

$\mathbb{C}^n$ における多項式近似について

阪大 教養 阪井 章

§ 0. はじめに

コンパクトな Hausdorff 空間 X の上の複素数値連続関数の全体を $C(X)$ とし, $C(X)$ の m 個の関数 $f_1, \dots, f_m$ によって生成される $C(X)$ の閉部分環を $[f_1, \dots, f_m; X]$ であらわす. 特に K が $\mathbb{C}^n$ の有界閉集合のとき, $[z_1, \dots, z_n; K]$ を $P(K)$ とかく. 多項式近似の一般的问题は $[f_1, \dots, f_m; X] = C(X)$ となる X または $f_1, \dots, f_m$ に対する条件を求めることである. $A = [f_1, \dots, f_m; X]$ に対して, A の maximal ideal space を M_A とするとき, $f_1, \dots, f_m$ の joint spectrum

$$\sigma(f_1, \dots, f_m) = \{(\hat{f}_1(x), \dots, \hat{f}_m(x)) ; x \in M_A\}$$

を K とすると, K は $\mathbb{C}^m$ の多項式凸な有界閉集合であり, A と $P(K)$ とは同型である (Gamelin [1] p. 69 参照). したがって

(I) $P(K) = C(K)$ となるのはどんなときか?

或いはもっと一般に

(II) $P(K)$ は $C(K)$ のどんな部分環か?

というのが多項式近似の問題である.

$n=1$ の場合は、問題 (I) が Laurentieff [2] によって、また問題 (II) は Mergerian [3] によって解決されている：

Laurentieff の定理

$$P(K) = C(K) \iff \begin{cases} \text{(i) } \mathbb{C} \setminus K \text{ が連結} \\ \text{(ii) } K \text{ の内部 } K^\circ \text{ が空} \end{cases}$$

Mergerian の定理

$$P(K) = A_1(K) \iff \mathbb{C} \setminus K \text{ が連結}$$

ここで $A_1(K)$ は K で正則な $C(K)$ の関数全体である。

$n \geq 2$ の場合、(i) に相当する条件は " K が多項式凸" である。 K の近傍で正則な関数によって K 上一様近似出来る関数の全体を $A(K)$ であらわすとき、

Oka-Weil の定理

$$P(K) = A(K) \iff K \text{ が多項式凸}$$

があり、これによって問題 (II) は

(III) どんな多項式凸な K に対して $A(K) = C(K)$ となるか？
に帰着する。(しかし多項式凸という条件は完全に幾何学とは
云えない)

条件 (ii) は $A(K) = C(K)$ のための十分条件ではない。
 $n=1$ のときは $A(K)$ は K 上に極をもたない有理関数によっ
て K 上一様近似出来る関数の全体 $R(K)$ に一致する。 $K^\circ = \phi$
で $R(K) \neq C(K)$ である例には Mergerian の Swiss cheese

がある ([3]). また $n \geq 2$ のときは K が $\mathbb{C}^n$ の複素部分多様体を含む場合を考えればよい. また $n = 1$ のとき $\text{mes}(K) = 0$ なら $A(K) = C(K)$ であるが, 多変数ではこの条件が十分でないことも明らかであろう.

Wermer は [4] において, $\mathbb{C}^2$ の実部分多様体 S が $\mathbb{C}$ の円円板 D 上のある関数のグラフとして与えられる場合について, もし S が多項式凸でその関数が $\bar{z}$ に “近い” とき $P(S) = C(S)$ であることを示した. この結果は Freeman [5] によって実 2 次元多様体の場合に拡張された. Stolzenberg [6] は $\mathbb{C}^n$ 内の滑らかな曲線弧 Γ について $P(\Gamma) = C(\Gamma)$ を示した. Wells [7] は複素多様体のコンパクトな実解析的多様体 S が *totally real* (後述) であるとき $A(S) = C(S)$ が成り立つことを証明し, 後に R. Nirenberg – Wells [8] と Hörmander – Wermer [9] は, S が $\mathbb{C}^n$ の充分滑らかな実部分多様体で, *totally real* であるとき, その多項式凸なコンパクト部分集合 K に対して $P(K) = C(K)$ が成り立つことを証明した.

こゝでの目的は, これらの結果の一部を問題 (I) を中心に紹介することである.

