 0 &= n \times \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \times B_v \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (n \times (-\alpha + \xi \times B_v)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (-n \times \alpha + (n, B_v) \xi - (n, \xi) B_v) \end{aligned}$$

(1.10)より

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \times \alpha + (n, \xi) B_v) = 0 \quad \text{on } T_p$$

となる。初期条件(5)が T_p 上でも成立するとし, 初期条件(10)をあわせて使うと,

$$(16) \quad n \times \alpha = -(n, \xi) B_v \quad \text{on } T_p$$

となる。(16)と(1.11)から導出した接続条件と見なそう。

接続条件(1.12)の両辺に $\tilde{D}, \tilde{B}_p, \tilde{B}_v$ を代入して ε の一次の係数を比較すると

$$(17) \quad D_i + \frac{1}{\mu} (B_p, B_{ip}) = \frac{1}{\mu} (B_v, B_{iv})$$

である。(8)の式3式と式4式, (10)の式1式を代入すると,

$$(18) \quad \begin{cases} -\delta P \operatorname{div} \xi + \frac{1}{\mu} (B_p, \operatorname{rot}(\xi \times B_p) + (\xi, \nabla) B_p) \\ \quad = \frac{1}{\mu} (B_v, \operatorname{rot} \alpha + (\xi, \nabla) B_v). \end{cases}$$

この(18)を, (1.12)から導出した接続条件と見なす。

結局, (8) の第2式, (11), (12), (16), (18) から,
次の線形化MHD方程式 (LMHD系と略す) の初期値境界
値問題が得られることになる。

問題1 バクトル値関数の組 $\{\xi, \alpha\}$:

$$\xi = \xi(t, r) : [0, \infty) \times \bar{\Omega}_p \ni (t, r) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha = \alpha(t, r) : (0, \infty) \times \bar{\Omega}_v \ni (t, r) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

で次の条件 (19) をみたすものを求めよ。

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + K \xi = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega_p, \\ \xi(0, r) = 0 & \text{in } \Omega_p, \\ \frac{\partial}{\partial t} \xi(0, r) = v_1 & \text{in } \Omega_p, \\ -(\xi, n) B_v = \alpha \times n & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_p, \\ L(\xi, \alpha) = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_p, \\ \text{rot rot } \alpha = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega_v, \\ n \times \alpha = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma \end{array} \right.$$

ここに

$$(20) \quad K \xi = -\text{grad} \{ (\xi, \nabla P) + \delta P \text{div } \xi \} \\ - \frac{1}{\mu} \{ \text{rot } B \times \text{rot}(\xi \wedge B) + [\text{rot rot}(\xi \wedge B)] \times B \},$$

$$(21) \quad L(\xi, \alpha) = -\delta P \text{div } \xi + \frac{1}{\mu} (B_p, \text{rot}(\xi \wedge B_p) + (\xi, \nabla) B_p) \\ - \frac{1}{\mu} (B_v, \text{rot } \alpha + (\xi, \nabla) B_v)$$

である。

以上の導出法は, Bernstein et al [1], 宮本 [4] などに記述されているものを整理したものである。

2) 線形化MHD作用素

前小節の問題1を, Ushijima [6], Ushijima - Nakamura - Hanada [7] では, ヒルベルト空間 $X = \{L^2(\Omega_p)\}^3$ における発展方程式:

$$(22) \begin{cases} M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + A \xi = 0, & t > 0, \\ \xi(0) = \xi^1, & \frac{d\xi}{dt}(0) = \xi^0 \end{cases}$$

の初期値を $\{\xi^1, \xi^0\} = \{0, v\}$ とする問題と見なしていることを示した。当然しかるべき条件を平衡解に対して要請する。(22)における M は平衡状態における質量 $\rho = \rho(r)$ と乗ずる作用素であり,

$$(23) \quad 0 < \underline{\rho} \leq \rho(r) \leq \bar{\rho} < \infty, \quad r \in \Omega_p$$

なる正定数 $\underline{\rho}$ と $\bar{\rho}$ が存在するものとしている。 A は微分作用素 K の空間 X での実現とみなしている自己共役作用素である。

