

構造物の不規則振動における 最大応答の確率分布について

後 藤 尚 男・亀 田 弘 行

ON THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF THE MAXIMUM STRUCTURAL RESPONSE IN RANDOM VIBRATION

By Hisao GOTO and Hiroyuki KAMEDA

Synopsis

The probability distribution of the maximum structural response to a random excitation is discussed. An approximate solution for the basic equation is derived, in which the effect of the correlation between the responses at different instants are taken into account. The results are discussed in comparison with the so-called Poisson process approximation and the experimental data obtained from the numerical simulation.

1. 緒 言

土木・建築構造物に作用する外力は、機械基礎などと異なり、不規則な性質を持つことが多い。その中には交通荷重のように不連続なパルス列とみなせるものもあり、地震力、風力のように連続的に変化する荷重もあるが、これらはいずれも時間的にも空間的にも確定関数として表わすことが困難であり、確率論的な取扱いが重要となる。これらのうち、本研究では主として時間に対して連続的に変化する不規則外力に対する構造物の応答を取り扱う。

構造物の強度を判定する場合にまず関心が持たれることは、将来加えられる外力によってその構造物に生ずる変位、応力などが定められた許容値を超えるか、という問題である。外力が確率現象であれば、構造物の最大応答が許容値を超えない確率、すなわち最大応答の確率分布による評価が行なわれる。ところで一般の不規則外力に対する構造物の最大応答の確率分布を厳密に求めることには種々の困難があって、この方面の研究はあまり多くはなされていない。E. Rosenblueth・J. I. Bustamante 氏は、構造物が white noise で表わされる外力を受けた場合における運動エネルギーとひずみエネルギーの和の平方根にほぼ比例する応答量 r の最大値の確率分布を過渡解の領域で求め、これを耐震設計の立場から検討している¹⁾。両氏の研究は、地震動に対する構造物の最大応答の確率分布に本格的に取り組んだものとしては恐らく最初のものであり、その点での意義は大きい。同時に、外力が white noise に限られていてこれに任意の非定常性、周期特性を与えることができないこと、 r という応答量の最大値が、構造物の固有振動数の大小によって最大変位、最大速度、あるいはそのいずれかに比例することとなり、耐震設計の資料としては明確さに欠けるうらみがあること、などの欠点も持っている。A. M. Freudenthal・篠塚正宣氏は、任意の不規則地震動を受ける構造物の最大応答の確率分布を取り扱い、その上・下界を与える式を誘導している²⁾。しかしこの上・下界は実用的に十分なほどには接近しておらず、場合によっては 1～2 桁の開きがある^{3), 4)}。

また A. G. Davenport 氏⁵⁾、小松定夫氏⁶⁾は、構造物の耐風設計における最大応答の非超過確率の問題を論じている。両氏の研究では、応答を定常過程とするか準定常過程とするかの相違はあるが、いずれもある時刻での構造物の挙動は過去の応答経歴に影響されず、いわゆる Poisson 過程が成り立つとしている。

しかし、構造物の応答がそれ以前の応答特性に影響されるか否かは、主として2時刻間の応答の相関係数、定常過程では自己（または相互）相関関数の性状によって決まるものであり、厳密には、応答自身を white noise とみなせる場合以外には Poisson 過程は成り立たない。構造物の応答は、たとえ定常過程とみなせる場合でも white noise とは考えられないから、Poisson 過程によって最大応答の問題を扱うことは、いかなる場合でも近似解法となる。Poisson 過程による近似は、考えている過程が広帯域の周期特性を持つほど精度が良く、また問題となる応答レベルが十分に高く、応答がそのレベルを超える現象が稀であって、それ以前に同じレベルを超えた時刻での応答の影響を受けない場合に良い精度を与えるものと考えられる。また応答の継続時間が長ければ、低いレベルに対する最大応答の確率分布はゼロに近づき、比較的高いレベルになってはじめてその値を増大することから、継続時間が長いほど Poisson 過程による近似の精度は良くなるであろう。これらの条件が満足されれば、Poisson 過程による近似は意味を持つと考えられるが、たとえば著者らは、地震動の定常部分については Poisson 近似は十分の精度を持つことを確かめている⁷⁾。一方構造物の応答は、線型応答の範囲では、地震動などと異なりきわめて狭帯域の周期特性を持つことが多く、その自己相関関数は容易に減少しないから、構造物の最大応答の問題に Poisson 過程を適用する場合には、精度の検討を十分に行なうべきである。

以上のように、構造物の最大応答の確率分布を表わすことには、なお種々の問題が残されている。本研究で示した解法も最大応答の確率分布を求めるための一つの近似解法であるが、各時刻間での応答の相関の影響をできるだけ取り入れようとしたものである。この解法は外力が任意の確率過程である場合に適用でき、また応答の初期条件も任意に選ぶことができる。

2. 不規則振動論における基礎的確率量

構造物が線型1自由度系で表わされるものとする、その構造物に加速度 $\ddot{z}(t)$ が作用した場合の構造物の運動方程式は、

$$\ddot{y} + 2h_n\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = -\ddot{z}(t) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ただし、 y : 相対変位、 ω_n : 固有円振動数、 h_n : 減衰定数。初期条件として、 $t \leq t_0$ で構造物が静止状態にあったとすると、式(1)の解は、よく知られているように次式で与えられる。

$$y(t) = -\frac{1}{\bar{\omega}_n} \int_{t_0}^t h(t-\tau') \ddot{z}(\tau') d\tau'$$

ただし、

$$h(t-\tau') = e^{-h_n\omega_n(t-\tau')} \sin \bar{\omega}_n(t-\tau'), \quad \bar{\omega}_n = \sqrt{1-h_n^2}\omega_n$$

