

Real homogeneous polynomials の零点集合 とその係数空間について

京大理 小池 敏司 (Satoshi Koike)

§1. 結果

$H_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $r_j (\geq 1)$ 次 real homogeneous polynomial とする ($j = 1, \dots, p$)。この時、 $\mathbb{R}^n$ の中で $H_1^{-1}(0) \cap \dots \cap H_p^{-1}(0)$ の topological type を考える。homogeneous polynomials の零点集合は $0 \in \mathbb{R}^n$ を頂点とする cone をなすので、 $0 \in \mathbb{R}^n$ の周りの local situation で決まる。ここでの目的は、上の性質に注目しながら degree $r_1, \dots, r_p$ を fix した real homogeneous polynomials の係数空間が、その零点集合の topological type によって、どのように分割されるかを調べる事である。 $r_0 = \max_{1 \leq i \leq p} \{r_i\}$ とおく。 $r_0 = 1$ の時その topological type は、mapping $H = (H_1, \dots, H_p)$ の rank で容易にわかるので、 $r_0 > 1$ の場合が我々の主な興味の対象である。

$E_{[S]}(n, p)$ を $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ の C^S map-germ の作る vector space、 $J^r(n, p)$ を $E_{[S]}(n, p)$ ($S \geq r$) の元である

map-germ の r -jet の集合、 $j^r(f)$ は mapping f の 0 での r -jet とする。更に次のように記号を定める；

$$J^{(r_1, \dots, r_p)}(n, p) = J^{r_1}(n, 1) \times \dots \times J^{r_p}(n, 1),$$

$$\mathcal{E}_{[s_1, \dots, s_p]}(n, p) = \mathcal{E}_{[s_1]}(n, 1) \times \dots \times \mathcal{E}_{[s_p]}(n, 1),$$

$$H(r_1, \dots, r_p) = \left\{ w = (w_1, \dots, w_p) \in J^{(r_1, \dots, r_p)}(n, p) \mid \right. \\ \left. w_j : r_j\text{-th homogeneous polynomial } (1 \leq j \leq p) \right\}.$$

この時、 $H(r_1, \dots, r_p)$ は自然にある Euclidian space $\mathbb{R}^N$ と同一視される。 $\mathbb{R}^N$ の元 a に対し、その対応する $H(r_1, \dots, r_p)$ の元を $H_a(x)$ で表わす事にする。

定義. (1) $(r_1, \dots, r_p)$ -jet $w = (w_1, \dots, w_p) \in J^{(r_1, \dots, r_p)}(n, p)$ が v -sufficient in $\mathcal{E}_{[s_1, \dots, s_p]}(n, p)$ とは、各 j ($1 \leq j \leq p$) に対し $j^{r_j}(f_j) = j^{r_j}(g_j) = w_j$ を満たす任意の $f = (f_1, \dots, f_p)$, $g = (g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{E}_{[s_1, \dots, s_p]}(n, p)$ に対し、 $f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_p^{-1}(0)$ と $g_1^{-1}(0) \cap \dots \cap g_p^{-1}(0)$ の $0 \in \mathbb{R}^n$ での germ が homeomorphic になる時言う。

(2) r -jet $w \in J^r(n, p)$ が R - C^0 -sufficient (resp. RL - C^0 -sufficient) in $\mathcal{E}_{[s]}(n, p)$ とは、 $j^r(f) = j^r(g) = w$ を満たす任意の $f, g \in \mathcal{E}_{[s]}(n, p)$ に対し、ある local homeomorphism $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ (resp. $(\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$) が存在して $f = g \circ \sigma$ (resp. $\tau \circ f = g \circ \sigma$) が成立する時言う。

(3) $H, G \in H(r_1, \dots, r_p)$ が 同じ v -type を持つ と言うのは、ある global homeomorphism $\sigma: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ が存在して $\sigma(H(0)) = G(0)$ が成立する時言う。

ここで、 $\mathbb{R}^N$ の中の "undesirable set" として、

$$\Sigma^* = \{w \in H(r_1, \dots, r_p) \mid \text{not } v\text{-sufficient in } E_{[w]}(n, p)\}$$

と置く。この時、次の結果を得る。

定理. $n \geq p$ とする。その時 $\mathbb{R}^N$ は次の性質を満たす disjoint subset $W_1, \dots, W_a, W_1', \dots, W_b'$ に分解される。

(1) 各 W_i, W_j' は semi-algebraic, connected な analytic manifold である。

(2) 各 W_i は $\mathbb{R}^N - \Sigma^*$ の connected component であり、 $\Sigma^* = W_1' \cup \dots \cup W_b'$ である。

(3) 各 W_i, W_j' 上 " v -class" は unique である。

(4) Σ^* は closed in $\mathbb{R}^N$, $\dim \Sigma^* < N$ であり、更に Σ^* は、 $0 \in \mathbb{R}^N$ を vertex とする cone である。

