

Doob: Elementary Gaussian Processes について.

神大 理 西尾 真喜子

§1. 序

Doob は表記論文で、定常正規マルコフ過程 (t. h. G. M.) の構造を与え、と共に、 N 重マルコフの条件と spectral 測度により与えられる。これらの方向の研究は、Hida, Levinson, Dym, McKean, Okabe 等により、発展させられてゐる。この講究録でも見られる通りである。Doob の論文の紹介は今更という感じがしないうえ、無限重マルコフに対する一つの手がかりを与える可能性もある存にも、思われる。

$X = \{X(t), t \in T\}$ と N 次元定常正規過程 (t. h. G.) で
 $EX(t) = 0, \quad R_{ij}(t) = E(X_i(0)X_j(t)).$ とする。

定義. X と Y は N 次元 t. h. G とする。適当な non-singular matrix B で $X(t) = BY(t) \quad \forall t \in T$ とするとき X と Y は equivalent と云う。 $X \sim Y$ と記す。(以下断わらないうに "=" は a. a. の意味)。

定義. $X, Y, Z \in \mathcal{L}(d_1, d_2, d_1+d_2)$ の t. h. G とする。
 $Z \sim \{(X_1(t), \dots, X_{d_1}(t), Y_1(t), \dots, Y_{d_2}(t)), t \in T\}$ の
 時 Z は X と Y の direct product と言う。

定義. X が degenerate t. h. G とは, 適当な $(C_1, \dots, C_N) \neq 0$
 として $\sum_{i=1}^N C_i X_i(t) = 0 \quad \forall t \in T$ と出来る。

定義. X が deterministic とは $\{X_i(t), t \leq s, i=1 \dots N\}$
 から張られる closed linear manifold が s に無関係。

§ 2. $T = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ i. e. discrete time parameter.

次の五つの type の elementary t. h. G を定義する。

$$M(0) \text{ type} \Leftrightarrow X(n) = 0, \quad n \in T. \quad (-\mathcal{L}\mathbb{Z})$$

$$M(1) \text{ type} \Leftrightarrow X(n) = X(n-1), \quad n \in T. \quad (-\mathcal{L}\mathbb{Z})$$

$$M(-1) \text{ type} \Leftrightarrow X(n) = -X(n-1), \quad n \in T. \quad (-\mathcal{L}\mathbb{Z})$$

$$M(e^{i\theta}) \text{ type} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1(n) = X_1(0) \cos n\theta - X_2(0) \sin n\theta \\ X_2(n) = X_1(0) \sin n\theta + X_2(0) \cos n\theta \end{cases} \quad (=\mathcal{L}\mathbb{Z})$$

$$n \in T, X_1(0) \perp X_2(0)$$

$$M\text{-type} \Leftrightarrow X(n) = \sum_{m=0}^{\infty} A^m \gamma(n-m) \quad n \in T,$$

($\gamma = \{\gamma(n), n \in T\}$ は独立な t. h. G)
 (A は $N \times N$ 行列)

$X \in \text{t. h. G. M.}$ とする。

$$\begin{aligned} E(X(n)/X(k), k \leq n-1) &= E(X(n)/X(n-1)) \\ &= AX(n-1) \quad \forall n \in T \end{aligned}$$

となる行列 A がある。 A は X の transition matrix と云う。 従って $\gamma(n) \equiv X(n) - AX(n-1)$ は $\{X(k), k \leq n-1\}$ と独立となる。

$$(1) \quad X(n) = \gamma(n) + A\gamma(n-1) + \dots + A^{n-v-1}\gamma(v+1) + A^{n-v}X(v).$$

$$(2) \quad R(n) = E(X(0) \cdot A^n X(0)) = R(0) A^n.$$

即ち、 X の法則は $R(0)$, A により定まる。

Proposition 1。 $X \in \text{t. h. G. M.}$ とする

(i) X は $M(0)$ と non-degenerate t. h. G. M. との direct product.

(ii) X は non-degenerate 且 deterministic とは X は $M(1)$, $M(-1)$, $M(e^{i\theta})$ の direct product

(iii) X は non-degenerate とは X は non-degenerate & deterministic な t. h. G. M. と M -type の direct product.

(i) $R(0)$ は symmetric non-negative definite の $\mathbb{R}$,
適当な real orthogonal matrix B による

$$B R(0)^t B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & c_1 & \\ 0 & & & c_l \end{pmatrix} \quad \text{と表す。}$$

$$B X(n) \equiv Y(n) \quad \text{とすれば} \quad E Y(n) \cdot Y(n) = B R(0)^t B.$$

従って, $Y_1(n) = \dots = Y_{N-l}(n) = 0$, $(Y_{N-l+1}, \dots, Y_N)$ は
non-degenerate.

