

H^p 空間の実解析的構成

東北大・教養 金子 誠

1. Atomによる構成 E.M. Stein & Weiss は [16] において $R_+^{n+1} = \{(x, y) : x \in R^n, y > 0\}$ における調和函数で.

$$(1) \quad \sum_{j=0}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (j \neq k)$$

(ここで $x_0 = y$) なる $(n+1)$ 個の函数の組 $F = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ を考えた. $n=1$ の場合は, 複素上半平面における, 解析函数の, 実部と虚部の組みであり, (1) は Cauchy-Riemann の等式である.

$p_1 = (n-1)/n$ とおくならば, $S = |F|^{p_1} = (\sum_{j=0}^n |u_j|^2)^{p_1/2}$ が, 劣調和である事が重要な性質である. $p > p_1$ ならば, $\phi = p/p_1$ とおけば, $\phi > 1$ であって,

$$\int_{R^n} \{S(x, y)\}^\phi dx = \int_{R^n} |F(x, y)|^p dx.$$

従って, $\sup_{y>0} \int_{R^n} |F(x, y)|^p dx < \infty$ ならば, $S(x, y) \leq P_y * f(x)$ となる $f \in L^\phi(R^n)$ が存在する. ここで, $P_y(x)$ は, R_+^{n+1} における Poisson 核である. $f \in L^\phi(R^n)$ の

Poisson 積分 $E_y * f$ は 扱っ易い.

(1) は, F が ある調和函数の gradient である事を意味する. それより, $p \leq p_k$ なる p に対しても次のような事が考えられる.

$p_k = (n-1)/(n-1+k)$ ($k = 1, 2, \dots$) として, $(n+1)^k$ 個の函数の組 (rank k の tensor) である $F = (u_{j_1 \dots j_k})$ が次の性質を持つものとする.

$$u_{j_1 \dots j_k j_{k+1}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}} u_{j_1 \dots j_k} \quad (j_{k+1} = 0, 1, \dots, n)$$

とあくと, rank $(k+1)$ の tensor $(u_{j_1 \dots j_k j_{k+1}})$ が symmetric で trace が 0 とはる. つまり,

$$(2) \quad u_{j_1 \dots j_k j_\mu j_\nu j_{k+1}} = u_{j_1 \dots j_k j_\nu j_\mu j_{k+1}}, \quad \sum_{j=0}^n u_{j_1 \dots j_k j \hat{j}_\mu \hat{j}_\nu j_{k+1}} = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

このとき やはり $|F|^p = \left(\sum_{j_1 \dots j_k=0}^n |u_{j_1 \dots j_k}|^2 \right)^{p/2}$ が, 非調和となる. 従って, $p > p_k$ に対して, 先に述べた事と同様の性質がある. $p > p_k$ に対して, 上のような F の集合として,

$$\mathcal{F}^p = \left\{ F = (u_{j_1 \dots j_k}) \mid \|F\|_{\mathcal{F}^p} = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

とおく. [14] にも述べられているように 次の命題が成立する.

Proposition 1 $p \geq 1$ のとき $F = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{F}^p$

なる為の 必要十分条件は, $u_0 = P_j * f$, $u_j = P_j * (P_j f)$ ($j=1, \dots, n$)
 となる $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ が存在する事である. ここで $P_j f$ は, f
 の Riesz 変換である.

$\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上の調和函数 u が, $\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)|^p dx < \infty$ なら
 は, $f = \lim_{y \rightarrow 0} u(\cdot, y)$ が $\mathcal{S}'$ の意味で存在する. しかも
 u は, f によって, 完全に決, てしまう. $F = (u_{j_1 \dots j_n})$ が
 $\mathcal{H}^p$ の元ならば, $f_{j_1 \dots j_n} = \lim_{y \rightarrow 0} u_{j_1 \dots j_n}(\cdot, y)$ が定まるが,
 (2) の関係より, $u_{j_1 \dots j_n}$ は $u_{0 \dots 0}$ によって決, てしまう. そこ
 で, C. Fefferman - E. M. Stein [7] は, $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ を次のように定
 義した. $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ は, $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上の調和函数より成る集合で,

(i) $1 < p < \infty$ の場合

$$u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) \iff \|u\|_{H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})} = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, y)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

(ii) $p > p_R = (n-1)/(n-1+k)$ なる場合

$$u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) \iff \exists F = (u_{j_1 \dots j_n}) \in \mathcal{H}^p; u = u_{0 \dots 0}$$

として, この場合 $\|u\|_{H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})} = \|F\|_{\mathcal{H}^p}$

このように定義した Hardy class H^p が, 種々の形で, 特
 徴付けらる事を, C. Fefferman - E. M. Stein [7] が示した. それ
 を次の定理にまとめおく. さらに, この定理が, 上のよう
 な定義に, 矛盾の無い事を自保証する.