筆者達の要請した仮定は次の (A.1) ~ (A.6) である。

(A.1) $\Omega, \Omega_p, \Omega_v$ はいずれも有界な連結領域で, その境界は C^3 級である。

(A.2) $B|_{\Omega_p}$ と $B|_{\Omega_v}$ は, それぞれ, $C^2(\overline{\Omega_p})$ と, $C^2(\overline{\Omega_v})$ に属す拡張をもつ。

(A.3) $P|_{\Omega_p}$ は正であり, $C^2(\overline{\Omega_p})$ に属す拡張をもつ. (P は 0 になり得る.) その臨界点集合 $C_p = \{r \in \Omega_p; (\nabla P)(r) = 0\}$ は有限個の連結成分よりなり, どのどの連結成分は C^3 級の単純曲線であるか, 又は C^3 級の曲面であつてその曲面上の各点で B が接平面に含まれてゐるかのいずれかである.

$$(A.4) \quad \overline{P}_1 = \sup_{r \in \Omega_p - C_p} \|(B, \nabla) e\|_{\mathbb{R}^3} < \infty$$

又は,

$$\overline{P}_2 = \sup_{r \in \Omega_p} \frac{\|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3}}{|P|^{1/2}} < \infty$$

のいずれかが成立つ. ここで, $e = \nabla P / \|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3}$ である.

(A.5) B_p は Γ_p 上で決して 0 にならない

か, 又は

P は Ω_p 上で正定数で下からおさえられる
のいずれかが成立する.

(A.6) Ω_p から Ω_v へ向かう Γ_p 上の単位法線ベクトルに沿つた微分 $\frac{\partial}{\partial n}$ に関して食ひ違ひ:

$$G = \frac{\partial}{\partial n} \frac{B^2}{2\mu} \Big|_v - \frac{\partial}{\partial n} \left(P + \frac{B^2}{2\mu} \right) \Big|_p$$

は Γ_p 上の非負の C^1 級関数である.

自己共役作用素 A を線形化 MHD 作用素とよぶ. この作用

素は (19) のオ4式からオ7式で表わされるバフトルポテンシャルに関する条件とある意味で含んでいるものである。

3) 線形化MHD作用素確立のための数学的事実.

プラズマ領域 Ω 上のバフトル関数 ξ が与えられたとすると (19) のオ4式からオ7式をみたす α は存在し, $\text{rot} \alpha$ は ξ に対して (ある意味で) 一意に決る。したがってオ4式からオ7式を, ξ に関する同次境界条件:

$$(24) \quad L(\xi) = 0$$

と考えるといふのが筆者達の主張するところである。この推論の基礎になっているのは Morrey [5] の Theorem 7.8.2 からしたがう次の補題1である。

補題1 Ω を $\mathbb{R}^3$ 内の有界領域で C^2 級の境界 P をもつものとする。任意の $\eta \in H^1(\Omega)$ に対して, 次の条件をみたす $\omega \in H^1(\Omega)$ が存在する。

$$(25) \quad \begin{cases} \text{rot rot } \omega = 0 & \text{in } \Omega, \\ n \times \omega = n \times \eta & \text{on } P \end{cases}$$

ここで, Ω 上の1階のソボレフ空間 $H^1(\Omega)$ を,

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \frac{\partial}{\partial x_i} f \in L_2(\Omega), i=1,2,3\}$$

によって定め, $H^1(\Omega) = \{H^1(\Omega)\}^3$ とする。(25)

における微分作用素 rot は超素数の意味であり, n は P 上の外向き単位法線ベクトルである。補題 1 から次の命題 2 がいえる。

命題 2 任意の $\xi \in H'(\Omega_p)$ に対して次の条件 (26) をみたす $\alpha \in H'(\Omega_v)$ が存在する。

$$(26) \quad \begin{cases} \text{rot rot } \alpha = 0 & \text{in } \Omega_v, \\ n \times \alpha = -(n, \xi) B_v & \text{on } P_p, \\ n \times \alpha = 0 & \text{on } P, \end{cases}$$