(ii). 必要ならば equivalent な t.h. $\mathbb{Q}$. $M \in \mathbb{R}^3$ があるに よる,

$$R(0) = I \quad \text{と (2.5.1)}. \quad \text{deterministic より} \quad X(n) = A X(n-1)$$

$$\therefore R(0) = A R(0)^t A \quad \text{即ち, } A \text{ は orthogonal matrix.}$$

更に必要ならば equivalent な t.h. $\mathbb{Q}$. $M \in \mathbb{R}^3$ があるに よる

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

と (2.5.1). 1 の成分は $M(1)$, -1 の成分には $M(-1)$,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{には } M(e^{i\theta}) \quad \text{が対応する。}$$

(iii) (i) より

$$E(X(n) | X(k), k \leq l) = A^{n-l} X(l).$$

martingale の収束定理より, 左辺は $l \rightarrow -\infty$ の時, 収束す

3. $Z(n)$ とすれば

$$Z(n) = \lim_{l \rightarrow \infty} A^{n-l} X(l) = A^n \lim_{l \rightarrow \infty} A^{-l} X(l) = A^n Z(0)$$

$$(3) \quad X(n) = \sum_{i=-\infty}^n A^{n-i} \gamma(i) + Z(n). \quad (\text{各項は独立}).$$

(i): (3) の分解で, M -type の部分と Z は共に同じ A を, transition matrix にしてゐるが, 次の意味で 絶対値が 1 より小さい固有値の部分と, 1 の部分とに分れる。

(3) より, 独立な Gaussian system $\{\xi, \xi(n), n=0, \pm 1, \dots\}$,
 $E \xi \cdot \xi = E \xi(n) \cdot \xi(n) = I$, と $N \times N$ 行列 S, T ;

$$S = \begin{pmatrix} * & 0 \\ - & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad (i.e.)$$

$$(3') \quad X(n) = \sum_{m=0}^{\infty} A^m S \xi(n-m) + A^n T \xi$$

とかける。更に $A \cdot S = \tilde{A} \cdot S$, $A T = \tilde{A} T$ 且
 $|\tilde{A}|$ の固有値 < 1 , $|\tilde{A}|$ の固有値 $= 1$ とする $\tilde{A}$, $\tilde{A}$
 がある。更に (3') は, S と T の形より direct product.

Prediction error $E(X(n) - A X(n-1))^2 = S^2$. とする。

Non Markov。 $\{Y(n), n=0, \pm 1, \dots\}$ は一次定常 t. h. G. 7" $E Y(n) = 0$, $E Y^2(n) = v > 0$, とする (i.e. M(0) type 7" 7" 7")。

$$(4) \quad E(y(n)/y(k), k \leq n-1) = E(y(n)/y(n-N), \dots, y(n-1)) \\ = \sum_{j=1}^N a_j y(n-j)$$

の時 $\{y(n)\}$ を N 重マルコフと云う。 N 重マルコフで $N-1$ 重マルコフでない、時狭義 N 重マルコフと云う。 D を差分
ie $Df(n) = f(n+1) - f(n)$ とする時 (4) は、適当な $b_0, \dots, b_{N-1}$ で、
 $y(n) = \left(\sum_{i=0}^{N-1} b_i D^i \right) y(n-N)$ かつ $\{y(k), k \leq n-1\}$
と独立となる y である。 また狭義 N 重マルコフの時 $a_N \neq 0$
且 $a_1, \dots, a_N$ は一意に定まる。

$X_j(n) = y(n+j-1)$, $j = 1, \dots, N$ とおけば、 X は
 N 次元 t. h. G. M, 且 transition matrix A は次の形になる。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_N & a_{N-1} & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

X は Proposition 1 を適用すれば、 X の特殊性より、次の y が
合る。 即ち、 X が deterministic part を持つば y が determini-
stic となり、 X が deterministic となる。 従って、

" X は deterministic t. h. G. M かつ、 M -type t. h. G. M
である"。

この y は A の固有値の絶対値が、すべて 1 であるか、すべて
1 より小さい、かに対応する。

定義. $\{z(n), n \in T\} \in M(0)$ なら、一次元 t. h. G. とする。
 $z \in \text{component}$ とする t. h. G. M の最小の次元 N の時、 $z \in N$ 次元マルコフの component process と云う。