定理 1 u は, $\mathbb{R}_+^{n+1}$ で調和とする. このとき, 次の

(A) から (E) は同値である.

$$(A) \quad u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}).$$

$$(B) \quad u^*(x) = \sup_{|x-z|<y} |u(z,y)| \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

$$(C) \quad u^+(x) = \sup_{y>0} |u(x,y)| \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

$$(D) \quad \mathcal{S}'(u)(x) = \left(\int_{|x-z|<y} |\nabla u(z,y)|^2 y^{1-n} dz dy \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

$$\text{そして } \lim_{y \rightarrow \infty} u(x,y) = 0.$$

$$(E) \quad \mathcal{J}(u)(x) = \left(\int_0^{\infty} |\nabla u(x,y)|^2 y dy \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{そして } \lim_{y \rightarrow \infty} u(x,y) = 0.$$

先に述べたように、 $u \in H^p$ は境界値をもつ。そして定理の形で述べておく。

定理2 $u \in H^p$ ならば、 $f = \lim_{y \rightarrow 0} u(\cdot, y)$ が $\mathcal{S}'$ の意味で存在し、 f は u を決定する。

定理2における f が、実は H^p を完全に決定する。

定理3 $1 < p < \infty$, $f \in \mathcal{S}'$ に対して、次の (A) から (D) は同値となる。

$$(A) \quad u^+(x) = \sup_{y>0} |(q_y * f)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{となる。}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(x) dx \neq 0 \quad \text{なる } q \in \mathcal{S} \text{ が存在する。}$$

$$(B) \quad u^*(x) = \sup_{|x-z|<y} |(q_y * f)(z)| \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{となる。}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} q(x) dx \neq 0 \quad \text{なる } q \in \mathcal{S} \text{ が存在する。}$$

(C) 十分大なる N_0 をとり

$$\mathcal{C} \equiv \left\{ \bar{\Phi} \in \mathcal{S} : \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{N_0} \sum_{|\alpha| \leq N_0} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \bar{\Phi}(x) \right|^2 dx \leq 1 \right\}$$

とおくとき

$$f^*(x) \equiv \sup_{\bar{\Phi} \in \mathcal{C}} \sup_{|x-z| < y} |(\bar{\Phi}_y * f)(z)| \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

(D) $f = \lim_{y \rightarrow 0} u(\cdot, y)$ なる $u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ が存在する.

上の定理において, $\varphi_y(x) = y^{-n} \varphi(y^{-1}x)$ である. (Fefferman, E.M. Stein [7]) は, (C) を convolution operator の評価に用いて, その有用性を述べている.

定理より, Hardy class を, その境界値の集合としてとらえ, 次のような定義を置く.

$$H^p(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in \mathcal{S}' ; f \text{ は (A) } \sim \text{(D) のいずれかを満たす} \right\}$$

定義として, (B) を採用して, $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \equiv \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ とする事が多いようである. このように定義された $H^p(\mathbb{R}^n)$ の一つの特徴付けとして 次の事が成立する.

Proposition 2 (A. Miyachi [12], P. Sjölín [13]) $1 < p < \infty$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とすれば, $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ なることと, $R_{j_1} \cdots R_{j_n} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($j_1, \dots, j_n = 1, \dots, n$) なる事は同値である.

C. Fefferman [6] は次の事を示した.

定理 4 $(H')^* = BMO$

ここで $g \in BMO$ であるとは.

$$\|g\|_{BMO} = \sup_Q \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - c| dx < \infty$$

ここで Q は $\mathbb{R}^n$ における立方体で, c は定数である. この定義と 定理 4 とより, $f \in H'(\mathbb{R}^n)$ なる事と $f = \sum f_\alpha$, $\int_Q f_\alpha(x) dx = 0$, $\text{supp } f_\alpha \subset Q$, $\sum |Q| \|f_\alpha\|_\infty < \infty$ と書ける事とが同値である. (C. Fefferman, [2], [10] 参照)

R. R. Coifman [2], R. H. Latter [11], A. Uchiyama [19] は, 定理 3 の性質 (C) を用いて, 上の C. Fefferman の結果を constructive に証明している. α が p -atom であるとは, 或る ball B が存在して $\text{supp } \alpha \subset B$, $\|\alpha\|_\infty \leq |B|^{-1/p}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) x^\alpha dx = 0$ ($|\alpha| \leq n(\frac{1}{p} - 1)$) なる性質を持つ事である. Coifman-Latter-Uchiyama の結果は 次の通りである.

定理 5 $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ なる事と $f = \sum_j \lambda_j g_j$, g_j は p -atom, $\sum |\lambda_j|^p < \infty$ と書ける事は同値である. そして

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \approx \inf \{ (\sum |\lambda_j|^p)^{1/p}, f = \sum \lambda_j g_j, g_j \text{ は } p\text{-atom}, \sum |\lambda_j|^p < \infty \}$$

なお, $H^p(\mathbb{R}^n)$, $p < 1$, の dual が Lipschitz class Λ_α , $\alpha = n(\frac{1}{p} - 1)$, である事は Duren-Romberg-Shields [5] (Duren [4] 参照), A. P. Fragier [8], T. Walsh [20] が示している.

