

束準同形としてのプログラムと 方程式解の一意性

法政大工 金山 裕

§1. 序

正則プログラムの半束上の自己準同形として定義すると、それを最小解とする連立1次方程式を得ることが出来る。それが一意解を有するとき、それを利用してプログラムの正当性を容易に証明することが出来る。しかも実用に供される多くのプログラムは、その方程式が一意解を有する。以下に示す十分条件は、平たくいうと、そのプログラムが決定性で無限ループを持たないことである。

Floyd による方法と本稿に示す方法は本質的には等しい仕事をしているであろうが、前者がプログラムポイントで成立する命題を扱うのに対し、後者はプログラムが意味する子像を扱うことが大きな相異点である。^{[2][3][6]}

ここに得られた結果も、最後に、具体例について適用してみた。

§ 2. Γ -ル代数の自己準同形

半順序集合 $\langle M, \leq \rangle$ が Γ -ル代数で, supremum の演算 $\vee$ について countably complete であるとする. λ の最小元を 0 とする.

mapping: $M \rightarrow M$ の集合 M^M における関係 $\leq$, および $=$ を次により定義する. $x, y \in M^M$ とし

$$\begin{cases} x \leq y \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in M \quad ax \leq ay \\ x = y \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in M \quad ax = ay \end{cases} \quad (ax \text{ は } x(a) \text{ の意味})$$

M^M における積 (関数合成) を次により定義する.

$$\forall a \in M \quad a(xy) \equiv (ax)y$$

$\lambda, \mu \in M^M$ を次により定義する.

$$\forall a \in M \quad a\lambda \mapsto a$$

$$\forall a \in M \quad a\mu \mapsto 0.$$

補題 2.1 (1) M^M は σ -upper semilattice である.

(2) M^M は単位元 λ を有するモノイドである.

(3) M^M における次の分配律が成立する.

$$\forall x \in M^M, \forall Y \subset M^M \quad (\bar{Y} \leq x_0 \rightarrow x \vee Y = \vee \{xy \mid y \in Y\})$$

$$(4) \quad x\mu = \mu$$

$$(5) \quad y \leq z \rightarrow xy \leq xz. \quad [1]$$

任意の $A \subset M$ について

$$\bar{A} \leq x_0 \rightarrow (VA)x = V\{ax \mid a \in A\}$$

なる $x \in M^M$ を M における join-endomorphism 又は単に endomorphism という. M における endomorphism の集合を $\mathcal{E}(M)$ で表わす. $\lambda, \mu \in \mathcal{E}(M)$ であるから $\mathcal{E}(M)$ は空でない.

補題 2.2 (1) $\mathcal{E}(M)$ は M^M の σ -subsemilattice である.

(2) $\mathcal{E}(M)$ は M^M の submonoid である.

$$(3) \forall x \in \mathcal{E}(M) \quad \forall Y \subset M^M (\bar{Y} \leq x_0 \rightarrow (VY)x = V\{yx \mid y \in Y\})$$

$$(4) \forall x \in \mathcal{E}(M) \quad \mu x = \mu, \quad y \leq z \rightarrow yx \leq zx \quad [1]$$

$$(5) \forall x \in \mathcal{E}(M) \quad 0x = 0, \quad \text{かつ } x \text{ は単調増大.}$$

以後扱うすべての $x \in M^M$ は $\mathcal{E}(M)$ の元とする.

$\mathcal{E}(M)$ の元 x_{ij} を要素とする行列 $X = [x_{ij}]$ についての加法と積を通常のように定義する. 同じタイプの行列 X, Y の関係も

$$\begin{cases} X \leq Y & \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall i, j \quad x_{ij} \leq y_{ij} \\ X = Y & \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall i, j \quad x_{ij} = y_{ij} \end{cases}$$

によつて定義する. X が正方行列のとき X^t ($t \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$) および X^* を次のように定義する.

$$\begin{cases} X^0 \equiv \lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda & & \mu \\ & \ddots & \\ \mu & & \lambda \end{bmatrix} \\ X^{t+1} \equiv X \cdot X^t \\ X^* \equiv \bigvee_{t=0}^{\infty} X^t \end{cases} \quad t \in \mathbb{N}$$

補題 2.3

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

なるとき, U^*V は X に属する方程式

(2.1)

$$X = U X \vee V$$

の最小解である.