§1. 実2次元多様体の場合

Weierstrass の定理 $\mathbb{C}^n$ の有界閉集合 K に対して

$$[z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n; K] = C(K)$$

から次の問題が考えられる.

(IV) n 個の関数 $f_1, \dots, f_n$ がどんな関数のとき

$$[z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_n; K] = C(K) \text{ であるか?}$$

一般に K 上の m 個の関数 $f_1, \dots, f_m \in C(K)$ に対して, そのグラフ $K^* = \{(z_1, \dots, z_n, f_1(z), \dots, f_m(z)); z \in K\}$ は $\mathbb{C}^{n+m}$ の有界閉集合で, $[z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_m; K]$ は $P(K^*)$ に同型である. したがって問題 (IV) は問題 (I) の特別の場合である.

Wermer は $n=1$ で, K が円板 $D: |z| \leq 1$ の場合を扱った.

定理 1 (Wermer [10]) $f(z) = \bar{z} + R(z)$ とする.

$$(1) |R(z) - R(z')| < |z - z'| \quad z, z' \in D, z \neq z'$$

$$\Rightarrow [z, f; D] = C(D).$$

定理 2 (Wermer [4]) $f \in C^1(D)$ の D 上のグラフが多項式凸で,

$$(2) D \text{ の各点 } a \text{ に対して } f_{\bar{z}}(a) \neq 0.$$

$$\Rightarrow [z, f; D] = C(D).$$

定理 1, 2 の証明の骨子は, $a \in D$ に対して

$$(3) f_n(z) \rightarrow \frac{1}{z-a}, \quad |f_n(z)| \leq \frac{2}{|z-a|} \quad (z \neq a)$$

を満たす $[z, f; D]$ の関数列 $\{f_n\}$ を見出すことにある。そして $\mu \perp [z, f; D]$ なら, (3) から

$$0 = \int f_n(z) d\mu(z) \rightarrow \int (z-a)^{-1} d\mu(z) \quad a \in D.$$

であり, $a \in D$ のときは $(z-a)^{-1} \in P(D) \subset [z, f; D]$ だから結局すべての a に対して $\int (z-a)^{-1} d\mu(z) = 0$. したがって Bishop の定理 [11] によって $\mu = 0$.

定理 2 の条件 (2) は "殆んど到る処 $f_{\bar{z}} \neq 0$ " でおきかえてよいことがその証明からわかる. 条件 (1), (2) は " $f(z)$ が $\bar{z}$ に近い" ということであるが, これを $f(z)$ が $C(D)$ の位相で $\bar{z}$ に近いという条件に置きかえることは出来ない. ([12] 参照)

この方法を推し進めて, Freeman は定理 2 を実 2 次元多様体の場合に拡張した. M を滑らかな境界をもつ C^∞ 級実多様体. $\mathcal{F}$ を $C^1(M)$ のある関数族とし, A は $\mathcal{F}$ によって生成される M 上の uniform algebra とする. $\mathcal{F}$ のすべての $\nu (= \dim M)$ 個の関数 $f_1, \dots, f_\nu$ の選び方に対して $df_1 \wedge \dots \wedge df_\nu(p) = 0$ をみたす M の点 p の集合を E であらわし, $\mathcal{F}$ の exceptional set という.

定理 3 (Freeman [5]) $\dim M = 2$, $M_A = M$, $\text{mes}(E) = 0$

$$\Rightarrow A = C(M)$$

特に, $M = D$, $\mathcal{F} = \{z, f\}$ のときは $E = \{a \in D; f_{\bar{z}}(a) = 0\}$ であり, $M_A = D$ は D 上の f のグラフ D^* が多項式凸と同値であるから, この定理は定理 2 を含んでいる.

§2. totally real な多様体

X を複素多様体, S をその C^1 級実部分多様体とする. $p \in S$ における S の接空間 $T_p(S)$ の複素部分ベクトル空間

$$H_p(S) = T_p(S) \cap J_p \cdot T_p(S)$$

の次元が正のとき, S は p で complex tangent を持つと云う. S がすべての点で complex tangent を持たないとき, S は totally real であると言ふ. X が $\mathbb{C}^n$ の時は, S が p で complex tangent を持たないことは, $\mathbb{C}^n$ の適当な座標変換によつて

$$T_p(S) = \{(z_1, \dots, z_n); \operatorname{Re} z_1 = \dots = \operatorname{Re} z_\nu = z_{\nu+1} = \dots = z_n = 0\}$$

(ただし $\nu = \dim S$) と表わされることと同値である.