2. Atom の一般化 R.R. Coifman-G. Weiss [3] は (p, ℓ) -atom, $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$, $p \neq \ell$, なるものと次のように定義した。或る ball B が存在し, $\text{supp } a \subset B$, $(\frac{1}{|B|} \int_B |a(x)|^\ell dx)^{1/\ell} \leq |B|^{-1/p}$, $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx = 0$ となること。 a は (p, ℓ) -atom であると定義する。この定義においては a の定義2 d である空間が $\mathbb{R}^n$ である必要はなく、適当な距離と測度があればよく、実際、[3]においては homogeneous type の空間において議論を展開している。

M.H. Taibleson-G. Weiss [18] は $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$, $p \neq \ell$, $s \geq [n(\frac{1}{p}-1)]$ なる p, ℓ, s に対して a が (p, ℓ, s) -atom であるとは、或る ball B が存在して $\text{supp } a \subset B$, $(\frac{1}{|B|} \int_B |a(x)|^\ell dx)^{1/\ell} \leq |B|^{-1/p}$, $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) x^\alpha dx = 0$ ($|\alpha| \leq s$) となる事であると定義した。

1 に於て $H^p(\mathbb{R}^n)$ を $\mathcal{S}$ の双対空間 $\mathcal{S}'$ の中で構成した atom による Hardy class を Lipschitz space の双対空間の中で考える。その為に S. Campanato [1] が導入した空間を考える。局所可積分函数 f で

$$|f|_{\eta, \ell', s} = \sup_B \frac{1}{|B|^\eta} \inf_{P \in \mathcal{P}_s} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f - P|^\ell dx \right)^{1/\ell} < \infty$$

なるものの全体を $\mathcal{L}(\eta, \ell', s)$ と書く。ここで $\eta > 0$, $1 \leq \ell' \leq \infty$, $s \geq 0$ は整数である。 $\mathcal{P}_s$ は s 次以下の多項式全体。

$\mathcal{L}(\eta, \omega, s_0) \subset \mathcal{L}(\eta, \ell', s)$, $1 \leq \ell' \leq \infty$, $s_0 \leq s$, であり.
 a が (p, ℓ, s) -atom で, $f \in \mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell'} = 1$,
 ならば, $a \cdot f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり, a に対応する support を B と
 すれば,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} a \cdot f \, dx \right| \leq |B| \left(\frac{1}{|B|} \int_B |a|^{\ell} \, dx \right)^{1/\ell} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f-P|^{\ell'} \, dx \right)^{1/\ell'}$$

($P \in \mathcal{P}_s$) である.

$\left| \int_{\mathbb{R}^n} a \cdot f \, dx \right| \leq \|f\|_{\frac{1}{p}-1, \ell', s} \leq \|f\|_{\frac{1}{p}-1, \infty, s_0}$
 ($s \geq s_0 = \lfloor n(\frac{1}{p}-1) \rfloor$). ここで, $\mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s) = \mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s)/\mathcal{P}_s$
 とおけば, (p, ℓ, s) -atom a は, $\mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \infty, s_0)^*$ の元と見做し
 てよい. (実際は, $\mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s)^*$ と見做せる事を示したので
 あるが.) この事より,

$$H^{p, \ell, s} = \left\{ f \in \mathcal{L}(\frac{1}{p}-1, \ell', s_0)^* ; f = \sum \lambda_j g_j, g_j \text{ は } (p, \ell, s)\text{-atom,} \right.$$

$$\left. \text{そして } \sum |\lambda_j|^p < \infty \right\}$$

と定義する. 1. の定理 5 は $H^p(\mathbb{R}^n) = H^{p, \infty, s_0}$ を示している.

Taibleson-Klein [8] は, (p, ℓ, s) -atom 及び (p, ∞, s) -atom によ
 り (p, ℓ, s_0) -atom 及び (p, ℓ, s) -atom に分解できる事を直
 接構成する方法で示している. そして次の結果を述べて
 いる.

定理 6. $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$, $p \neq \ell$, $s \geq s_0 = \lfloor n(\frac{1}{p}-1) \rfloor$ のとき $H^{p, \ell, s} = H^{p, \infty, s_0}$

特異積分等の像を とらえる為に Coifman-Weiss [3] は molecule の概念を導入した. 更に Taibleson-Weiss [18] は $\mathcal{D}$ を拡張して 次のような定義を与えている. $M \in L^p(\mathbb{R}^n)$ が $(p, \ell, s, \varepsilon)$ -molecule であるとは, 或る $x_0 \in \mathbb{R}^n$ があって

$$\|M\|_{\ell}^{a/\varepsilon} \cdot \|M(x)|x-x_0|^{-n\ell/(1-a/\varepsilon)}\|_{\ell} < \infty$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} M(x)x^\alpha dx = 0 \quad (|\alpha| \leq s)$$

が成り立つ事である. ここで $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$, $p \neq \ell$, $s \geq s_0 = [n(\frac{1}{p}-1)]$, $\varepsilon > \max\{\frac{1}{p}-1, \frac{s}{n}\}$, $a = 1 + \varepsilon - \frac{1}{p}$, $b = 1 + \varepsilon - \frac{1}{\ell}$.