$\exists X \quad X \neq \mu \quad X = U X$ なる U を singular, そうでない U を loop free という (スカラー u に対して u の定義は有効とする).

補題 2.4 (1) $\exists X \quad X \neq \mu \quad X \leq U X$ ならば U は singular である.(2) U が singular, $U \leq U'$ ならば U' も singular である.(3) U が singular $\rightarrow$ ある相異なる $j_1, \dots, j_k (\in \{1, \dots, n\})$ が存在

$$\text{して, } u_{j_1 j_1} \cdots u_{j_k j_k} x_{j_1} \neq 0.$$

証明. (1) $X' = U^* X$ とおくと $X' \neq \mu$, $X \leq U X \leq U U^* X$ なる

$$X' = X \vee U U^* X = U U^* X = U X'.$$

(2) $X = U X$, $X \neq \mu$ とおくと (1) の結果と $X = U X \leq U' X$ から明らか.

(3) $X = \bigcup X_i$, $X_i \neq \mu$ とする. 少なくとも1つの i_0 について $X_{i_0} \neq \mu$ である. $X = \bigcup X_i$ だから $X_{i_0} = \bigvee_{i_1=1}^n \cdots \bigvee_{i_n=1}^n u_{i_0 i_1} \cdots u_{i_{n-1} i_n} X_{i_n}$. $X_{i_0} \neq \mu$ だから $a X_{i_0} \neq 0$ なる a が存在する.

$$a X_{i_0} = \bigvee_{i_1} \cdots \bigvee_{i_n} a u_{i_0 i_1} \cdots u_{i_{n-1} i_n} X_{i_n} \neq 0$$

よって $a u_{i_0 i_1} \cdots u_{i_{n-1} i_n} X_{i_n} \neq 0$ なる $i_1 \cdots i_n$ が少なくとも1組存在する. その $i_1 \cdots i_n$ を固定したとき, $i_0, \dots, i_n$ の中に等しいものが存在する. 即ち

$$0 \leq p < q \leq n \quad i_p = i_q \quad i_p \cdots i_{q-1} \text{ は相異なる.}$$

という条件を満たす p, q が存在する. ここで $b = a u_{i_0 i_1} \cdots u_{i_{p-1} i_p}$, $j_1 = i_p, \dots, j_k = i_{q-1}$ とおくと $b u_{j_1 j_2} \cdots u_{j_{k-1} j_k} X_{j_k} \neq 0$. ■

§3. 方程式解の一意性

任意の $A \subset M$ について, $\mathcal{L}(A) = \{VB \mid B \subset A, \overline{B} \leq x_0\}$ と定義する. 次の条件を満たす $M_0 \subset M$ が存在するとき, M は M_0 によって生成されるという.

$$(3.1) \quad M = \mathcal{L}(M_0)$$

$$(3.2) \quad \forall a, b \in M_0 \text{ について } a \text{ と } b \text{ は比較不能.}$$

補題 3.1 任意の $\mathcal{L}: M_0 \rightarrow M$ について, $\mathcal{L}$ の拡張 $\mathcal{X} \in \mathcal{E}(M)$ は1つとしてただ1つしかない.

以後, このような M_0 の存在を仮定する.

定理 3.2 (2.1) 式が一意的解を持たないならば, U は singular である.

証明. $z = [z_1, \dots, z_n]^T = U^* w$ とする. (2.1) 式が一意的解を持たないならば $x > z$ なる解 x が存在する. endomorphism $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ を次式によって定義する.

$$\begin{cases} ay_i \vee az_i = ax_i \\ ay_i \wedge az_i = 0 \end{cases} \quad a \in M_0 \quad i=1, \dots, n$$

M が Γ -代数であることと補題 3.1 によって y は一意的に定まる. $x \neq z$ から $y \neq 1$. $x = y \vee z$ を (2.1) に代入する.

$$y \vee z = U y \vee z, \quad y_i \vee z_i = \bigvee_{j=1}^n u_{ij} y_j \vee z_i \quad i=1, \dots, n.$$