いま $-\bar{\omega}_n y(t) = x(t)$ とおくと、

$$x(t) = \int_{t_0}^t h(t-\tau') \ddot{z}(\tau') d\tau' \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

同様に

$$\dot{x}(t) = \int_{t_0}^t \dot{h}(t-\tau') \ddot{z}(\tau') d\tau' \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

ただし、

$$\dot{h}(t) = \bar{\omega}_n e^{-h_n\omega_n t} \left(\cos \bar{\omega}_n t - \frac{h_n}{\sqrt{1-h_n^2}} \sin \bar{\omega}_n t \right)$$

本研究では、主として式(2)の $x(t)$ を解析の対象とする。

次に、式(1)の強制項 $\ddot{z}(t)$ が平均値ゼロの確率過程であるとする、時刻 $t=t_1$ における $x(t_1)$ 、 $\dot{x}(t_1)$ の分散 $\sigma_{x^2}(t_1)$ 、 $\sigma_{\dot{x}^2}(t_1)$ はそれぞれ次式より計算される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x^2}(t_1) &= E[x^2(t_1)] = \int_{t_0}^{t_1} h(t_1-\tau') d\tau' \int_{t_0}^{t_1} h(t_1-\tau'') E[\ddot{z}(\tau') \ddot{z}(\tau'')] d\tau'' \\ \sigma_{\dot{x}^2}(t_1) &= E[\dot{x}^2(t_1)] = \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(t_1-\tau') d\tau' \int_{t_0}^{t_1} \dot{h}(t_1-\tau'') E[\ddot{z}(\tau') \ddot{z}(\tau'')] d\tau'' \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (4)$$

ただし $E[z]$ は z の期待値を表わす。また $x(t_1)$ と $x(t_2)$, あるいは $x(t_1)$ と $\dot{x}(t_2)$ の相関係数をそれぞれ $\rho_{xx}(t_1, t_2)$, $\rho_{x\dot{x}}(t_1, t_2)$ で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} \rho_{xx}(t_1, t_2) &= E[x(t_1)x(t_2)]/\{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)\} \\ &= \frac{1}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \int_{t_0}^{t_1} h(t_1-\tau') d\tau' \int_{t_0}^{t_2} h(t_2-\tau'') E[\dot{z}(\tau')\dot{z}(\tau'')] d\tau'' \\ \rho_{x\dot{x}}(t_1, t_2) &= E[x(t_1)\dot{x}(t_2)]/\{\sigma_x(t_1)\sigma_{\dot{x}}(t_2)\} \\ &= \frac{1}{\sigma_x(t_1)\sigma_{\dot{x}}(t_2)} \int_{t_0}^{t_1} h(t_1-\tau') d\tau' \int_{t_0}^{t_2} \dot{h}(t_2-\tau'') E[\dot{z}(\tau')\dot{z}(\tau'')] d\tau'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式(4), (5)は一般の $\dot{z}(t)$ について成り立つが, これらはある条件のもとではかなり簡単な形になる。ここでは, 後の数値計算例で対象とする, $\dot{z}(t), x(t)$ をともに定常確率過程とした場合について述べる。

β を加速度の次元を持つ定数, $g(t)$ を平均値 0, 分散 1 なる無次元定常確率過程として,

$$\dot{z}(t) = \beta g(t) \dots\dots\dots (6)$$

とおき, $g(t)$ のパワースペクトル密度を $S_g(\omega)$ とする。また $x(t)$ が定常確率過程であることは $t_0 = -\infty$ と同等である。このような場合には, 式(4), (5)はスペクトル解析の手法により容易に次式のように書き改められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2(t_1) &= \sigma_x^2 = \beta^2 \bar{\omega}_n^2 \int_0^\infty \frac{S_g(\omega)}{A(\omega)} d\omega \\ \sigma_{\dot{x}}^2(t_1) &= \sigma_{\dot{x}}^2 = \beta^2 \bar{\omega}_n^2 \int_0^\infty \omega^2 \frac{S_g(\omega)}{A(\omega)} d\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{xx}(t_1, t_2) &= \rho_{xx}(t_2 - t_1) = \frac{\beta^2 \bar{\omega}_n^2}{\sigma_x^2} \int_0^\infty \frac{S_g(\omega)}{A(\omega)} \cos \omega(t_2 - t_1) d\omega \\ \rho_{x\dot{x}}(t_1, t_2) &= \rho_{x\dot{x}}(t_2 - t_1) = -\frac{\beta^2 \bar{\omega}_n^2}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \int_0^\infty \omega \frac{S_g(\omega)}{A(\omega)} \sin \omega(t_2 - t_1) d\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ただし, $A(\omega) = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4h_n^2 \omega_n^2 \omega^2$

いま $S_g(\omega)$ として

$$S_g(\omega) = \frac{3}{128 \omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 e^{-4 \frac{\omega}{\omega_0}} \dots\dots\dots (9)$$

なる形を用いると, 式(7), (8)は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\beta}{\omega_0} F_1(\gamma, h_n), \quad \sigma_{\dot{x}} = \beta F_2(\gamma, h_n) \\ \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} &= \omega_0 F_0(\gamma, h_n), \\ \rho_{xx}(t_2 - t_1) &= c_1^*(\gamma, h_n, 2\pi\gamma\delta_{12}) \\ \rho_{x\dot{x}}(t_2 - t_1) &= -c_2^*(\gamma, h_n, 2\pi\gamma\delta_{12}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ただし,