同様の定義を. 筆者は 10月の 実解析セミナーで 与えたのであるが. その定義では $\ell = \infty$ の場合が除かれるので. 定義としては 上の定義の方が良い. 実解析セミナーでは $M^+(x) \equiv \sup_{y>0} |(M * \varphi_y)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$ となる事より $M \in H^p(\mathbb{R}^n)$ を示したのであるが. Taibleson-Weiss は $(p, \ell, s, \varepsilon)$ -molecule M が (p, ℓ, s) -atom に分解できる事を 直接示して 次の結果を得ている.

定理 7 $0 < p \leq 1 \leq \ell \leq \infty$, $p \neq \ell$, $s \geq s_0$ とし ておくと M が $(p, \ell, s, \varepsilon)$ -molecule ならば $M \in H^{p, \ell, s}$.

この結果乙. 定理 6 とより M が $(p, \ell, s, \varepsilon)$ -molecule ならば $M \in H^p(\mathbb{R}^n)$ が得られる.

$\ell = 2$ の場合が 応用上 最も重要である.

molecule が $H^p(\mathbb{R}^n)$ に入る事を 別の方法で示しておく.

Proposition 3 $0 < p \leq 1 \leq \theta \leq \infty$, $p \neq \theta$, $\varepsilon > \frac{1}{p} - 1$, $s_0 = [n(\frac{1}{p} - 1)]$ とする. M が $(p, \theta, s_0, \varepsilon)$ -molecule ならば, $M \in H^p(\mathbb{R}^n)$.

実解析セミナーでは, $\theta = 1$ の場合を省いたが, $\theta = 1$ の場合も正しい.

Prop 3 の証明 定理 3 より, $0 \leq \varphi \in \mathcal{D}$, $\text{supp } \varphi \subset \{|x| \leq 1\}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ なる φ をとり

$$M^\dagger(x) \equiv \sup_{t>0} |(\varphi_t * M)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

を示せばよい.

$$\|M\|_\theta^{a/\theta} \cdot \|M(x)|x|^{-n\theta}\|_\theta^{1-(a/\theta)} \leq 1$$

としておく. $\forall t > 0$ に対して.

$$\begin{aligned} (\varphi_t * M)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} M(z) \varphi_t(x-z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} M(z) \left\{ \varphi_t(x-z) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} ((-z \cdot \nabla)^k \varphi_t)(x) \right\} dz \end{aligned}$$

と表わされる. M^* を M の Hardy-Littlewood の max. ft. とすれば, 最初の等式より,

$$M^\dagger(x) \leq M^*(x).$$

次に, $K_t(x, z) \equiv \varphi_t(x-z) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} ((-z \cdot \nabla)^k \varphi_t)(x)$ とおき, 二番目の等式より,

$$\begin{aligned} (\varphi_t * M)(x) &= \left(\int_{|z| < r} + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j-1}r \leq |z| < 2^j r} \right) M(z) K_t(x, z) dz \\ &\equiv I^t(x) + \sum_{j=1}^{\infty} J_j^t(x) \end{aligned}$$

とおく. $r > 0$ は後で定めることとし.

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \{M^+(x)\}^p dx &\leq \int_{|x| < 2r} \{M^*(x)\}^p dx \\
 &\quad + \int_{|x| \geq 2r} \left\{ \sup_{t>0} |I^t(x)| \right\}^p dx \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{|x| \geq 2^{j+1}r} + \int_{2^j r \leq |x| < 2^{j+1}r} \right) \left\{ \sup_{t>c} |\bar{J}_j^t(x)| \right\}^p dx \\
 (1) \quad &\equiv K_1 + K_2 + \sum_{j=1}^{\infty} (K_3^j + K_4^j)
 \end{aligned}$$

とおく. $|K_\varepsilon(x, z)| \leq c |z|^{s_0+1} |x|^{-n-s_0-1}$ ($|x| > 2|z|$, $0 < \varepsilon < \infty$) なる事より.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad |I^t(x)| &\leq c \|M\|_f r^{s_0+1+n/\delta'} |x|^{-n-s_0-1} \quad (|x| \geq 2r, t > 0). \\
 |\bar{J}_j^t(x)| &\leq c |x|^{-n-s_0-1} (2^j r)^{s_0+1-n\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |M(z)| |z|^{n\delta} |t|^\varepsilon dz \right)^{1/\delta} \\
 (3) \quad &\leq c |x|^{-n-s_0-1} (2^j r)^{s_0+1-n\varepsilon} \|M\|_f^{-a/(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})} \\
 &\quad (|x| \geq 2^{j+1}r, t > c).
 \end{aligned}$$