よって ~~任意の~~ $y_i \leq \bigvee_j u_{ij} y_j \vee z_i$, 任意の $a \in M_0$ について

$$ay_i \leq \bigvee_j au_{ij} y_j \vee az_i,$$

$$\begin{aligned} ay_i &= ay_i \wedge (\bigvee_j au_{ij} y_j \vee az_i) \\ &= (ay_i \wedge \bigvee_j au_{ij} y_j) \vee (ay_i \wedge az_i) \\ &= ay_i \wedge \bigvee_j au_{ij} y_j \end{aligned}$$

故に $ay_i \leq a \bigvee_j u_{ij} y_j$, $y_i \leq \bigvee_j u_{ij} y_j$, $y \leq U y$. 従って, 補題 2.4 (i) によって U は singular である. ■

この定理の逆は必ずしも成立しない.

$x \in E(M)$ に対して $\text{dom}(x) \subset M_0$ を次式で定義する

$$\text{dom}(x) \equiv \{a \in M_0 \mid ax \neq 0\}$$

補題 3.3 (1) $\text{dom}(x) = \emptyset \Leftrightarrow x = \mu$

(2) $\text{dom}(xy) \subset \text{dom}(x)$

$p \times q$ 行列 $X = [x_{ij}]$ は次の 2 条件を満たすとき deterministic であるという.

(3.3) $\forall i, j \quad \forall a \in M_0 \quad ax_{ij} \in M_0 \cup \{0\}$

(3.4) $\forall i \quad \text{dom}(x_{i1}), \dots, \text{dom}(x_{iq})$ が互に素.

定理 3.4 U が deterministic かつ singular ならば, 相変る

$j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ が存在して $u_{i_1 j_1} \dots u_{i_k j_k}$ が singular. 逆も成り立つ.

証明. $j_1, \dots, j_k$ を補題 2.4(3) で求めた系列とする. 一般に

$$ax_{j_1} = \bigvee_{j_2=1}^n \dots \bigvee_{j_k=1}^n au_{j_1 j_2} \dots u_{j_{k-1} j_k} x_{j_k} \quad \text{であるが, } U \text{ が determ.}$$

であることから, $ax_{j_1} = au_{j_1 j_2} \dots u_{j_{k-1} j_k} x_{j_k}$. $\square$

$$x: c \mapsto \begin{cases} a & : c = a \\ 0 & : c \neq a \end{cases} \quad c \in M_0$$

によって $x \in \mathcal{E}(M)$ を定めると $x \leq u_{j_1 j_2} \dots u_{j_{k-1} j_k} x$. 故に補

題 2.4(1) により $u_{j_1 j_2} \dots u_{j_{k-1} j_k} x \equiv \mu$ は singular ($x \neq \mu$).

逆に $y = uy$, $y \neq \mu$ なる y が存在すると仮定する. $y =$

$$[\mu, \dots, \mu, \overset{j_1}{y}, \mu, \dots, \mu]^T \text{ とおく. } \sim a \text{ とす}$$

$$y = \begin{bmatrix} \mu & \dots & \overset{j_1}{u} & \dots & \mu \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mu & \dots & \mu & \dots & \mu \end{bmatrix} \cdot y \leq U^k y. \quad \text{補題 2.4(1) と同様にして } U \text{ は singular.}$$

定理 3.2 と 3.4 によつて, (2.1) 式が一解をもつための十分条件は次の 2 つが成立することである.

(3.5) U が deterministic であること.

(3.6) 相異なるすべての系列 $j_1, \dots, j_k$ によつて $U_{j_1 j_2} \dots U_{j_{k-1} j_k}$ が loop free であること.

ある x が singular であるか loop free であるかを判定する際には, 次の定理が役立つことがある.

定理 3.5 x が条件 (3.3) を満たし, singular であるならば,

$A \subset \text{dom}(x)$, $Ax \subset A$, $A \neq \emptyset$ なる A が存在する.