$$\begin{aligned} F_1(\gamma, h_n) &= 8\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - h_n^2} \gamma \left\{ \int_0^\infty \frac{\xi^4 e^{-4\xi} d\xi}{(1 - \gamma^2 \xi^2)^2 + 4h_n^2 \gamma^2 \xi^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ F_2(\gamma, h_n) &= 8\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - h_n^2} \gamma \left\{ \int_0^\infty \frac{\xi^6 e^{-4\xi} d\xi}{(1 - \gamma^2 \xi^2)^2 + 4h_n^2 \gamma^2 \xi^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ F_0(\gamma, h_n) &= F_2(\gamma, h_n)/F_1(\gamma, h_n) \\ c_1^*(\gamma, h_n, \phi_{12}) &= \frac{128}{3} \frac{\gamma^2(1 - h_n^2)}{F_1^2(\gamma, h_n)} \int_0^\infty \frac{\xi^4 e^{-4\xi} \cos \phi_{12} \xi}{(1 - \gamma^2 \xi^2)^2 + 4h_n^2 \gamma^2 \xi^2} d\xi \\ c_2^*(\gamma, h_n, \phi_{12}) &= \frac{128}{3} \frac{\gamma^2(1 - h_n^2)}{F_1(\gamma, h_n) F_2(\gamma, h_n)} \int_0^\infty \frac{\xi^5 e^{-4\xi} \sin \phi_{12} \xi}{(1 - \gamma^2 \xi^2)^2 + 4h_n^2 \gamma^2 \xi^2} d\xi \end{aligned}$$

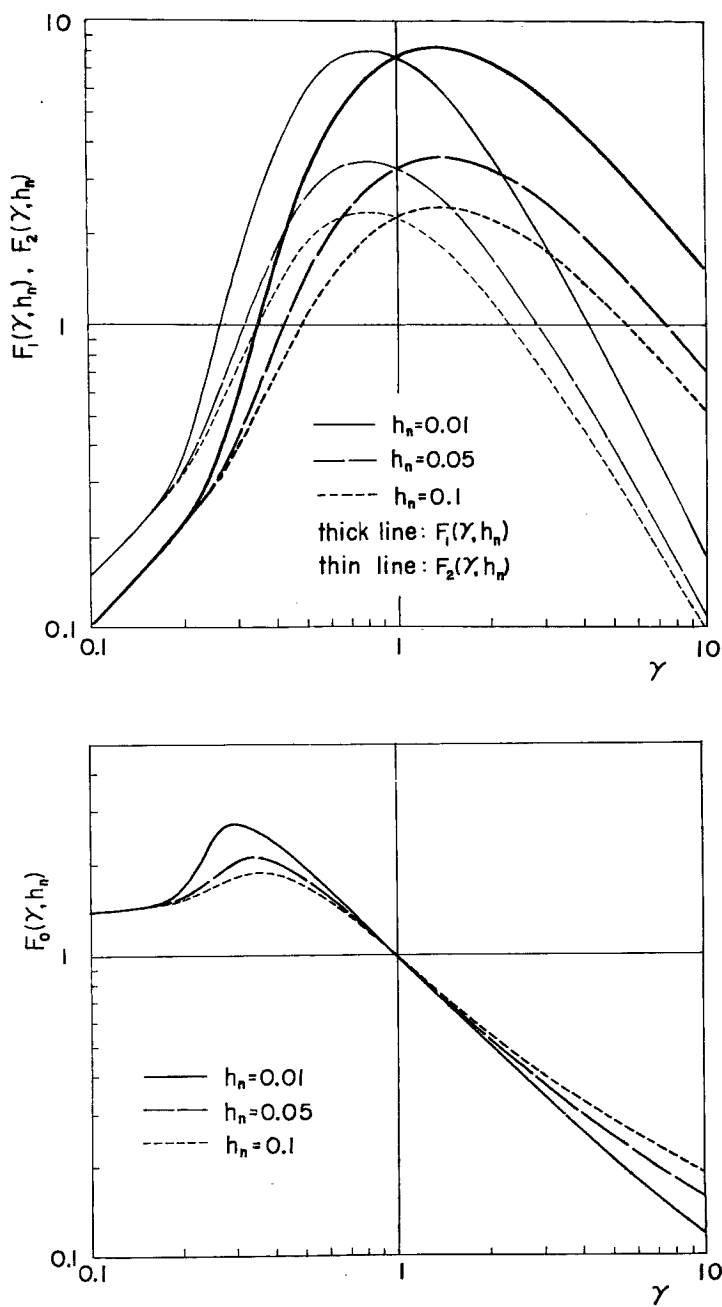


Fig. 1 Standard Deviation of Structural Response

$$\gamma = \frac{T_n}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega_n}, \quad \phi_{12} = 2\pi\gamma\delta_{12}, \quad \delta_{12} = \frac{t_2 - t_1}{T_n}$$

$T_n = 2\pi/\omega_n$: 構造物の固有周期, $T_0 = 2\pi/\omega_0$: $x(t)$ の卓越周期

Fig. 1 に $F_1(\gamma, h_n)$, $F_2(\gamma, h_n)$, $F_0(\gamma, h_n)$, Fig. 2 に $c_1^*(\gamma, h_n, 2\pi\gamma\delta)$, $-c_2^*(\gamma, h_n, 2\pi\gamma\delta)$ の値を示した。