さらにこのような α に対して, $\text{rot } \alpha$ は一意に定まる。

この命題 2 に注意すると, $V_0 = H'(\Omega_p)$ 上に次のプラズマエネルギー二次形式 a を定めることができる。

$$(27) \quad \begin{cases} a = a_p + a_s + a_v, \quad a_p = a_1 + a_2, \\ a_1(\xi, \eta) = \int_{\Omega_p} \{ \chi P \text{div } \xi \text{div } \eta + \frac{1}{\mu} (\text{rot}(\xi \times B), \text{rot}(\eta \times B)) \} dV, \\ a_2(\xi, \eta) = \int_{\Omega_p} \{ (\xi, \nabla P) \text{div } \eta - \frac{1}{\mu} (\text{rot}(\xi \times B), \eta \times \text{rot} B) \} dV, \\ a_s(\xi, \eta) = \int_P G(\xi, n)(\eta, n) dP, \\ a_v(\xi, \eta) = \int_{\Omega_v} \frac{1}{\mu} (\text{rot } \alpha, \text{rot } \beta) dV. \end{cases}$$

ここで, a_s の右辺における G は (A.6) で定められたものであり, a_v の右辺における α は命題 2 で ξ に対して定まるものであり, β は命題 2 の $\xi \in \eta$ として定まるものである。

$a_2(\xi, \eta)$ は見掛け上非対称であるが, P と B が平衡解であることと, 臨界点集合 C_P に対する仮定 (A.3) を使って, ξ と η について対称であることを示すことができる。

一般に $H^m(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^3$ とする。

命題3 $\xi \in H^2(\Omega_P)$ と $\eta \in H^1(\Omega_P)$ に対して

$$(28) \quad \int_{\Omega_P} (K\xi, \eta) dV = a(\xi, \eta) + \int_P L(\xi, \alpha)(n, \eta) dP.$$

ここで右辺の α は, 命題2で ξ に対して定まるものである。

この命題3は“境界条件” $L(\xi, \alpha) = 0$ は微分作用素 K に対するいわば自然境界条件の役割をしていることを示唆する。本質的境界条件に対応する

$$(29) \quad (\xi, \eta) = 0 \quad \text{on } P_P$$

を採用する問題は固定境界問題とよばれている。擾動変位として境界と直交する成分を許すことは許さないことを意味している。

仮定 (A.1) ~ (A.6) を使って, 対称二次形式 $a(\xi, \eta)$ は下半有界であることがわかる。すなわちある $\kappa_0 \in \mathbb{R}$ があって

$$(30) \quad \begin{cases} a(\xi, \eta) + \kappa(\xi, \eta) \llbracket^2(\Omega_P) \geq 0 \\ \kappa \geq \kappa_0, \quad \xi, \eta \in H^1(\Omega_P) \end{cases}$$

となる。筆者達は, Lüst-Martensen [3] による真空磁場の表示式をソボレフ空間の枠で証明しなおした上で

$a_\kappa(\xi, \eta) = a(\xi, \eta) + \kappa(\xi, \eta)$ が $V_0 = H^1(\Omega_p)$ 上で $\kappa \geq \kappa_0$ なら可成である, すなわち $\{\xi_m\} \subset V_0$ が

$$(31) \quad \begin{cases} \|\xi_m\|_{L^2(\Omega_p)} \rightarrow 0 & (m \rightarrow \infty) \\ \text{かつ} \\ a_\kappa(\xi_m - \xi_{m'}) \rightarrow 0 & (m, m' \rightarrow \infty) \\ \text{ならば} \\ a_\kappa(\xi_m) \rightarrow 0 & (m \rightarrow \infty), \end{cases}$$

($a_\kappa(\xi) = a_\kappa(\xi, \xi)^{1/2}$) であることを示し, V_0 の a_κ ノルムによる完備化 V を定義域とする二次形式 a の拡張に対応する自己共役作用素 A とした。このことである。

最近の Lawrence - Shen [2] は同様の問題を扱っており, (31) に対応する部分の推論は不十分のように思われる。

4) エネルギー-原理

始めに, ベクトル関数の組 $\hat{\xi} = \{\xi, \alpha\}$ を要素とする次の試験関数の空間 $\hat{W}$ を用意する。

$$(32) \quad \hat{W} = \{\hat{\xi} = \{\xi, \alpha\} \in H^1(\Omega_p) \times H^1(\Omega_v):$$

$$n \times \alpha = -(\xi, n) Bv \text{ on } P_p,$$

$$n \times \alpha = 0 \text{ on } P \}$$

$\hat{W}$ の $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ に対して次のように二次形式 $\hat{a}(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ を定め