また, $|(\mathcal{E} \cdot \nabla)^k \varphi_\varepsilon(x)| \leq c |y|^k |x|^{-n-k}$ なる事から, $|K_\varepsilon(x, z)| \leq \varphi_\varepsilon(x-z) + c \sum_{k=0}^{s_0} |y|^k |x|^{-n-k}$. $M_0(x) \equiv M(x) |x|^{n\delta}$ とおける.

$$(4) \quad |\bar{J}_j^t(x)| \leq c (2^j r)^{-n\delta} M_0^*(x) + c \sum_{k=0}^{s_0} |x|^{-n-k} (2^j r)^{k-n\varepsilon} \|M\|_f^{-a/(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})}$$

K_1 については, $\delta \neq 1$ の場合は, $\max. f_\delta$ の L^{δ} -有界性より

$$K_1 \leq c \left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})} \|M\|_f \right)^p \quad \text{が得られる. } \delta = 1 \text{ の場合は, } p < 1$$

に注意すれば, $K_1 \leq c r^{n(1-p)} \|M\|_1^p$. 従って, $1 \leq \delta \leq \infty$ に對して

$$K_1 \leq c \left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})} \|M\|_f \right)^p$$

が得られる. K_2 に対しては, (2) を用いて

$$K_2 \leq c \left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{\delta})} \|M\|_f \right)^p$$

が, $p(n+s_0+1) > n$ なる事より得られる. K_3^j には (3) を用いて

$K_3^j \leq c \left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} 2^{-pan_j}$ が得られる。 $R = 1 + \varepsilon - \frac{1}{p} > 0$ なる事より。

$$\sum_{j=1}^{\infty} K_3^j \leq c \left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

K_4^j に対しては、先ず (4) より

$$\begin{aligned} K_4^j &\leq c (2^j r)^{-npq} \int_{|x| < 2^{j+1} r} \{M_\varepsilon^*(x)\}^p dx \\ &\quad + c \sum_{k=0}^{s_0} (2^j r)^{p(k-n\varepsilon)} \|M\|_q^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \int_{2^k r \leq |x| < 2^{j+1} r} |x|^{-p(n+k)} dx \\ &= L_1 + L_2 \end{aligned}$$

とおく。 $L_2 \leq c \left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (1 + \log 2^j) 2^{-pan_j} L_1^{1/2}$
 関しては、 K_1 の場合と同様にして $L_1 \leq c \left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} 2^{-npaj}$ が得られる。ゆえに

$$\sum_{j=1}^{\infty} K_4^j \leq c \left(r^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|M\|_q \right)^{-pa/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} r^{-1/n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

以上の評価を (1) に用いて、 $r = \|M\|_q$ とすれば

$$\int_{R^n} \{M^+(x)\}^p dx \leq c \text{ が得られる。 (f.e.d.)}$$

3. 応用例 atom と molecule の議論を Riesz-Bockner 平均に適用することが出来る。 multiplier operator S^δ , $\delta > 0$, 上 $(S^\delta f)^\wedge(\xi) = (1 - |\xi|^2)_+^\delta \hat{f}(\xi)$ により定義すれば、次の事が成立する。

定理 8 (i) $0 < p \leq 1$, $\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ ならば。

S^δ は $H^p(R^n)$ から $H^p(R^n)$ への有界作用素である。

(ii) $0 < p \leq 1$, $\delta \leq \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ ならば、 $S^\delta f \notin H^p(R^n)$

となる $f \in H^p(R^n)$ が存在する。

証明 (i) a が $(p, 2, s_0)$ -atom で、対応する ball を $B \equiv B(x, r)$, 原点を中心の半径が r の ball, とし. $S^\delta a$ が molecule とする事を示す.

$$K(x) \equiv 2^{\delta+(n/2)} \pi^{n/2} \Gamma(\delta+1) J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi|x|) (2\pi|x|)^{-\frac{n}{2}-\delta} \text{ とおける.}$$

$$(S^\delta a)(x) = (K * a)(x).$$

$$1 + \frac{s_0}{n} \leq \frac{1}{p} < 1 + \frac{s_0+1}{n}, \quad \frac{n-1}{2} + s_0 < \delta \leq \frac{n-1}{2} + s_0 + 1,$$

$$\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$$

としておく. 先ず

$$(1) \quad \|S^\delta a\|_2 \leq \|a\|_2 \leq C r^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}$$

$$\left(\int_{|x| \leq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})} dx \right)^{1/2} \leq C r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})} \|S^\delta a\|_2$$

$$(2) \quad \leq C r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})}$$

$\left(\int_{|x| \geq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})} dx \right)^{1/2}$ の評価をする. $\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ であるから $\frac{1}{n}(\delta - \frac{n-1}{2}) > \varepsilon > \frac{1}{p} - 1$ なる $\varepsilon > 0$ をとておく. $|y| < r$ に対して $|K(x-y)| \leq C |x-y|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{2}} \leq C |x|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{2}}$ なる事より.