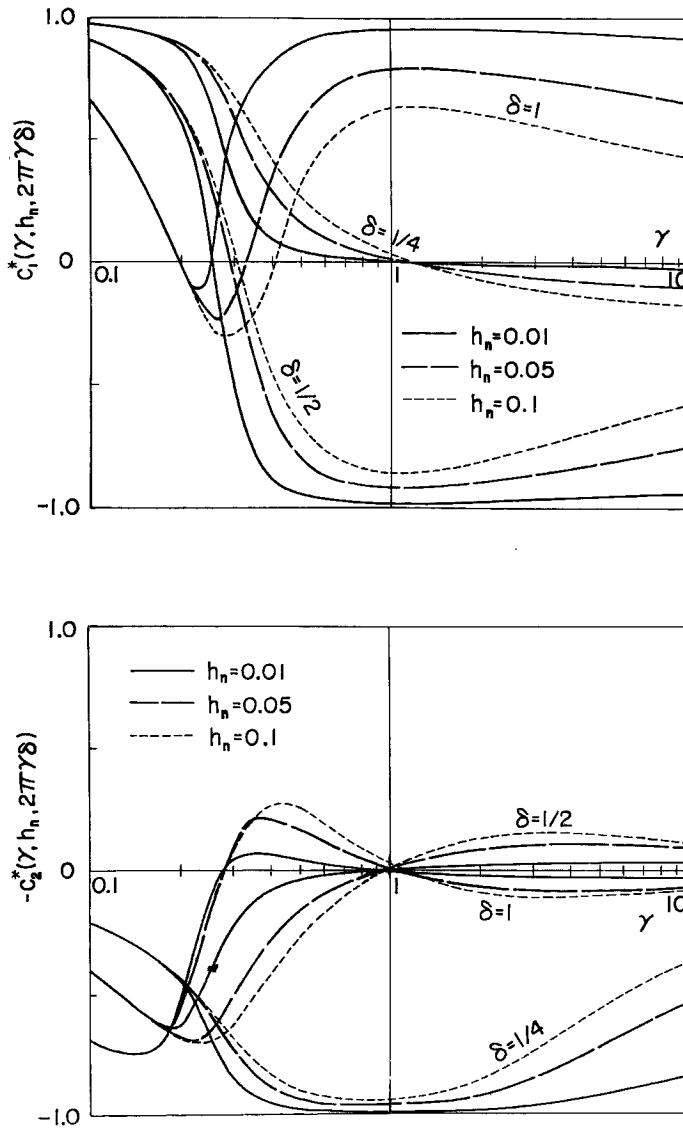


Fig. 2 Correlation Coefficient of Structural Response

3. 最大応答の確率分布

(1) 基 本 解

前節の式(2)における応答 $x(t)$ の $0 \leq t \leq \tau$ における絶対最大値を R とすると, R の確率分布 $\Phi(R, \tau)$ は次式のように表わすことができる。

$$\Phi(R, \tau) = P[\max |x(t)| \leq R; 0 \leq t \leq \tau] \dots\dots\dots(11)$$

ただし $P[A]$ は事象 A の起る確率を表わす。この $\Phi(R, \tau)$ がここで求めようとする最大応答の確率分布である。次に, $P_0(R, t)$, $c_0(R, t)$ なる確率量を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} P_0(R, t) &= P[\{\max |x(t')| \leq R \mid x(0) \leq R\}; 0 < t' \leq t] \\ c_0(R, t) dt &= P[\{|x(t+dt)| > R \mid \max |x(t'')| \leq R\}; 0 \leq t'' \leq t] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ただし $P[A|B]$ は事象 B が起った場合に事象 A が起る条件付確率である。これらを用いると次式が得られる。

$$P_0(R, t+dt) = P_0(R, t) \{1 - c_0(R, t) dt\}$$

したがって,

$$\frac{dP_0(R, t)}{dt} = -c_0(R, t) P_0(R, t) \dots\dots\dots(13)$$

式(13)を解くための初期条件は, 式(12)の第1式より

$$P_0(R, 0) = 1$$

これを用いて式(13)を解くと,

$$P_0(R, \tau) = \exp \left\{ - \int_0^\tau c_0(R, t) dt \right\} \dots\dots\dots(14)$$

をうる。さらに式(14)を式(11)に用いると, 最大応答の確率分布 $\Phi(R, \tau)$ が次式のように求められる。

$$\Phi(R, \tau) = a_0(R) \exp \left\{ - \int_0^\tau c_0(R, t) dt \right\} \dots\dots\dots(15)$$

ただし, $a_0(R) = P[|x(0)| \leq R]$

(2) 近 似 解

式(15)の $\Phi(R, \tau)$ は, 構造物の最大応答の確率分布に対する厳密解を与えるが, 同式右辺中の $c_0(R, t)$ を求めることが困難なために, このままでは $\Phi(R, \tau)$ を計算することができない。そこで $c_0(R, t)$ を近似的に表わすを試みる。式(12)の第2式を次のように書き改めることができる。

$$\begin{aligned} c_0(R, t) dt &= P[\{|x(t+dt)| > R \mid \max |x(t'')| \leq R\}; 0 \leq t'' \leq t] \\ &= \frac{P[\{|x(t+dt)| > R \cap \max |x(t'')| \leq R\}; 0 \leq t'' \leq t]}{P[\max |x(t'')| \leq R; 0 \leq t'' \leq t]} \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

式(16)は連続的なパラメーター t'' について満足されねばならないが, いま

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots\dots\dots < t_{\tau(t)} < t$$

なる有限個の時刻について同式を満足するような値 $\bar{c}_0(R, t)$ によって $c_0(R, t)$ を近似する。

すなわち

$$\Phi(R, \tau) \cong a_0(R) \exp \left\{ - \int_0^\tau \bar{c}_0(R, t) dt \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここに,

$$\bar{c}_0(R, t) dt = \frac{P[\{|x(t+dt)| > R \cap |x(t)| \leq R\} \cap \{\bigcap_{k=1}^{\tau(t)} |x(t_k)| \leq R\}]}{P[|x(t)| \leq R \cap \{\bigcap_{k=1}^{\tau(t)} |x(t_k)| \leq R\}]} = \frac{Q_1(R, t)}{Q_2(R, t)} dt \dots\dots\dots(18)$$