証明. $y = xy \neq 0$, $A = \text{dom}(y)$ とおく. 補題 3.3 (2) によつて $A = \text{dom}(xy) \subset \text{dom}(x)$. 同じく (1) によつて $A \neq \emptyset$. $a \in A$ ならば $ay = axy \neq 0$. よつて $ax \in A$, $Ax = \{ax \mid a \in A\} \subset A$. ■

§ 4. 正則プログラム

Σ を有限アルファベット, w は mapping: $\Sigma \rightarrow \mathcal{E}(M)$, $I = \langle \mathcal{E}(M), w \rangle$ とおく. Σ 上の regular expression を通常のように定義する (但し ϕ の代りに 0 を用いる). I を固定したとき, regular expression α に対して, $|\alpha|_I \in \mathcal{E}(M)$ を次の規則で対応づける. [4]

$$(4.1) \quad |0|_I \equiv \mu$$

$$(4.2) \quad |\sigma|_I \equiv w(\sigma) \quad \sigma \in \Sigma$$

$$(4.3) \quad |\alpha + \beta|_I \equiv |\alpha|_I \vee |\beta|_I$$

$$(4.4) \quad |\alpha \beta|_I \equiv |\alpha|_I |\beta|_I$$

$$(4.5) \quad |\alpha^*|_I \equiv \bigvee_{t \in \mathbb{N}} (|\alpha|_I)^t, \quad \text{そこで } (|\alpha|_I)^0 \equiv \lambda.$$

このようにして定義される endomorphism $|\alpha|_I$ を正則な $7^\circ R$ グラムという (context-free expression を用いることによつて context-free program なるものと同様にして定義できる [4] [5]). $|\alpha|_I$ は特に $\mathcal{L}(w(\Sigma)^*)$ の元である.

つまりは [4] の Theorem 15 の言い換えに過ぎない.

定理 4.1 任意の regular expression α について, n ,

$\Sigma_{ij} \subset \Sigma \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad w(n \times 1)$ が存在して

$$\bigcup_{j=1}^n \Sigma_{ij} \subset \Sigma \quad i=1, \dots, n$$

$$\Sigma_{ij} \cap \Sigma_{ik} = \emptyset \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad j \neq k$$

$$U = [u_{ij}] = [\bigvee w(\Sigma_{ij})]$$

$$v = [v_i] \quad v_i = \mu \text{ or } \lambda \quad i=1, \dots, n$$

$$(U^* v)_1 = |\alpha|_I$$

(即ち $|\alpha|_I$ は方程式 (2.1) の最小解の第 1 要素に等しい).

$[a_{ij}], [x_{ij}]$ をそれぞれ M および $\Sigma(M)$ の元から成る行列
 としたとき, その積を $[a_{ij}][x_{ij}] \equiv [\sum_k a_{ik}x_{kj}]$ と定義す
 る. 更に任意の $a \in M$ と k について

$$\begin{cases} a_{k0} = [0, \dots, 0, \overset{k}{a}, 0, \dots, 0] \\ a_{k,t+1} = a_{kt} \cup \end{cases}$$

$$x = [x_1, \dots, x_n]^T = \bigcup^* v$$

とすると, 次式のように正則プロダクトの値を effective に表
 めることができる.

$$\begin{aligned} ax_k &= a_{k0}x = a_{k0}(\bigcup x \vee v) = a_{k1}x \vee a_{k0}v \\ &= a_{k1}(\bigcup x \vee v) \vee a_{k0}v = a_{k2}x \vee (a_{k1} \vee a_{k0})v \\ &= \dots \end{aligned}$$

[4] の Theorem 16 に $\neq$, 2

定理 4.2 $a|a|_I = \bigvee_{t \in \mathbb{N}} a_{1t}v.$

系 4.3 $\exists \lambda \quad a_{1,\lambda} = [0, \dots, 0] = 0$ ならば
 $a|a|_I = \bigvee_{t=0}^{\lambda-1} a_{1t}v.$

§ 5. ある言語と γ の解釈

前節までの結果を具体的なプログラムに適用する前に、まず一つの言語を示そう(但し可成り informal に)。

ミニマム

プログラムの列を次のように与える。

- (5.1) Algol の $\langle$ assignment statement $\rangle$ および $\langle$ Boolean expression $\rangle$ (特に $\langle$ relation $\rangle$) はプログラムの列である。array は 1 次元まで許す、又見易くするためには、 γ のプログラムの列をかつこでくくるとにする。