狭義 N 次元マルコフは、 N 次元マルコフの component process になる。

Prop. $z \in N$ 次元マルコフの component process とする。
 適当な $a_1, \dots, a_N$ ($a_N \neq 0$) で、 $z(n+N) = a_1 z(n+N-1) + \dots + a_N z(n)$
 $\in \{z(k), k \leq n\}$ と独立 ($\forall n \in T$) になるかある。しかる
 $a_1, \dots, a_N$ は一意に定まる。

① $x \in N$ 次元 t. h. G. M , $x(n) = z(n)$ とする。 $A \in \mathbb{R}^N$ の
 transition matrix, $\lambda^N - a_1 \lambda^{N-1} - \dots - a_N = 0$ は A の
 characteristic equation とする。 (1)より

$$x(n+i) = \sum_{j=0}^{i-1} A^j z(n+i-j) + A^i x(n).$$

$A^N - a_1 A^{N-1} - \dots - a_N I = 0$ より、 $x(n+N) = a_1 x(n+N-1) + \dots + a_N x(n)$
 は $\{x(k), k \leq n\}$ と独立。第一成分を見れば Prop. の前
 半が成る。次元の最小性より x は $M(0)$ component を持つ
 得ない。故に、 $a_N \neq 0$ 。 $b_1, \dots, b_N$ が条件をみたすとする。

$(a_1 - b_1)z(n+N-1) + \dots + (a_N - b_N)z(n)$ は $\{z(k), k \leq n\}$ と
 独立。 $j \equiv \min \{i; a_i \neq b_i\}$. $z(n+N-j) = c_1 z(n+N-j-1) + \dots + c_{N-j} z(n)$
 は $\{z(k), k \leq n\}$ と独立。

$$Y_1(n) = Z(n), \quad Y_2(n) = E(Z(n+1)/Z(k), k \leq n), \quad \dots$$

$$Y_{N-j}(n) = E(Z(n+N-j-1)/Z(k), k \leq n)$$

とあけは", Y は $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N-j} & \dots & \dots & \dots & c_1 \end{pmatrix}$ を transition matrix とす

る t. h. G. M. 即ち, Z は $(N-j)$ 次の component process となる矛盾。

従って N 重 Z と N 次の component process の差は, (4) と Prop. を比較すると, 分る様に, $Y(n+N) - q_1 Y(n+N-1) - \dots - q_N Y(n)$ 即ち $\{Y(k), k \leq n+N-1\}$ と独立になるか, $\{Y(k), k \leq n\}$ と独立になるか, 異なる。この差異が, spectral measure G による次の criterion に反映する。 $(E Y(n) Y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dG(\lambda))$ 。

Proposition 2。 Y は N 次元 Z と N 次の component process とする。この時

$$(5) \quad G(M) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|b_0 e^{i(N-1)\lambda} + \dots + b_{N-1}|^2}{|e^{iN\lambda} - q_1 e^{i(N-1)\lambda} - \dots - q_N|^2} d\lambda + \hat{G}(M)$$

すなわち $q_1, \dots, q_N$ は Prop. による定まる定数。かつ,

$$(6) \quad |Z^N - q_1 Z^{N-1} - \dots - q_N|^2 = |Z - \alpha_1|^2 \dots |Z - \alpha_N|^2 \quad \text{に対し,}$$

$$|\alpha_i| = 1, \quad i = 1, \dots, l, \quad |\alpha_{l+p}| \neq 1 \quad (p > 0) \quad \text{とすれば}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_N$ は互いに異なる。更に $\{\hat{G} \text{ の jump points } \} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$, ($\alpha_k = e^{i\lambda_k}$) で $\hat{G}$ は discrete measure. かつ $|b_0 z^{N-1} + b_N|^2 = C |z - \alpha_1|^{p_1} \dots |z - \alpha_N|^{p_N} |z - \beta_1| \dots |z - \beta_N|$ とおけば $p_1, \dots, p_N \geq 1$, β_i は $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ と異なる。

γ が N 重なる γ の component process の時 deterministic な γ の component になる必要十分条件は $\hat{G} = \hat{G}(\lambda)$ 。

また, PM-type の component になる必要十分条件は, $\hat{G} = 0$ 。

一次に t. h. γ の spectral measure G が (5), (6) で表わされるならば γ は N 重なる γ の component となる。

γ が deterministic な N 重なる γ (狭義) である必要十分条件は, spectral measure G が N points で jump する discrete measure。

γ が M-type の N 重なる γ である必要十分条件は,

$$G(\mu) = \int_{-\pi}^{\mu} \frac{1}{|e^{iN\lambda} - a_N|^2} d\lambda$$

ここで, $z^N - a_1 z^{N-1} - \dots - a_N = 0$ の任意の根 α は, $|\alpha| < 1$ となる。

§ 3. $T = (-\infty, \infty)$. i. e. continuous time parameter.