ただし,

$$Q_1(R, t)dt = P[\{|x(t+dt)| > R \cap |x(t)| \leq R\} \cap \{\bigcap_{k=1}^{r(t)} |x(t_k)| \leq R\}]$$

$$Q_2(R, t) = P[|x(t)| \leq R \cap \{\bigcap_{k=1}^{r(t)} |x(t_k)| \leq R\}]$$

以下簡単のため $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$, $\dots$, $x_r = x(t_r)$, $x_t = x(t)$, $\dot{x}_t = \dot{x}(t)$ として議論を進める。

ある時刻において不規則雑音があるレベルを超える問題は S. O. Rice 氏によって論じられたが⁸⁾, その手法を多次元確率変数の場合に適用すると, $Q_1(R, t)$, $Q_2(R, t)$ は次式により表わされる。

$$Q_1(R, t) = \int_{-R}^R dx_1 \int_{-R}^R dx_2 \cdots \int_{-R}^R \left\{ \int_{-\infty}^0 |\dot{x}_t| \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_r, -R, \dot{x}_t) d\dot{x}_t \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \dot{x}_t \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_r, R, \dot{x}_t) d\dot{x}_t \right\} dx_r \cdots \quad (19)$$

$$Q_2(R, t) = \int_{-R}^R dx_1 \int_{-R}^R dx_2 \cdots \int_{-R}^R dx_r \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_r, x_t) dx_t \quad (20)$$

ここに, $\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_r, x_t, \dot{x}_t)$ は $x_1, x_2, \dots, x_r, x_t, \dot{x}_t$ の, $\phi_2(x_1, x_2, \dots, x_r, x_t)$ は $x_1, x_2, \dots, x_r, x_t$ のそれぞれ同時確率密度関数を表わす。また,

$$\xi_i = x_i / \sigma_i; \quad (i=1, 2, \dots, r(t)) \\ \xi_t = x_t / \sigma_t, \quad \dot{\xi}_t = \dot{x}_t / \sigma_v \\ \sigma_i = \{E[x_i^2]\}^{1/2}; \quad (i=1, 2, \dots, r(t)) \\ \sigma_t = \{E[x_t^2]\}^{1/2}, \quad \sigma_v = \{E[\dot{x}_t^2]\}^{1/2} \\ \phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t, \dot{\xi}_t) / (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r \sigma_t \sigma_v) = \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_r, x_t, \dot{x}_t) \\ \phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t) / (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r \sigma_t) = \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_r, x_t) \quad (21)$$

によって変数を無次元化すると,

$$Q_1(R, t) = \frac{\sigma_v}{\sigma_t} \int_{-\frac{R}{\sigma_1}}^{\frac{R}{\sigma_1}} d\xi_1 \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} d\xi_2 \cdots \int_{-\frac{R}{\sigma_r}}^{\frac{R}{\sigma_r}} \left\{ \int_{-\infty}^0 |\dot{\xi}_t| \phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, -\frac{R}{\sigma_t}, \dot{\xi}_t) d\dot{\xi}_t \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \dot{\xi}_t \phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \frac{R}{\sigma_t}, \dot{\xi}_t) d\dot{\xi}_t \right\} d\xi_r \cdots \quad (22)$$

$$Q_2(R, t) = \int_{-\frac{R}{\sigma_1}}^{\frac{R}{\sigma_1}} d\xi_1 \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} d\xi_2 \cdots \int_{-\frac{R}{\sigma_r}}^{\frac{R}{\sigma_r}} d\xi_r \int_{-\frac{R}{\sigma_t}}^{\frac{R}{\sigma_t}} \phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t) d\xi_t \quad (23)$$

式 (19)~(23) における確率密度関数の形は任意であるが, 以下に実用上最も重要な正規分布の場合について述べる。平均値ゼロなる n 個の確率変数 $w_1, w_2, \dots, w_n$ に関する n 次元正規確率密度関数 $\phi(w)$ は次式で表わされる。

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \Lambda}} \exp\left(-\frac{1}{2} w^T \Gamma w\right) \quad (24)$$

ただし, $\Gamma = \Lambda^{-1}$, $\Lambda = \det \Lambda$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{ij} = E[w_i w_j]; \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

構造物に作用する外力が正規分布をなす場合には応答 $x(t)$ も正規分布を持つが, この場合, 式 (19)~(23) に現われる同時確率密度関数は, それぞれの変数について式 (24) と同様の形をとる。また $Q_1(R, t)$,

$Q_2(R, t)$ を与える多重積分の積分回数を 1 回減ずることができる。すなわち、正規分布の場合には、最大応答の確率分布を近似的に与える式 (17) は次のように書き改められる。

$$\Phi(R, \tau) \cong \text{erf} \left(\frac{R}{\sqrt{2} \sigma_t} \right) \exp \left\{ - \int_0^\tau \bar{c}_0(R, t) dt \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\bar{c}_0(R, t) = Q_1(R, t) / Q_2(R, t)$$

$$\begin{aligned} Q_1(R, t) = & \frac{1}{\mu_{vv} \sqrt{(2\pi)^{r+2} C_1}} \frac{\sigma_n}{\sigma_t} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left(\mu_{tt} - \frac{\mu_{tv}^2}{\mu_{vv}} \right) \left(\frac{R}{\sigma_t} \right)^2 \right\} \\ & \times \int_{-\frac{R}{\sigma_1}}^{\frac{R}{\sigma_1}} d\xi_1 \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} d\xi_2 \cdots \int_{-\frac{R}{\sigma_r}}^{\frac{R}{\sigma_r}} \left[\exp \left(- \frac{u_1}{2} \right) \left\{ \exp \left(- \frac{v_1^2}{2} \right) \right. \right. \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_1 \left(1 + \text{erf} \left(\frac{v_1}{\sqrt{2}} \right) \right) \left. \right\} + \exp \left(- \frac{u_2}{2} \right) \left\{ \exp \left(- \frac{v_2^2}{2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_2 \left(1 + \text{erf} \left(\frac{v_2}{\sqrt{2}} \right) \right) \right\} \right] d\xi_r \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ただし、