- (5.2) α, β がプログラムの列であるとき $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^*$ もそれらのプログラムの列である。

つまりプログラムの列は regular exp. である。

セマニティクス

上で用いた名前集合を D , ξ を mapping: $D \cup D \times N \rightarrow N$ とする(意味的には i は $M[i]$ の内容を $\xi(i)$, $\xi(M, \xi(i))$ が表わしている。 ξ 自身が state vector)。

$$M_0 \equiv \{ \text{すべての } \xi \} = N^{D \cup D \times N}, \quad M = \mathcal{P}(M_0)$$

とおく。 $a \in D \cup D \times N$ なるとき $\xi(a/\gamma)$ は次の η に等しい。

$$\eta(b) = \begin{cases} \xi(b) & : b \neq a \\ \gamma & : b = a. \end{cases}$$

この M における高々 1 回の endomorphism は

$$\{\xi\} \mapsto \{\eta\} \text{ の } \phi, \quad \xi, \eta \in M_0$$

なる形をしている。

解釈 $I = \langle \mathcal{E}(M), w \rangle$ を次のように定める。例えば, γ° にグラフ列が上記 (5.1) で定義されているときは

$$|i=j|_I : \{\xi\} \mapsto \{\xi(i/\xi(j))\}$$

$$|i=j|_I : \{\xi\} \mapsto \begin{cases} \{\xi\} & : \xi(i) = \xi(j) \\ \phi & : \xi(i) \neq \xi(j) \end{cases}$$

0,1) $(\alpha+\beta, \alpha\beta, \alpha^*$ の解釈は (4.1), (4.3) - (4.5) に従う (以後 I を省略する)。又本節以下では V の代りに U を用いる。

§ 6. Tree sort プログラムの正当性。

R. L. London に存らって, ここでも Floyd による Tree sort program の正当性を証明してみよう。[3][6] ただし, 正則プログラム列の形式に合わせるためと, 理解し易くするため, いくつか変更を加えてある。

shift up の正当性

ii, nn は この sub program のために local に用意した。

$$\text{select} \equiv (j=nn) + (j < nn) \{ (M[j+1] \leq M[j]) + (M[j+1] > M[j]) (j:=j+1) \}$$

$$\gamma \equiv (j:=2 \times ii) (\text{select}) (M[j] > M[ii]) (\text{exch}(M[j], M[ii])) (ii:=j)$$

$$\delta \equiv (j:=2 \times ii) \{ (\text{select}) (M[j] \leq M[ii]) + (j > nn) \}$$

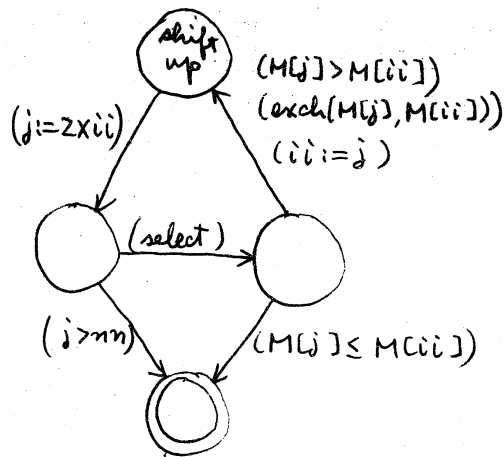
$$\text{shift up} \equiv \delta^* \delta$$

よって shift up を定義する.

$|\text{shift up}|$ は "の" の方程式の

最小解である.

$$(6.1) \quad X = |\delta|X \cup |\delta|$$



$|\delta|, |\delta|$ は simple であり, かつ, $|\delta|$ は loop free であるから (6.1) は一意解をもつ.

endomorphism y を "の" のように与える.

$\xi(M, \xi(ii)+1) \sim \xi(M, \xi(nn))$ が tree sort 中であるとき,

$y: \{\xi\} \mapsto \{\eta\}$, 但し, $\eta(M, \xi(ii))$ と ξ の子孫は

$\xi(M, \xi(ii))$ と ξ の子孫を tree sort したものである.

この y が (6.1) を満たすことを示す.