す。 $\hat{\xi} = \{\xi, \alpha\}$, $\hat{\eta} = \{\eta, \beta\}$ とする。

$$(33) \quad \hat{a}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = a_p(\xi, \eta) + a_s(\xi, \eta) + \hat{a}_v(\alpha, \beta).$$

ここで $a_p(\xi, \eta)$, $a_s(\xi, \eta)$ は (27) で決まるものであり、

$\hat{a}_v(\alpha, \beta)$ は (27) の $a_v(\xi, \eta)$ の右辺で定まるものとする。

次に $L^2(\Omega_p) = \{L^2(\Omega_p)\}^3$ に内積:

$$(34) \quad m(\xi, \eta) = \int_{\Omega_p} \rho(\xi, \eta)_{\mathbb{R}^3} dV$$

を用いたヒルベルト空間 X_p とする。条件 (23) に注意する。

$$(35) \quad A_p \xi = p^{-1} A \xi \quad \text{for } \xi \in D(A_p) = D(A)$$

で定まる作用素 A_p は X_p の自己共役である。 A_p のスペクトル集合を $\sigma(A_p)$ とし、

$$(36) \quad \underline{\lambda} = \inf \sigma(A_p)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \underline{\lambda} &= \inf_{\xi \in D(A)} \frac{a(\xi, \xi)}{m(\xi, \xi)} = \inf_{\xi \in V} \frac{a(\xi, \xi)}{m(\xi, \xi)} \\ &= \inf_{\xi \in V_0} \frac{a(\xi, \xi)}{m(\xi, \xi)} \end{aligned}$$

である。次の定義は線形安定性理論の基本となるものである。

定義4 平衡解, $\{\rho, v=0, P, J, B, E=0\}$

は, $\underline{\lambda} > 0$, $\underline{\lambda} = 0$, $\underline{\lambda} < 0$ に応じて, それぞれ, 安定, 中立, 不安定とよばれる。

発展方程式 (22) は, 平衡解が不安定ならば, $t \rightarrow \infty$ と

き指数関数的に増える解をもち、安定ならばそのようなことはない。不安定とき、

$$(37) \quad \gamma = -\gamma^2$$

とき、 γ を不安定性の成長率と称する。

Bernstein et al. [1] で主張しているエネルギー原理に対応して次の定理を主張できる。

定理5 平衡解は、全ての $\hat{\xi} = \{\xi, \alpha\} \in \hat{W}$ に対して、 $\alpha(\hat{\xi}, \hat{\xi}) \geq 0$ ならば、安定又は中立であり、ある $\hat{\xi} = \{\xi, \alpha\} \in \hat{W}$ に対して $\alpha(\hat{\xi}, \hat{\xi}) < 0$ ならば不安定である。

文献

- [1] Bernstein, I., Frieman, E., Kruskal, M., and Kulsrud, R., An energy principle for hydromagnetic stability problems, Proc. Royal Soc. A. 244 (1958), 17 - 40.
- [2] Lawrence, P., and Shen, M. C., Justification of the MHD energy principle for the stability of a confined toroidal plasma, Comm. Pure and Applied Math. 36 (1983) 233 - 252.

- { 3 } Lüst, von R., and Martensen, E., Zur Mehrwertigkeit des skalaren magnetischen Potentials beim hydromagnetischen Stabilitätsproblem eines Plasmas, Z. Naturforsch., A. 15 (1960) 706-713.
- [4] 宮本健郎, 核融合のためのプラズマ物理 (岩波書店 東京, 1976).
- { 5 } Morrey Jr., C., Multiple integrals in the calculus of variations, (Springer, Berlin, 1966).
- { 6 } Ushijima, T., On the linearized magnetohydrodynamic systems of equations for a contained plasma in a vacuum region, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, V, 509-527 (North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1982).
- { 7 } Ushijima, T., Nakamura, M., and Hanada, T., On the linearized magnetohydrodynamic system appeared in the plasma confined study, in handwriting manuscript, Univ. of Electro-Communications (1984).