$$u_1 = u_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_{ij} \xi_i \xi_j - \frac{1}{\mu_{vv}} \left(\sum_{i=1}^r \mu_{iv} \xi_i \right)^2 + 2 \left\{ \sum_{i=1}^r \left(\mu_{it} - \frac{\mu_{tv} \mu_{iv}}{\mu_{vv}} \right) \xi_i \right\} \left(\frac{R}{\sigma_t} \right)$$

$$u_2 = u_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_{ij} \xi_i \xi_j - \frac{1}{\mu_{vv}} \left(\sum_{i=1}^r \mu_{iv} \xi_i \right)^2 - 2 \left\{ \sum_{i=1}^r \left(\mu_{it} - \frac{\mu_{tv} \mu_{iv}}{\mu_{vv}} \right) \xi_i \right\} \left(\frac{R}{\sigma_t} \right)$$

$$v_1 = v_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = - \frac{1}{\sqrt{\mu_{vv}}} \left(\mu_{tv} \frac{R}{\sigma_t} + \sum_{i=1}^r \mu_{iv} \xi_i \right)$$

$$v_2 = v_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = - \frac{1}{\sqrt{\mu_{vv}}} \left(\mu_{tv} \frac{R}{\sigma_t} - \sum_{i=1}^r \mu_{iv} \xi_i \right)$$

$$C_1 = \det C_1, \quad [\mu_{ij}] = C_1^{-1}$$

$$\mu_{it} = \mu_{ti} = \mu_{i, r+1} = \mu_{r+1, i}, \quad \mu_{iv} = \mu_{vi} = \mu_{i, r+2} = \mu_{r+2, i}$$

$$\mu_{tv} = \mu_{vt} = \mu_{r+1, r+2} = \mu_{r+2, r+1}, \quad \mu_{tt} = \mu_{r+1, r+1}, \quad \mu_{vv} = \mu_{r+2, r+2}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1r} & \rho_{1t} & \rho_{1v} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2r} & \rho_{2t} & \rho_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{r1} & \rho_{r2} & \cdots & 1 & \rho_{rt} & \rho_{rv} \\ \rho_{t1} & \rho_{t2} & \cdots & \rho_{tr} & 1 & \rho_{tv} \\ \rho_{v1} & \rho_{v2} & \cdots & \rho_{vr} & \rho_{vt} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{ij} = \rho_{ji} = E[\xi_i \xi_j], \quad \rho_{it} = \rho_{ti} = E[\xi_i \xi_t]$$

$$\rho_{iv} = \rho_{vi} = E[\xi_i \xi_v], \quad \rho_{tv} = \rho_{vt} = E[\xi_t \xi_v]$$

$$\begin{aligned} Q_2(R, t) = & \frac{1}{2 \sqrt{(2\pi)^{r+2} C_0}} \int_{-\frac{R}{\sigma_1}}^{\frac{R}{\sigma_1}} d\xi_1 \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} d\xi_2 \cdots \int_{-\frac{R}{\sigma_r}}^{\frac{R}{\sigma_r}} \exp \left(- \frac{u_0}{2} \right) \left\{ \text{erf} \left(\frac{\sqrt{\kappa_{tt}} \frac{R}{\sigma_t} + v_0}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ & \left. + \text{erf} \left(\frac{\sqrt{\kappa_{tt}} \frac{R}{\sigma_t} - v_0}{\sqrt{2}} \right) \right\} d\xi_r \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ただし、

$$u_0 = u_0(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \kappa_{ij} \xi_i \xi_j - v_0^2$$

$$v_0 = v_0(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) = - \frac{1}{\sqrt{\kappa_{tt}}} \sum_{i=1}^r \kappa_{it} \xi_i$$

$$C_0 = \det C_0, \quad [\kappa_{ij}] = C_0^{-1}$$

$$\kappa_{tt} = \kappa_{tt} = \kappa_{t, r+1} = \kappa_{r+1, t}, \quad \kappa_{tt} = \kappa_{r+1, r+1}$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1r} & \rho_{1t} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2r} & \rho_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{r1} & \rho_{r2} & \cdots & 1 & \rho_{rt} \\ \rho_{t1} & \rho_{t2} & \cdots & \rho_{tr} & 1 \end{pmatrix}$$

以下に、 $r=0, 1, 2$ の場合に関する $Q_1(R, t)$, $Q_2(R, t)$ の表示式を示しておく。ただし、 $r=0, 1, 2$ に対応して、式中に現われる諸量には適宜 0, 1, 2 なる添字を付けてある。

i) $r=0$ の場合

$$Q_{1,0}(R, t) = \frac{\sqrt{1-\rho_{tv}^2}}{\pi} \frac{\sigma_v}{\sigma_t} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{\sigma_t} \right)^2 \right\} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\rho_{tv}^2}{1-\rho_{tv}^2} \left(\frac{R}{\sigma_t} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_{tv}}{\sqrt{1-\rho_{tv}^2}} \frac{R}{\sigma_t} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\rho_{tv}}{\sqrt{2(1-\rho_{tv}^2)}} \frac{R}{\sigma_t} \right) \right\} \right] \cdots \cdots (28)$$

$$Q_{2,0}(R, t) = \operatorname{erf} \left(\frac{R}{\sqrt{2} \sigma_t} \right) \cdots \cdots (29)$$