γ を平均連続な t. h. G, M (≠ 0) とする。§ 1 と同様

γ は M(0) type の non-degenerate に分解されるが, γ を以下

non-degenerate とする。即ち $R(0)$ は symmetric, positive-definite。

$$E(X(t+s) | X(s)) = A(t) X(s) \quad (t \geq 0)$$

とある transition matrix $A(t)$ は $R(t) = R(0) A(t)$ 。

$A(t+s) = A(t) A(s)$, t に つき連続, $A(0) = I$ 。従って,

$$A(t) = e^{tQ} \quad \left(Q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (A(t) - I) \right)$$

故に, X の法則は $R(0)$ と Q に よる。

$M(1), M(e^{i\theta})$ は §2 に於て n を 連続変数 t に 変え
る 事によつて, 定義される。 M -type を 次の様に 定義する。

$d\tilde{x}(t)$ を N 次元 Brownian random measure, S は symmetric
non-negative definite $N \times N$ 行列。 H は $N \times N$ 行列 とする。

$$Y(t) = \int_0^t e^{(t-s)H} S d\tilde{x}(s), \quad Y \text{ は } M\text{-type と云う。}$$

(右辺の積分は, 例えは H の固有値の実部が, 負ならば存在)。

Proposition 1'.

X が non-degenerate & deterministic であるならば, $M(1), M(e^{i\theta})$
の direct product.

X が non-degenerate であるならば, non-degenerate & deter-
ministic なものと, M -type との direct product。 即ち

$$(7) \quad X(t) \sim \int_{-\infty}^t e^{(t-s)Q} S \, d\xi(s) + e^{tQ} T S$$

こゝに, $E S \cdot S = I$, $d\xi$ と T は独立, prediction error
 $E(X(s+t) - e^{tQ} X(s))^2 \sim t S^2 \quad (t \rightarrow 0), \quad S = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \Gamma^0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$

N 重マルコフ. 一次元 t. h. G $\{y(t), t \in T\}$ の path 則
 C^{N-1} -class 7"

$$E(y(t)/y(\tau), \tau \leq s) = E(y(t)/y(s), y'(s), \dots, y^{(N-1)}(s))$$

の時, N 重マルコフと云う。 $N-1$ 重で T の時, 狭義 N 重マルコフと云う。

狭義 N 重マルコフ y に對し,

$$X_1(t) = y(t), \quad X_2(t) = y'(t), \quad \dots, \quad X_N(t) = y^{(N-1)}(t)$$

とすれば, X は non-degenerate 7 N 次元 t. h. G M と T 7,
 (7) により, 次の 3 が成る。

$$X \text{ の transition matrix } A(t) = e^{tQ}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \alpha_N & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{error matrix } S = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \Gamma^0 \end{pmatrix} \quad (C \geq 0)$$

$C = 0 \iff Q$ の characteristic equation は pure imaginary
 の simple root を持つ ($\{i\theta_j, j=1 \dots N\}$ と ± 3 .)

$\Leftrightarrow y(t) = \sum_j \xi_j \cos t\theta_j + \zeta_j \sin t\theta_j$, $\therefore \xi_i, \zeta_i, i=1, \dots, N$ は独立 Gaussian system,

$\Leftrightarrow y$ の spectral measure は N -points τ -jump する様な discrete measure.

$c > 0 \Leftrightarrow Q$ の characteristic equation の root は real part が $\frac{1}{2}$,

$$\Leftrightarrow y(t) = c \int_{-\infty}^t [e^{(t-s)Q}]_{1N} d\xi_N(s)$$

即ち

$$y^{(N)}(t) - \alpha_1 y^{(N-1)}(t) - \dots - \alpha_N y(t) = c \xi_N'(t)$$

(N 階微分は ξ , white noise が ξ)

$$\Leftrightarrow G(H) = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|(i\lambda)^N - \alpha_1 (i\lambda)^{N-1} - \dots - \alpha_N|^2} d\lambda.$$

§ 4. Hilbert space valued t. h. G.

H は real separable Hilbert space, $(\cdot, \cdot)$ は内積, B は H の subset の作る topological σ -algebra とする. 確率空間 (Ω, B, P) より, H への mapping X があり, $X^{-1}(A) \in B$ ($\forall A \in B$) の時, X は H -valued random variable と云う. この時, $(X, Y), \|X\|$ は 定数値確率変数と云う.