Case 1. $2 \times \xi(ii) > \xi(nn)$ のとき,

$$\begin{aligned} \{\xi\}(|\delta|y \cup |\delta|) &= \{\xi\} | (j:=2xii) \cdots | y \cup \{\xi\} | (j:=2xii) \{ \cdots \} | \\ &= \{ \xi(j/2 \times \xi(ii)) \} | (select) \cdots | y \cup \\ &\quad \{ \xi(j/2 \times \xi(ii)) \} | (select)(\cdot) + (j > nn) | \\ &= \{ \xi(j/2 \times \xi(ii)) \} = \{\xi\} y \end{aligned}$$

Case 2. $2 \times \xi(ii) < \xi(nn)$ かつ $\xi(M, 2 \times \xi(ii)+1) > \xi(M, 2 \times \xi(ii))$

かつ $\xi(M, 2 \times \xi(ii)+1) > \xi(M, \xi(ii))$ のとき,

$$\begin{aligned}
\{\xi\}(|x|y \cup |y|) &= \{\xi(j/2 \times \xi(i))\} |(\text{select}) \dots |y \cup \\
&\quad \{\xi(\dots) \} |(\text{select})(\dots) + (j > nm)| \\
&= \{\xi(j/2 \times \xi(i))\} | (j = nm) + (j < nm) \{ \dots \} | \\
&\quad \{ |(\dots) \} |y \cup |M[j] \leq M[i]\} \\
&= \{\xi(j/2 \times \xi(i))\} | (M[j+1] \leq M[j]) + (M[j+1] > M[j]) (\dots) | \\
&\quad \{ \dots \} \\
&= \{\xi(j/2 \times \xi(i))\} | j := j+1 | \{ \dots \} \\
&= \{\xi(j/2 \times \xi(i)+1)\} \{ | (M[j] > M[i]) (\dots) |y \\
&\quad \cup |M[j] \leq M[i]| \} \\
&= \{\xi(j/2 \times \xi(i)+1)\} | \text{exch}(M[j], M[i]) | i := j | y \\
&= \{\xi(j/2 \times \xi(i)+1, M[2 \times \xi(i)+1] / \xi(M, \xi(i)), \\
&\quad M[\xi(i)] / \xi(M, 2 \times \xi(i)+1), i/2 \times \xi(i)+1)\} y \\
&= \{\eta\} = \{\xi\} y.
\end{aligned}$$

以下同様にし、あらゆる場合に $\eta = \xi$

$$\{\xi\} y = \{\xi\}(|x|y \cup |y|)$$

よって、 $y = |x|y \cup |y|$ となり、(6.1) を満足する。故に

$$|\text{shift up}| = y.$$

Main program の正当性

7° 12° の Tree sort を次のように定義する。

$$\begin{cases}
 \delta_{12} \equiv (i := n+2)(nn := n) \\
 \delta_{22} \equiv (i \geq 2)(ii := i)(\text{shift up})(i := i-1) \\
 \delta_{23} \equiv (i < 2)(nn := n) \\
 \delta_{33} \equiv (nn \geq 2)(ii := 1)(\text{shift up})(\text{exch}(M[i], M[nn]))(nn := nn-1) \\
 \delta_3 \equiv (nn < 2) \\
 \text{tree sort} \equiv \delta_{12} \delta_{22}^* \delta_{23} \delta_{33}^* \delta_3
 \end{cases}$$

$|\text{tree sort}|$ は次の方程式の最小解の唯一要素である,

$$(6.2) \quad \mathcal{X} = U \mathcal{X} \cup V = \left[\begin{array}{c|c|c} M & |\delta_{12}| & M \\ \hline M & |\delta_{22}| & |\delta_{23}| \\ \hline M & M & |\delta_{33}| \end{array} \right] \mathcal{X} \cup \left[\begin{array}{c} M \\ \hline M \\ \hline |\delta_3| \end{array} \right]$$

(U, V) は simple 2" U は loop free (δ_{22}, δ_{33} が loop free である故) であるから, (6.2)式は一意的解を有する.

endomorphism y_1, y_2, y_3 をつぎのように与える.