これは $t=t$ における応答がそれ以前の応答経歴に影響されないと仮定する場合で、応答を定常過程と考える場合に Poisson 過程が成立するものと仮定することに相当する。

ii) $r=1$ の場合

$$Q_{1,1}(R, t) = \frac{1}{\mu_{vv,1} \sqrt{2\pi^3 C_{1,1}}} \frac{\sigma_v}{\sigma_t} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\mu_{tt,1} - \frac{\mu_{tv,1}^2}{\mu_{vv,1}} \right) \left(\frac{R}{\sigma_t} \right)^2 \right\} \\ \times \int_0^R \left[\exp \left(-\frac{u_{1,1}}{2} \right) \left\{ \exp \left(-\frac{v_{1,1}^2}{2} \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_{1,1} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{v_{1,1}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right\} \right. \\ \left. + \exp \left(-\frac{u_{2,1}}{2} \right) \left\{ \exp \left(-\frac{v_{2,1}^2}{2} \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_{2,1} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{v_{2,1}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right\} \right] d\xi_1 \cdots \cdots (30)$$

$$u_{1,1} = u_{1,1}(\xi_1) = \left(\mu_{11,1} - \frac{\mu_{1v,1}^2}{\mu_{vv,1}} \right) \xi_1^2 + 2 \left(\mu_{1t,1} - \frac{\mu_{tv,1} \mu_{1v,1}}{\mu_{vv,1}} \right) \frac{R}{\sigma_t} \xi_1$$

$$u_{2,1} = u_{2,1}(\xi_1) = \left(\mu_{11,1} - \frac{\mu_{1v,1}^2}{\mu_{vv,1}} \right) \xi_1^2 - 2 \left(\mu_{1t,1} - \frac{\mu_{tv,1} \mu_{1v,1}}{\mu_{vv,1}} \right) \frac{R}{\sigma_t} \xi_1$$

$$v_{1,1} = v_{1,1}(\xi_1) = -\frac{1}{\sqrt{\mu_{vv,1}}} \left(\mu_{tv,1} \frac{R}{\sigma_t} + \mu_{1v,1} \xi_1 \right)$$

$$v_{2,1} = v_{2,1}(\xi_1) = -\frac{1}{\sqrt{\mu_{vv,1}}} \left(\mu_{tv,1} \frac{R}{\sigma_t} - \mu_{1v,1} \xi_1 \right)$$

$$C_{1,1} = 1 - \rho_{1t}^2 - \rho_{tv}^2 - \rho_{v1}^2 + 2\rho_{1t}\rho_{tv}\rho_{v1}$$

$$\mu_{11,1} = (1 - \rho_{1t}^2)/C_{1,1}, \quad \mu_{1t,1} = (\rho_{tv}\rho_{v1} - \rho_{1t})/C_{1,1}$$

$$\mu_{1v,1} = (\rho_{1t}\rho_{tv} - \rho_{v1})/C_{1,1}, \quad \mu_{tt,1} = (1 - \rho_{v1}^2)/C_{1,1}$$

$$\mu_{tv,1} = (\rho_{v1}\rho_{1t} - \rho_{tv})/C_{1,1}, \quad \mu_{vv} = (1 - \rho_{1t}^2)/C_{1,1}$$

$$Q_{2,1}(R, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \int_0^R} \exp \left(-\frac{\xi_1^2}{2} \right) \left[\operatorname{erf} \left\{ \frac{(R/\sigma_t) + \rho_{1t}\xi_1}{\sqrt{2(1-\rho_{1t}^2)}} \right\} + \operatorname{erf} \left\{ \frac{(R/\sigma_t) - \rho_{1t}\xi_1}{\sqrt{2(1-\rho_{1t}^2)}} \right\} \right] d\xi_1 \cdots \cdots (31)$$

iii) $r=2$ の場合

$$Q_{1,2}(R, t) = \frac{1}{2\pi^2 \mu_{vv,2} \sqrt{C_{1,2}}} \frac{\sigma_v}{\sigma_t} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\mu_{tt,2} - \frac{\mu_{tv,2}^2}{\mu_{vv,2}} \right) \left(\frac{R}{\sigma_t} \right)^2 \right\} \\
\times \int_0^{\frac{R}{\sigma_1}} d\xi_1 \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} \left[\exp \left(-\frac{u_{1,2}}{2} \right) \left\{ \exp \left(-\frac{v_{1,2}}{2} \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_{1,2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{v_{1,2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right\} \right. \\
\left. + \exp \left(-\frac{u_{2,2}}{2} \right) \left\{ \exp \left(-\frac{v_{2,2}}{2} \right) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} v_{2,2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{v_{2,2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right\} \right] d\xi_2 \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$u_{1,2} = u_{1,2}(\xi_1, \xi_2) = \left(\mu_{11,2} - \frac{\mu_{1v,2}^2}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_1^2 + 2 \left(\mu_{12,2} - \frac{\mu_{1v,2} \mu_{2v,2}}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_1 \xi_2 \\
+ \left(\mu_{22,2} - \frac{\mu_{2v,2}^2}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_2^2 + 2 \frac{R}{\sigma_t} \left\{ \left(\mu_{1t,2} - \frac{\mu_{tv,2} \mu_{1v,2}}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_1 + \left(\mu_{2t,2} - \frac{\mu_{tv,2} \mu_{2v,2}}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_2 \right\}$$

$$u_{2,2} = u_{2,2}(\xi_1, \xi_2) = \left(\mu_{11,2} - \frac{\mu_{1v,2}^2}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_1^2 + 2 \left(\mu_{12,2} - \frac{\mu_{1v,2} \mu_{2v,2}}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_1 \xi_2 \\
+ \left(\mu_{22,2} - \frac{\mu_{2v,2}^2}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_2^2 - 2 \frac{R}{\sigma_t} \left\{ \left(\mu_{1t,2} - \frac{\mu_{tv,2} \mu_{1v,2}}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_1 + \left(\mu_{2t,2} - \frac{\mu_{tv,2} \mu_{2v,2}}{\mu_{vv,2}} \right) \xi_2 \right\}$$