注意. (1) Σ^* の定義で、 $H = (H_1, \dots, H_p)$ を r_0 -jet とせず $(r_1, \dots, r_p)$ -jet と考えた理由;

(i) 各 j に対し、 H_j は r_j -th homogeneous である。

(ii) $H_1^{-1}(0) \cap \dots \cap H_p^{-1}(0)$ を mapping $H = (H_1, \dots, H_p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ の零点集合と思うより、 p 個の function $H_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の零点集合と思う方が自然である。

(2) (i) $n < p$ の時、同様の結果は面白くない。何故なら任意の $a \in \mathbb{R}^N - \Sigma^*$ に対し $H_a^{-1}(0) = \{0\}$ であり、更に $\text{codim } \Sigma^* \geq 2$ であるから。

(ii) $n > p$, $r_0 > 1$ の時、 $\mathbb{R}^N - \Sigma^*$ 上に現われる v -class は 2 個以上である。従って $\text{codim } \Sigma^* = 1$ である。

(3) それ上 v -type が同じであるという $\mathbb{R}^N$ の connected subset による maximal な分割は、 Σ^* に compatible でない；例えば、 $n=2$, $p=1$, $r=3$ の時、ある connected subset $V \subset \mathbb{R}^N$ が存在して、 V 上 v -type は unique で、 $V \cap \Sigma^* \neq \emptyset$, $V \cap (\mathbb{R}^N - \Sigma^*) \neq \emptyset$ である。

(4) v -type に関する Thom–Varčenko 型定理の応用として、次の事がわかる。 $r_1 = \dots = r_p$ の時、ある proper algebraic set $V \subset \mathbb{R}^N$ が存在して、 $\mathbb{R}^N - V$ の connected component 上 v -type は unique で、 $\mathbb{R}^N - V$ の各元は v -sufficient である。
(T. C. Kuo [7], R. Thom [9], A. N. Varčenko [10])

定理の証明には次に述べる Proposition, homogeneous polynomial mapping の場合の v -sufficiency に関する結果が必要である。

Proposition の結果に、注意 (4) で述べた 3 人のやり方を適用して、く事により定理が得られる。

Proposition. $n \geq p$ とし、 $H = (H_1, \dots, H_p)$, H_j : r_j -th homogeneous ($1 \leq j \leq p$) とする。この時、次の条件は同値である。

(a) $H^{-1}(0) \cap \Sigma H = \{0\}$ ($r_0 = 1$ の時は $\emptyset$)、但し、 ΣH は mapping $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ の singular point set である。

(b: s) $H \in \mathcal{J}^{r_0}(n, p)$ は、 V -sufficient in $\mathcal{E}^{[s]}(n, p)$ である。

($s = r_0, r_0+1, \dots, \infty, \omega$)

(c) $H \in \mathcal{J}^{(r_1, \dots, r_p)}(n, p)$ は、 V -sufficient in $\mathcal{E}^{[r_1+1, \dots, r_p+1]}(n, p)$ である。

(d) $H \in \mathcal{J}^{(r_1, \dots, r_p)}(n, p)$ は、 V -sufficient in $\mathcal{E}^{[\omega]}(n, p)$ である。

§ 2. 考察と問題

(I) homogeneous case

$p = 1$ の時、多項式の位相型に関する福田の定理 ([3])、孤立特異点を持つ family に関する King の結果 ([5] or [1]) を適用する事により、“ V -type” を “local R - C^0 -type” に変えても § 1 の定理はそのまゝ成立する。

問題. $p \geq 2$, $r_1 = \dots = r_p$ の時、定理の "v-type" を "local RL- C^∞ -type" に変えても (但し、 w_j' の存在は除く)、そのまゝ成立するか？

予想. $w \in J^r(n, p)$ 、但し、 w_j : r -th homogeneous ($1 \leq j \leq p$) とする。この時、次は同値である。

w : RL- C^∞ sufficient $\Leftrightarrow w$: topologically finitely-determined
(i.e. $\exists l \geq r$ s.t. w : RL- C^∞ -sufficient as l -jet.)