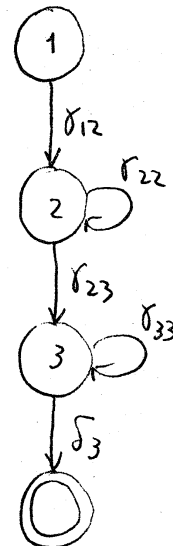
$$y_1: \{\xi\} \mapsto \{\eta\}$$

ただし $\eta(M, 1) \sim \eta(M, \xi(n))$ は $\xi(M, 1) \sim \xi(M, \xi(n))$ を sort したものの.

$\xi(M, \xi(i)+1) \sim \xi(M, \xi(n))$ が tree sort されたとき,

$$y_2: \{\xi\} \mapsto \{\eta\}$$

ただし η は上記のもの.



$\xi(M, 2) \sim \xi(M, \xi(nn))$ が tree sort であるより,
 $\max[\xi(M, 1), \dots, \xi(M, \xi(nn))] \leq \xi(M, \xi(nn)+1) \leq \dots \leq \xi(M, \xi(n))$
 なるとき,

$$y_3: \{\xi\} \mapsto \{\eta\}$$

ただし η は上記のもの.

$y = [y_1, y_2, y_3]^T$ が (6.2) をみたすとき,

第1式

$$\begin{aligned} \{\xi\} | r_{12} | y_2 &= \{\xi(i / \xi(n) \div 2)\} y_2 \\ &= \{\eta\} = \{\xi\} y_1. \end{aligned}$$

故に $y_1 = |r_{12}| y_2$.

第2式.

ξ が上に述べた条件を満たしているならば,

(a) $\xi(i) \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \{\xi\} (|r_{22}| y_2 \cup |r_{23}| y_3) &= \{\xi\} |r_{22}| y_2 \\ &= \{\xi(i \div \xi(i))\} (\text{shift up})(i := i-1) y_2 \\ &= \{\eta\} = \{\xi\} y_2. \end{aligned}$$

(b) $\xi(i) < 2$ (すなわち $= 1$) のとき

$$\{\xi\} (|r_{22}| y_2 \cup |r_{23}| y_3) = \{\xi(nn / \xi(n))\} y_3 = \{\eta\} = \{\xi\} y_2.$$

次の式

ξ が y_3 の定義に際して述べた条件を満たしているならば,

(a) $\xi(nn) \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \{\xi\}(|\delta_{33}|y_3 \cup |\delta_3|) &= \{\xi(i;1)\}(\text{shift up})(\text{exch} \dots)(nn:=nn-1)y_3 \\ &= \{\xi'\}y_3. \end{aligned}$$

ただし ξ' は次の条件を満たしている.

$$\xi'(nn) = \xi(nn) - 1$$

$$\xi'(M, \xi(nn)) = \max[\xi(M, 1), \dots, \xi(M, \xi(nn))]$$

$$\xi'(M, 2) \sim \xi'(M, \xi(nn) - 1) \text{ は tree sort されている.}$$

よって ξ' は y_3 のための条件を満たしているから,

$$\{\xi'\}y_3 = \{\eta\} = \{\xi\}y_3.$$

(b) $\xi(nn) < 2$ のとき.

$$\{\xi\}(|\delta_{33}|y_3 \cup |\delta_3|) = \{\xi\}.$$

よって $\xi(nn) = 1$ ならば条件により $\{\xi\} = \{\xi\}y_3$ (ξ 自身が sort されている).

以上まとめると $y = \cup y \cup w$. よって $|\text{tree sort}| = y_1$ となり, たしかにこれは所期の機能を持つプログラムである.

文 献

1. G. Birkhoff, Lattice Theory, AMS, Rhode Island, 1967.
2. R.W. Floyd, Assigning meanings to programs, Proc. Symp. in Applied Math., AMS, Rhode Island, 1967, 19-32.
3. 箕持彦, Tree-Sort アルゴリズムの正当性の証明について, 数理解析研究発表会予稿, 1971年3月.
4. Y. Kanayama, Fixed Point theorems for functions on σ -semilattices and their applications, Jan. 1971 (学会誌に投稿中).
5. 金山裕, 半束の自己準同射としての7°12グラフ, 通信学会全国大会, S4, 1971年4月.
6. R.L. London, Certification of algorithm 243 [M1] TREESORT3, CACM, 13 (1970), 371-373.

於 京都

March 23, 1971