$$(3)' \quad |(S^\delta a)(x)| \leq C |x|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{2}} \|a\|_1 \leq C r^{n(1-\frac{1}{p})} |x|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{2}}$$

$$(3) \quad \int_{|x| \geq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{2})} dx \leq C r^{2n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})-2(\delta-\frac{n+1}{2})}$$

また a が多項式と直交する事より $(S^\delta a)(x) = \int_{|y| < r} a(y) \cdot \{ K(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} (y \cdot \nabla)^k K(x) \} dy$ として $K(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} (y \cdot \nabla)^k K(x) = O(|y|^{s_0+1} |x|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{2}})$ であるから

$$(4)' \quad |(S^\delta a)(x)| \leq C |x|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{2}} \int_{|y| < r} |y|^{s_0+1} |a(y)| dy \leq C r^{s_0+1+n-\frac{n}{p}} |x|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{2}}$$

$$(4) \quad \int_{|x| \geq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} dx \leq C r^{2n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})+2(\frac{n+1}{2}+\delta_0+1-\delta)}$$

$r \geq 1$ の場合は (3) を、 $r \leq 1$ の場合は (4) を用いて、

$$\left(\int_{|x| \geq 2r} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} dx \right)^{1/2} \leq C r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})}$$

従って、(2) の評価とより

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} dx \right)^{1/2} \leq C r^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})}$$

ここで (1) とより

$$\|S^\delta a\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(S^\delta a)(x)| |x|^{n(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} dx \right)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})/2(1+\varepsilon-\frac{1}{p})} \leq C.$$

$$(3)', (4)' \text{ とより } |(S^\delta a)(x)| \leq C |x|^{-\frac{(n+1)/2-\delta}{1+\varepsilon-\frac{1}{p}}} \quad (|x| \geq 2r). \text{ 従って}$$

$$\text{て } |(S^\delta a)(x)| |x|^{s_0} \leq C |x|^{-n-(\delta-s_0-\frac{n+1}{2})} \quad (|x| \geq 2r). \quad \forall \varepsilon > 0, |x|$$

$\leq s_0$ かつ $\alpha \geq \beta$ として、 $(S^\delta a)(x) \cdot x^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であるから、

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\alpha (S^\delta a)(x) dx = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha (S^\delta a)^\wedge(0) = 0.$$

従って、 $S^\delta a$ は $(p, 2, \varepsilon)$ -molecule である。

$$(ii) \quad \widehat{\varphi}_1(\xi) = 1 \quad (|\xi| \leq 1), \quad \text{supp } \widehat{\varphi}_2(\xi) \subset (|\xi| \leq \frac{1}{2})$$

かつ $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ とし、 $f \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ とおけば、 $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ 。そして、 $S^\delta f = S^\delta \varphi_1 - S^\delta \varphi_2$ 、 $(S^\delta \varphi_2)^\wedge(\xi) = (1-|\xi|^2)^\delta \widehat{\varphi}_2(\xi)$

であるから $S^\delta \varphi_2 \in \mathcal{S}$ 。一方、 $S^\delta \varphi_1(x) = K(x) \notin L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\left(\delta \leq \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2} \right). \quad (\text{f. e. d.})$$

定理 8 の (i) は、Prop. 2 を用いて、Fefferman-Stein [7] の Th. 10 によって得られる。また、A. Miyachi [12] の Th. 1', 2' と interpolation によって得られる。

定理 8 に関連した結果が [15] に報告されている。

$\delta > 0$, $R > 0$ とし. multiplier operator S_R^δ を

$$(S_R^\delta f)^\wedge(\xi) = \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)_+^\delta \hat{f}(\xi)$$

で定義し. その max. operator S_*^δ を

$$(S_*^\delta f)(x) = \sup_{R>0} |(S_R^\delta f)(x)|$$

で定義する.

定理 8 の (i) は. $0 < p \leq 1$, $\delta > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ のとき.

$\|S_R^\delta f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}$, C は R に無関係, とする事を示している. Stein-Taibleson-Weiss は [15] で. 次の結果を報告している.

定理 9 $0 < p < 1$, $\delta = \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$ のとき.

$$\exists C; |\{x; (S_*^\delta f)(x) > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}\right)^p \quad (\lambda > 0, f \in H^p(\mathbb{R}^n))$$

この証明を試みたので. ϕ を紹介する. [15] で述べられているように. 次の Lemma を示す.