Ω が $\mathbb{C}^n$ の領域のとき, $f_1, \dots, f_m \in C^1(\Omega)$ の Ω 上のグラフ

$$\Omega^* = \{(z_1, \dots, z_n, f_1(z), \dots, f_m(z)); z \in \Omega\}$$

は $\mathbb{C}^{n+m}$ の C^1 級実部分多様体である. Ω^* が点 $(a, f(a))$ ($a \in \Omega$) で complex tangent を持つということは次の事と同値である:

$$\exists \xi, \eta \in \mathbb{C}^n, \xi \neq 0, \eta \neq 0; (\xi, df(\xi)) = i(\eta, df(\eta)).$$

$\xi = i\eta$ であるからこれを計算して

$$(4) \quad \operatorname{rank} \left(\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} \Big|_{z=a} < n$$

を得る. 特に $m=n=1$ のときは $f_{\bar{z}}=0$ である. したがつて定理2は次のように云いかえることが出来る.

D^* が多項式凸で totally real なら $P(D^*) = C(D^*)$

後で用いられる性質を補題として述べる.

補題 1 S が $\mathbb{C}^n$ の *totally real* な実部分多様体のとき, 十分小さい正数 ε に対して S の管状近傍 $T_\varepsilon(S)$ は擬凸.

証明には z と S との距離を $d(z, S)$ とするとき, $\varphi(z) = d(z, S)^2$ が $T_\varepsilon(S) = \{z; \varphi(z) < \varepsilon\}$ で多重調和であることを示す.

補題 2 Ω が $\mathbb{C}^n$ の開集合, S が Ω に含まれる *totally real* な C^r 級実部分多様体とする. $u \in C^r(\Omega)$ に対して次の性質をもつ $v \in C^r(\Omega)$ が存在する:

$$(5) \quad S \text{ 上で } v \equiv u.$$

$$(6) \quad \bar{\partial} v(z) = o(d(z, S)^{r-1}) \quad (z \rightarrow S; S \text{ 上広義一様})$$

これは S が *totally real* なら $p \in S$ の接空間 $T_p(S)$ 上では (適当な座標変換によつて) 多項式が実多項式とみなされ, したがって Poincaré の補題により, 多項式に対する $\bar{\partial}$ -問題が解けると云う事実を用いて帰納法で証明されるのであるが詳しいことは省略する. ([8], [9], [13] 等を参照).

§ 3. 一般次元の場合

定理 4 (Hörmander-Wermer [9]) S が $\mathbb{C}^n$ の *totally real* な C^r 級実部分多様体 ($r \geq \frac{1}{2}(\dim S + 2)$), K が S の多項式凸なコンパクト部分集合であれば

$$P(K) = C(K)$$

証明は補題 1, 2 と次の

補題 3 ε -Ball $|z| < \varepsilon$ を B_ε とする.

$u \in L^2(B_\varepsilon)$, $\bar{\partial} u = f$, $f \in C(B_\varepsilon)$ ならば $u \in C(B_\varepsilon)$ で

$$(7) \quad u(0) \leq C(\varepsilon^{-n} \|u\|_{L^2(B_\varepsilon)} + \varepsilon \sup_{B_\varepsilon} \|f\|)$$

Hörmander の定理 ([14], [15])

Ω が $\mathbb{C}^n$ の擬凸領域で $f \in L^2_{loc}(\Omega)$, $\bar{\partial} f = 0$ ならば

$\bar{\partial} g = f$ となる $g \in L^2_{loc}(\Omega)$ が存在し, 任意の $K \Subset \Omega$

に対して $\|g\|_{L^2(K)} \leq C \|f\|_{L^2(K)}$ が成り立つ.

を用いて次のようになされる.

K を含む開集合 Ω に対し C^∞ 級の関数 u を K の近傍で正則な関数で近似すればよい. 補題 2 の v をとり, $\bar{\partial} v = f$ とおく.