(III) Thom-Vařcenko 型定理

$J^r(n, p) \cap \Sigma_r^* = \{ \text{not finitely v-determined} \}$

$J^r(n, p) \cap \Sigma_r = \{ \text{not v-sufficient} \}$ とおく。

定義より、 $\Sigma_r \neq \Sigma_r^*$ で、どちらも semi-algebraic subset ($[2], [7]$) である。 $s > r$ とし、 $\pi_s: J^s(n, p) \rightarrow J^r(n, p)$ を canonical projection とする。この時、 $J^r(n, p)$, $J^s(n, p)$ を次の性質を持つように分割するのは難しくない。

$$J^s(n, p) = \underbrace{U_1' \cup \dots \cup U_{l_s}'}_{\uparrow} \cup \underbrace{V_1' \cup \dots \cup V_{m_s}'}_{\uparrow} \cup \underbrace{W_1' \cup \dots \cup W_{n_s}'}_{\uparrow} \text{ (disjoint)}$$

$$J^r(n, p) = \underbrace{U_1 \cup \dots \cup U_{l_r}}_{\uparrow} \cup \underbrace{V_1 \cup \dots \cup V_{m_r}}_{\uparrow} \cup \underbrace{W_1 \cup \dots \cup W_{n_r}}_{\uparrow} \text{ (disjoint)}$$

(1) 各 $U_i, V_j, W_k, U_i', V_j', W_k'$ は semi-algebraic, connected な analytic manifold である。

(2) $J^S(n, p)$ の各 manifold は、 $J^r(n, p)$ のある manifold の上に onto に写る (但し、上の矢印と反対方向の向きにのみ写る)。

(3) 各 $U_i, V_j, W_k, U_i', V_j', W_k'$ 上 (local) v -class は、unique である。

(4) $\Sigma_r^* = W_1 \cup \dots \cup W_{n_r}, \Sigma_r - \Sigma_r^* = V_1 \cup \dots \cup V_{m_r}$
 $\Sigma_s^* = W_1' \cup \dots \cup W_{n_s}', \Sigma_s - \Sigma_s^* = V_1' \cup \dots \cup V_{m_s}'$ である。

§ 1 注意 (4) で述べた variety の Thom-Varičenko 型定理は、上の図式における "選択" の問題と言える; $w \in J^r(n, p)$, $s = r+1$ の時、 w を π_{r+1}^{-1} で $J^{r+1}(n, p)$ に持ちあげると、選択する $V_1' \cup \dots \cup V_{m_s}' \cup W_1 \cup \dots \cup W_{n_s}'$ のえか、 $U_1' \cup \dots \cup U_{q_s}'$ のえと比べて非常に少ない事を示している i.e. $\pi_{r+1}^{-1}(w) \cap \exists V$ proper algebraic set s.t. $V \subset \pi_{r+1}^{-1}(w) \cap (V_1' \cup \dots \cup V_{m_s}' \cup W_1 \cup \dots \cup W_{n_s}')$.

$p=1$ の時には、上の結果は v -type を R - (0) -type に変えても成立する。Thom-Varičenko 型定理については先に述べた通りであるが、福田の定理 ([3]) は図式の横関係を表わしている事がわかる。更に [6] で構成した example (R - (0) -sufficient でないが、その realization の R - (0) -type は有限個) は、 $w \in V_j$

が、 π_{r+1}^{-1} によって R - C^0 -type の異なる v_i' を選択したと言える。

いわゆる Thom-Vařenko 定理 (mapping の RL - C^0 -type のもの) は、多くの人達によって研究されている (R. Thom [9], A. N. Vařenko [11], T. Fukuda [4], A. du Plessis [8])。最後に、非常に "虫のよい" 問題を掲げておく。

問題. $p \geq 2$ の時、 v -type を RL - C^0 -type に変えても、同じ図式が言えるか (但し、 V_j, W_k 上では (3) の性質は除く事にする) ?

REFERENCES

1. J. Bochnak and W. Kucharz : Sur les germes d'applications différentiables à singularités isolées, Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), 115-131.
2. J. Bochnak and T. C. Kuo : Rigid and finitely V-determined germs of C^∞ mappings, Canad. J. Math. 25(4) (1973), 417-424.
3. T. Fukuda : Types topologiques des polynômes, Publ. Math. I.H.E.S. 46 (1976), 87-106.
4. T. Fukuda : Local topological properties of differentiable mappings. I, Invent. Math. 65 (1981), 227-250.
5. H. King : Topological type of families of singularities.
6. S. Koike and W. Kucharz : Sur les réalisations de jets non suffisants, C. R. Acad. Sc. Paris, t.288 (26 février 1979), Série A 457-459.
7. T. C. Kuo : Characterizations of v-sufficiency of jets, Topology 11 (1972), 115-131.
8. A. du Plessis : On the genericity of topologically finitely-determined map-germs, Topology 21, No. 2 (1982), 131-156.
9. R. Thom : Local topological properties of differentiable mappings, Colloq. on differential analysis, Oxford Univ. Press (1964), 191-202.
10. A. N. Varčenko : Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic varieties and families of polynomial mappings, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 36 (1972), 957-1019 = Math. USSR Izv. 6 (1972), 949-1008.
11. A. N. Varčenko : Local topological properties of differentiable mappings, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38 (1974) = Math. USSR Izv. 8 (1974), 1033-1082.