Lemma $0 < p < 1$, non-negative f.f. g_j と positive number c_j が. $|\{x; g_j(x) > \lambda\}| \leq \lambda^{-p} \quad (\lambda > 0, j=1, 2, \dots)$, $\sum_{j=1}^\infty c_j^p \leq 1$ であるならば.

$$|\{x; \sum_{j=1}^\infty c_j g_j(x) > \lambda\}| \leq \frac{2-p}{1-p} \lambda^{-p} \quad (0 < \lambda < \infty)$$

証明 (E.M. Stein - N.J. Weiss, On the convergence of Poisson integrals. Trans. A.M.S. 140 (1969) p.37 Lemma 2.3 の手法による.) $\lambda > 0$ を与えておく. u_j, v_j を次のように定義する.

$$u_j(x) = g_j(x), \text{ if } g_j(x) > \lambda/c_j, = 0, \text{ if } g_j(x) \leq \lambda/c_j$$

$$v_j(x) = f_j(x) - u_j(x)$$

すなわち $(\sum g_j u_j = 0) \cap (\sum g_j v_j \leq \lambda) \subset (\sum g_j f_j \leq \lambda)$. 同様にして

$$(1) \quad |(\sum g_j f_j > \lambda)| \leq |(\sum g_j u_j > 0)| + |(\sum g_j v_j > \lambda)|$$

$$\text{また } (\sum g_j u_j > 0) \subset \bigcup_j (u_j > 0) = \bigcup_j (f_j > \lambda/g_j),$$

$$|(\sum g_j u_j > 0)| \leq \sum_j |(\sum g_j u_j > 0)| \leq \sum_j \lambda^{-p} g_j^p. \text{ 同様にして}$$

$$(2) \quad |(\sum g_j u_j > 0)| \leq \lambda^{-p} \sum g_j^p \leq \lambda^{-p}$$

$$\text{また } (v_j > t) = \emptyset \quad (t \geq \lambda/g_j), \quad (v_j > t) = (t < f_j \leq \lambda/g_j) \subset$$

$$(f_j > t) \quad (t < \lambda/g_j). \text{ 従って}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_j(x) dx &= \int_0^\infty |(v_j > t)| dt \leq \int_0^{\lambda/g_j} |(f_j > t)| dt \\ &\leq \int_0^{\lambda/g_j} t^{-p} dt = (1-p)^{-1} \left(\frac{\lambda}{g_j}\right)^{1-p} \end{aligned}$$

従って

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \sum g_j v_j(x) dx \leq \frac{\lambda^{1-p}}{1-p} \sum g_j^p \leq \frac{\lambda^{1-p}}{1-p}$$

$$(1), (2), (3) \text{ より } |(\sum g_j f_j > \lambda)| \leq \frac{2^{-p}}{1-p} \lambda^{-p} \text{ が得られる. (f.e.d.)}$$

定理 9 の証明 $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ とす。これは $f = \sum g_j a_j$,

$\sum |g_j|^p < 2 \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}^p$, a_j は (p, ω, s_0) -atom, と表わされるから

Lemma 8 より (p, ω, s_0) -atom a に対して

$$(*) \quad |\{x; (S_*^\varepsilon a)(x) > \lambda\}| \leq A \lambda^{-p} \quad (0 < \lambda < \omega)$$

が示さなければならない。ここで A は n, p のみに関係する

定数である。

$\operatorname{supp} a \subset \{|x| \leq r\}$, $\|a\|_\infty \leq r^{-n/p}$, $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) x^\alpha dx = 0$ ($|\alpha| \leq s_0$) として $(*)$ を示せば十分である。

$\delta > (n-1)/2$ であるから

$$(1) \quad (S_{\star}^{\delta} a)(x) \leq c a^{\star}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

$$K(x) = 2^{\delta+(n/2)} \pi^{n/2} \Gamma(\delta+1) J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi|x|) (2\pi|x|)^{-\frac{n}{2}-\delta}, \quad K_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} K(\varepsilon^{-1}x)$$

とす。 $(S_R^{\delta} a)(x) = (K_{R^{-1}} \star a)(x)$. $|x| \geq 2r$ に対して $(K_{R^{-1}} \star a)(x)$ を評価する。

$$\begin{aligned} (K_{R^{-1}} \star a)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K_{R^{-1}}(x-y) a(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ K_{R^{-1}}(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} ((-y \cdot \nabla)^k K_{R^{-1}})(x) \right\} a(y) dy \end{aligned}$$

と表わす。 $R^{-1} > |x| - r$ の場合 $K_{R^{-1}}(x, y) = K_{R^{-1}}(x-y) - \sum_{k=0}^{s_0} \frac{1}{k!} ((-y \cdot \nabla)^k K_{R^{-1}})(x) = \frac{1}{(s_0+1)!} ((-y \cdot \nabla)^{s_0+1} K_{R^{-1}})(x - \varepsilon y)$, $0 < \varepsilon < 1$, とあるから $|y| < r$ に対して $|K_{R^{-1}}(x, y)| \leq c |y|^{s_0+1} R^{n+s_0+1} \leq c |y|^{s_0+1} |x|^{-n-s_0-1}$ である。

$$\begin{aligned} |K_{R^{-1}} \star a(x)| &\leq c |x|^{-n-s_0-1} \int_{|y| < r} |y|^{s_0+1} |a(y)| dy \\ (2) \quad &\leq c r^{s_0+1+n-(n/p)} |x|^{-n-s_0-1} \leq c |x|^{-n/p} \quad (R^{-1} > |x| - r) \end{aligned}$$