$\omega_\varepsilon = T_\varepsilon(K)$ とすると $\dim S = \nu$ として (6) から

$$\|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^{r-1} \varepsilon^{\frac{1}{2}(2n-\nu)}) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

ε を十分小さくすれば補題 1 と Hörmander の定理により

$$\bar{\partial} g_\varepsilon = f, \quad \|g_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq C \|f\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}$$

となる $g_\varepsilon \in L^2(\omega_\varepsilon)$ がとれる $u_\varepsilon = v - g_\varepsilon$ とおくと ω_ε で

$\bar{\partial} g_\varepsilon = 0$. $z \in K$ に対しては (5), (7) より

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(z) - u(z)| &= |u_\varepsilon(z) - v(z)| = |g_\varepsilon(z)| \\ &\leq C(\varepsilon^{-n} \|g_\varepsilon\|_{L^2(B_\varepsilon)} + \varepsilon \|f\|_{L^\infty(\omega_\varepsilon)}) \\ &= o(\varepsilon^{r-1-\frac{1}{2}\nu}) \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

$\nu \leq 2r-1$ だから $u \in A(K)$.

定理 5 ([9]) K を $\mathbb{C}^n$ のコンパクト集合 U をその近傍,

$R_j \in C^{n+1}(U)$, $f_j = \bar{z}_j + R_j$ ($j=1, \dots, n$) とする.

(8) $\exists k$ ($0 < k < 1$) $|R_j(z) - R_j(z')| \leq k|z - z'|$ $z, z' \in U$

$\Rightarrow [z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_n; K] = C(K)$

証明. 条件 (8) を保つて $R_j(z)$ を $\mathbb{C}^n$ 全体に拡張出来る.

(Valentine [16]). $\mathbb{C}^n$ 上の $f_1, \dots, f_n$ のグラフを S とする. (8) によって S は $\mathbb{C}^{2n}$ の *totally real* な実部分多様体である.

$A = [z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_n; K]$ とおくと, A は $P(K^*)$ と同型であるから $P(K^*)$ が多項式凸であることを示すには, A のすべての complex homomorphism φ が K 上の point evaluation であることを示せばよい. $\varphi(z_j) = \alpha_j$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ とし.

$$F(z) = \sum_{j=1}^n (z_j - \alpha_j)(f_j(z) - f_j(\alpha))$$

とおくと, $F \in A$, $\varphi(F) = 0$ で (8) から

$$|F(z) - \sum_{j=1}^n |z_j - \alpha_j|^2| \leq k \sum_{j=1}^n |z_j - \alpha_j|^2$$

$$\therefore z \neq \alpha \text{ なら } \operatorname{Re} F(z) > 0.$$

K 上の φ の表現測度 m をとると

$$0 = \operatorname{Re} \varphi(F) = \int \operatorname{Re} F \cdot dm$$

したがって m は Dirac 測度 δ_α である. ゆえに $\alpha \in K$ で φ は point evaluation である.

(8) において $k=1$ とすることは出来ない. $R_j(z) = -\bar{z}_j$ とおけばよい.

R. Nirenberg-Wells [8] は種々の定理を証明しているが、
定理4に相当するものを1つだけ挙げる。

定理6 S は Stein 多様体 X のコンパクト又は有限な
 C^∞ 級実部分多様体とする。 S が *totally real* で $\partial(X)$ -
凸ならば $A(S, X) = C(S)$
ここで $A(S, X)$ は $\partial(X)$ の関数によって S 上一族近似
出来る関数全体を表わす。

§4. 問題 (II) について.

Wermer は [4] において次の定理を示した。

定理7 $E = \{a \in D; f_{\bar{z}}(a) = 0\}$ とするとき
 $[z, f; D] = \{g \in C(D); g|_E \in A(E)\}$.

これに対応する Hörmander-Wermer [9] の結果は

定理8 Ω は $\mathbb{C}^n$ の開集合, S は Ω の閉部分集合, K_0 は
 S のコンパクト部分集合で次の条件を満たす:

(1°) $S \setminus K_0$ は C^r 級の *totally real* 実部分多様体.

($r \geq \frac{1}{2}(\dim S + 2)$).

(2°) 正則凸な K_0 の (S に関する) 近傍 K が存在する.