$E\|X\|^2 < \infty$ の時, m と covariance functional S が, 次の様に ψ で定義される. $\psi(\gamma) \equiv E(X, \gamma)$ は H 上の連続な linear functional となり, $\psi(\gamma) = (m, \gamma)$ となり m が一意的に定まる. m を X の平均と云う.
 $\varphi(x, \gamma) \equiv E(X-m, x)(X-m, \gamma)$ は, $H \times H$ 上の連続な bilinear functional となり, $\varphi(x, \gamma) = (Sx, \gamma)$ となり linear mapping $S: H \rightarrow H$ が定まるが, S は finite trace である. $\odot \{e_i\}$ を base とすれば;

$$\sum (Se_i, e_i) = \sum E(X-m, e_i)^2 = E\|X-m\|^2 < \infty.$$

X の characteristic functional が次の形をとる時, m と covariance functional S の Gaussian と云う.

$$E e^{i(X, \gamma)} = e^{i(m, \gamma) - \frac{1}{2}(S\gamma, \gamma)} \quad [2].$$

任意の $m \in H$ と trace operator S に対し, X が存在するとは, 有限次元の場合と同様である. X が Gaussian とは base $\{e_i\}$ に対し, $\{(X, e_i) \quad i=1, 2, \dots\}$ が (m, e_i) covariance $c_{ij} = (Se_i, e_j)$ の Gaussian system となる事に外ならない.

$X = \{X(n), n \in T\}$ が, 任意の linear operators A_n について $\sum_{n \in T} A_n X(n)$ が Gaussian になる時, Gaussian system と云う.

更に, $\sum_{n \in T} A(n) X(n+1)$ の分布が $l(\in T)$ に無関係なとき, t. h. G. と云う. X が Gaussian system とは $\{(X(n), e_i), i=1, 2, \dots, n \in T\}$ が real Gaussian system になること. 従って, $\{\xi, X\}$ が Gaussian system であるとき, ξ と X が独立になる. 必要十分条件は, $\forall x, y \in H$ に對し,

$$E(\xi - E\xi, x)(X(n) - EX(n), y) = 0, \quad \forall n \in T.$$

$X \in$ t. h. G. であるとき, $E(X(n)/X(k), k \leq n-1) = AX(n-1)$, $\forall n \in T$ となる linear operator A がとれるとき, t. h. G. M . と云う. この時 $\|A\| \leq 1$, かつ, $\zeta(n) \equiv X(n) - AX(n-1)$ は $\{X(k), k \leq n-1\}$ と独立になる.

$\{\zeta(n), n \in T\}$ は独立な同じ分布の Gaussian system $E\zeta(n) = 0$ とする. linear operator A に對し,

$$Y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} A^m \zeta(n-m) \quad (\text{左辺が収束するとき}),$$

と定義する $Y \in M$ -type と云う.

Proposition 1''. $X \in$ 非 0 の t. h. G. M とする. X は 互に独立な M -type t. h. G. M と deterministic t. h. G. M の和となる.

① $\{\zeta(n) \equiv X(n) - AX(n-1), n \in T\}$ は独立な同じ分布の Gaussian system. かつ,

$$(8) \quad X(n) = \gamma(n) + A\gamma(n-1) + \dots + A^{n-v-1}\gamma(v+1) + A^{n-v}X(v).$$

$$(9) \quad A^{n-v}X(v) = E(X(n)/X(k), k \leq v)$$

abstract martingale の収束定理より (9) は $v \rightarrow -\infty$ の時、確率 1 で、収束する [3]。故に、(8) より

$$(10) \quad X(n) = \sum_{m=-\infty}^n A^{n-m}\gamma(m) + Z(n).$$

かつ、 $Z(n)$ は $\{\gamma(k), k \in T\}$ と独立。すなわち、

$$Z(n) = \lim_{v \rightarrow -\infty} A^{n-v}X(v) = A^n \lim_v A^{-v}X(v) = A^n Z(0).$$

即ち、(10) は 3 分の 1 解になる。

文献

- [1]. J. L. Doob, The Elementary Gaussian Processes, Ann Math. Stat. 15. (1944). 229-282.
- [2]. S. R. S. Varadhan; Stochastic processes, (Chap 8 + 9.) New York Univ. 1968
- [3]. S. D. Chatterji; Martingales of Banach-valued Random variables, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960). 395-398.