$R^{-1} \leq |x| - r$ の場合。 先ず $|K_{R^{-1}}(x-y)| \leq c R^n (R|x-y|)^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \leq c R^{\frac{n+1}{2}-\delta} |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}$ ($|y| < r$) なる事より

$$\begin{aligned} |K_{R^{-1}} \star a(x)| &\leq c R^{\frac{n+1}{2}-\delta} |x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \int_{|y| < r} |a(y)| dy \\ (3) \quad &\leq c (Rr)^{-(\delta-\frac{n+1}{2})} |x|^{-\frac{n+1}{2}} \quad (R^{-1} \leq |x| - r) \end{aligned}$$

もう一つの評価として $|K_{R^{-1}}(x, y)| \leq c |y|^{s_0+1} R^{n+s_0+1} (R|x-\varepsilon y|)^{-\frac{n+1}{2}-\delta} \leq c |y|^{s_0+1} R^{-\delta+\frac{n+1}{2}+s_0} |x|^{-\delta-\frac{n+1}{2}}$ ($|y| < r$) を用いて

$$(4) \quad |K_{R^{-1}} \star a(x)| \leq c (Rr)^{\frac{n+1}{2}+s_0+1-\delta} |x|^{-\frac{n+1}{2}} \quad (R^{-1} \leq |x| - r)$$

$(n-1)/2 < \delta < (n-1)/2 + s_0 + 1$ であるから $Rr \geq 1$ のとき (3)

$Rr \leq 1$ のときは (4) を用いて.

$$(5) \quad |(K_{Rr} * A)(x)| \leq c |x|^{-\frac{n}{p}} \quad (Rr \leq |x| - r).$$

(2) と (5) より, $(S_*^\delta A)(x) \leq c |x|^{-n/p} \quad (|x| \geq 2r).$ 従って,

$$(6) \quad \{x; |x| \geq 2r, (S_*^\delta A)(x) > \lambda\} \leq c \lambda^{-p}.$$

また, (1) より

$$\begin{aligned} \int_{|x| < 2r} \{(S_*^\delta A)(x)\}^p dx &\leq c r^{n(1-\frac{p}{2})} \|S_*^\delta A\|_2^p \\ &\leq c r^{np(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|A\|_2^p \leq c r^{np(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} r^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} = c. \end{aligned}$$

よって, $\{x; |x| < 2r, (S_*^\delta A)(x) > \lambda\} \leq c \lambda^{-p}$. 以上 (6) と 併せて,

$\{x; (S_*^\delta A)(x) > \lambda\} \leq A \lambda^{-p}$ と (*) が得られる. (f.e.d.)

参考文献

1. S. Campanato, Proprietà di una famiglia di spazi funzionali. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18 (1964) 137-160.
2. R.R. Coifman, A real variable characterization of H^p . Studia Math. 51 (1974) 269-274.
3. R.R. Coifman and G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. Bull. A.M.S. 83 (1977) 569-645.
4. P.L. Duren, Theory of H^p spaces. Academic Press (1970)
5. P.L. Duren, B.W. Romberg and A.L. Shields, Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$. J. Reine Angew. Math.

238 (1969)

6. C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation.
Bull. A.M.S. 77 (1971) 587-588.
7. C. Fefferman and E.M. Stein, H^p spaces of several variables.
Acta Math. 129 (1972) 137-193.
8. A.P. Frasier, The dual space of H^p of the polydisc for $0 < p < 1$. Duke Math. J. 39 (1972) 369-379.
9. B. Grerholm, On the structure of the spaces $L_k^{p,\lambda}$.
Math. Scand. 26 (1970) 241-254.
10. C. Herz, H^p spaces of martingales, $0 < p \leq 1$. Z.W. 28 (1974) 189-205.
11. R.H. Latter, A characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$. In terms of atoms. Studia Math. 62 (1978) 93-101.
12. A. Miyachi, Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$. Preprint
13. P. Sjölén, An H^p inequality for strong singular integrals.
Math. Z. 165 (1979) 231-238.
14. E.M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton (1970).
15. E.M. Stein, M.H. Taibleson and G. Weiss, Weak Type estimates for maximal operators on certain H^p classes
Notice A.M.S. 26 (1979) No. 6 A.548.

16. E. M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables I. *Acta Math.* 103 (1960) 25-62.
17. E. M. Stein and N. J. Weiss, On the convergence of Poisson integrals. *Trans. A. M. S.* 140 (1969) 35-54.
18. M. H. Taibleson and G. Weiss, The molecular characterization of certain Hardy spaces. Preprint.
19. A. Uchiyama, On the characterization of $H^p(\mathbb{R}^n)$ with atoms. Preprint.
20. T. Walsh, The dual of $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ for $p < 1$. *Canad. J. Math.* 25 (1973) 567-577.