$\Rightarrow A(K) = \{g \in C(K); g|_{K_0} \in A(K_0)\}$

Nirenberg-Wells [8] にも対応する結果が証明されているが省略する。

§5. peak point との関係

Wermer の peak point conjecture

X 上の uniform algebra A について, $M_A = X$ であり
も X の各点 x が A の peak point ならば $A = C(X)$.

これが一般に成立しないことは Cole の反例が示している.
(Browder [17] 参照). しかし X が $\mathbb{C}$ のコンパクト集合 K で
 A が $A(K) (= R(K))$ の時はこの予想は正しい. ([12])

peak point に関連して Freeman は [5] で次の事を示した.

定理 9 $M, \mathcal{F}, A, E$ は §1 と同じとする.

$M_A = M \implies M \setminus E$ の点はすべて A の peak point.

証明. $M \setminus E$ の点 p が A の local peak point であることを
示せばよい (Rossi [18]). $p \in M \setminus E$ なら $df_1 \wedge \cdots \wedge df_n(p) \neq 0$
となる $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ がある. p のまわりの座標 $(x_1, \dots, x_n)$ を
選んで $A = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}|_p$ とすると $|A| \neq 0$. そこで

$$P(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_n)^t \cdot (A^{-1}) \cdot (A^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

とおくと p のある近傍 U に対して $P(f_1, \dots, f_n) \in A|_U$ で

更に $h = 1 - P(f_1, \dots, f_n)$ とおくと

$$h(p) = 1 > |h(q)| \quad q \in U - \{p\}$$

$\dim M = 2$ で $E = \emptyset$ のときは定理 3 により, これが peak
point conjecture の特別の場合の解答を与える.

M が $\mathbb{C}^n$ の閉集合で $\mathcal{F} = \{z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_n\}$ の場合には

$$z \in M \setminus E \iff \text{rank} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_k} \right) = n$$

$$\iff z_1 \text{ に対応するグラフ } M^* \text{ 上の点 } (z, f(z))$$

で M が complex tangent を持たない。

が成り立つから、定理 9 により、

M 上の $(f_1, \dots, f_n)$ のグラフ M^* が多項式凸であるとき、

M^* の点 p で M^* が complex tangent を持たないければ

p は $P(M^*)$ の peak point である。

が成り立つ。

引用文献

- [1] Gamelin: Uniform algebras, Prentice-Hall ('69)
- [2] Laurentieff M. A.: Sur les fonctions d'une variable complex représentables par des séries de polynomes, Hermann, Paris ('36)
- [3] Mergerian S. N.: Uniform approximations to functions of a complex variables, AMS Transl. 101 ('54)
- [4] Wermer. J.: Polynomially convex disks, Math. Ann. 158 ('65) 6-10.
- [5] Freeman M.: Some conditions for uniform approximation on a manifold, Function algebra, ('65) 42-65.

- [6] Stolzenberg G: Uniform approximation on smooth curves, Acta. Math. 115 ('66) 195 — 198
- [7] Wells R. O. : Holomorphic approximation on real-analytic submanifolds of a complex manifold, Proc. AMS 17 ('66) 1272 — 1275
- [8] Nirenberg R. — Wells R. O. : Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold, Trans AMS 142 ('69) 15 — 35
- [9] Hörmander L. — Wermer J. : Uniform approximation on compact subsets in $\mathbb{C}^n$, Math. Scand. 23 ('68) 5 — 21
- [10] Wermer J. : Approximation on a disk, Math Ann. 155 ('64) 331 — 333.
- [11] Bishop E. : A minimal boundary for function algebras P. J. M. 9 ('59) 629 — 642
- [12] Wermer J. : Banach algebras and analytic functions, Advances in Math. Academic Press, ('61)
- [13] Freeman M: Tangential Cauchy — Riemann equations and uniform approximation P. J. M. 33 ('70) 101 — 108
- [14] Hörmander, L : L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ -operator, Acta Math. 113 ('65) 89 — 152

- [15] Hörmander L. : An introduction to complex analysis
in several variables, Princeton N.J. ('66)
- [16] Valentine F. A. : A Lipschitz condition preserving
extension of a vector function A.J.M. 67 (45) 83-93
- [17] Browder A. : Introduction to function algebras,
Benjamin ('69)
- [18] Rossi H. : The local maximal modulus principle,
Ann. Math. 72 ('60) 1-11