$$v_{1,2} = v_{1,2}(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{\sqrt{\mu_{vv,2}}} \left(\mu_{tv,2} \frac{R}{\sigma_t} + \mu_{1v,2} \xi_1 + \mu_{2v,2} \xi_2 \right)$$

$$v_{2,2} = v_{2,2}(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{\sqrt{\mu_{vv,2}}} \left(\mu_{tv,2} \frac{R}{\sigma_t} - \mu_{1v,2} \xi_1 - \mu_{2v,2} \xi_2 \right)$$

$$C_{1,2} = \det C_{1,2}, \quad [\mu_{tj,2}] = C_{1,2}^{-1}$$

$$\mu_{tt,2} = \mu_{tt,2} = \mu_{tt,2} = \mu_{tt,2}, \quad \mu_{tt,2} = \mu_{tt,2}$$

$$\mu_{tv,2} = \mu_{tv,2} = \mu_{tv,2} = \mu_{tv,2}, \quad \mu_{vv,2} = \mu_{vv,2}$$

$$C_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{1t} & \rho_{1v} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{2t} & \rho_{2v} \\ \rho_{t1} & \rho_{t2} & 1 & \rho_{tv} \\ \rho_{v1} & \rho_{v2} & \rho_{vt} & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{2,2}(R, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\kappa_{tt,2} C_{0,2}}} \int_0^{\frac{R}{\sigma_1}} d\xi_1 \int_{-\frac{R}{\sigma_2}}^{\frac{R}{\sigma_2}} \exp \left(-\frac{u_{0,2}}{2} \right) \left[\operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\kappa_{tt,2}} (R/\sigma_t) + v_{0,2}}{\sqrt{2}} \right\} \right. \\
\left. + \operatorname{erf} \left\{ \frac{\sqrt{\kappa_{tt,2}} (R/\sigma_t) - v_{0,2}}{\sqrt{2}} \right\} \right] d\xi_2 \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$u_{0,2} = u_{0,2}(\xi_1, \xi_2) = \left(\kappa_{11,2} - \frac{\kappa_{1t,2}^2}{\kappa_{tt,2}} \right) \xi_1^2 + 2 \left(\kappa_{12,2} - \frac{\kappa_{1t,2} \kappa_{2t,2}}{\kappa_{tt,2}} \right) \xi_1 \xi_2 + \left(\kappa_{22,2} - \frac{\kappa_{2t,2}^2}{\kappa_{tt,2}} \right) \xi_2^2$$

$$v_{0,2} = v_{0,2}(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{\sqrt{\kappa_{tt,2}}} (\kappa_{1t,2} \xi_1 + \kappa_{2t,2} \xi_2)$$

$$C_{0,2} = 1 - \rho_{12}^2 - \rho_{2t}^2 - \rho_{t1}^2 + 2\rho_{12}\rho_{2t}\rho_{t1}$$

$$\kappa_{11,2} = (1 - \rho_{2t}^2)/C_{0,2}, \quad \kappa_{12,2} = (\rho_{2t}\rho_{t1} - \rho_{12})/C_{0,2}$$

$$\kappa_{22,2} = (1 - \rho_{t1}^2)/C_{0,2}, \quad \kappa_{1t,2} = (\rho_{12}\rho_{2t} - \rho_{t1})/C_{0,2}$$

$$\kappa_{2t,2} = (\rho_{t1}\rho_{12} - \rho_{2t})/C_{0,2}, \quad \kappa_{tt,2} = (1 - \rho_{12}^2)/C_{0,2}$$

4. 正規定常過程の場合への応用例

前節で述べた解法の応用例として、入力 $z(t)$ 、応答 $x(t)$ がいずれも正規定常過程とみなせる場合について計算を行なった。 $z(t)$ として式 (6), (9) の形を採用すると、応答 $x(t)$, $\dot{x}(t)$ に関する標準偏差、相関係数は式 (10) で与えられる。数値計算は $r=0, 1, 2$ の場合について行なったが、 $r=1, 2$ に対する t_k としては次の 2 通りを考えた。すなわち、 $\delta_k = (t - t_k)/T_n$ に対して

case I: $r=1$ の場合 $\delta_1=1/4$

$r=2$ の場合 $\delta_1=1/2, \delta_2=1/4$

case II: $r=1$ の場合 $\delta_1=1/2$

$r=2$ の場合 $\delta_1=1, \delta_2=1/2$

以上の条件のもとでは、式 (25) 右辺の積分は式 (28)~(33) を用いて次のように書ける。

i) $r=0$ の場合

$$\int_0^\tau \bar{c}_0(R, t) dt = \tau \frac{Q_{1,0}(R)}{Q_{2,0}(R)} \dots\dots\dots (34)$$

ii) $r=1$ の場合

$$\int_0^\tau \bar{c}_0(R, t) dt = (\tau - \delta_1 T_n) \frac{Q_{1,1}(R)}{Q_{2,1}(R)} + \delta_1 T_n \frac{Q_{1,0}(R)}{Q_{2,0}(R)} \dots\dots\dots (35)$$

iii) $r=2$ の場合

$$\int_0^\tau \bar{c}_0(R, t) dt = (\tau - \delta_1 T_n) \frac{Q_{1,2}(R)}{Q_{2,2}(R)} + (\delta_1 - \delta_2) T_n \frac{Q_{1,1}(R)}{Q_{2,1}(R)} + \delta_2 T_n \frac{Q_{1,0}(R)}{Q_{2,0}(R)} \dots\dots\dots (36)$$

式 (34)~(36) を式 (25) に用いると、最大応答の確率分布 $\Phi(R, \tau)$ の近似値が算出される。また他の諸定数には次の数値を用いた。 $h_n=0.05, 0.10, \gamma=0.5, 1.0, 2.0, \tau/T_0=5, 20$

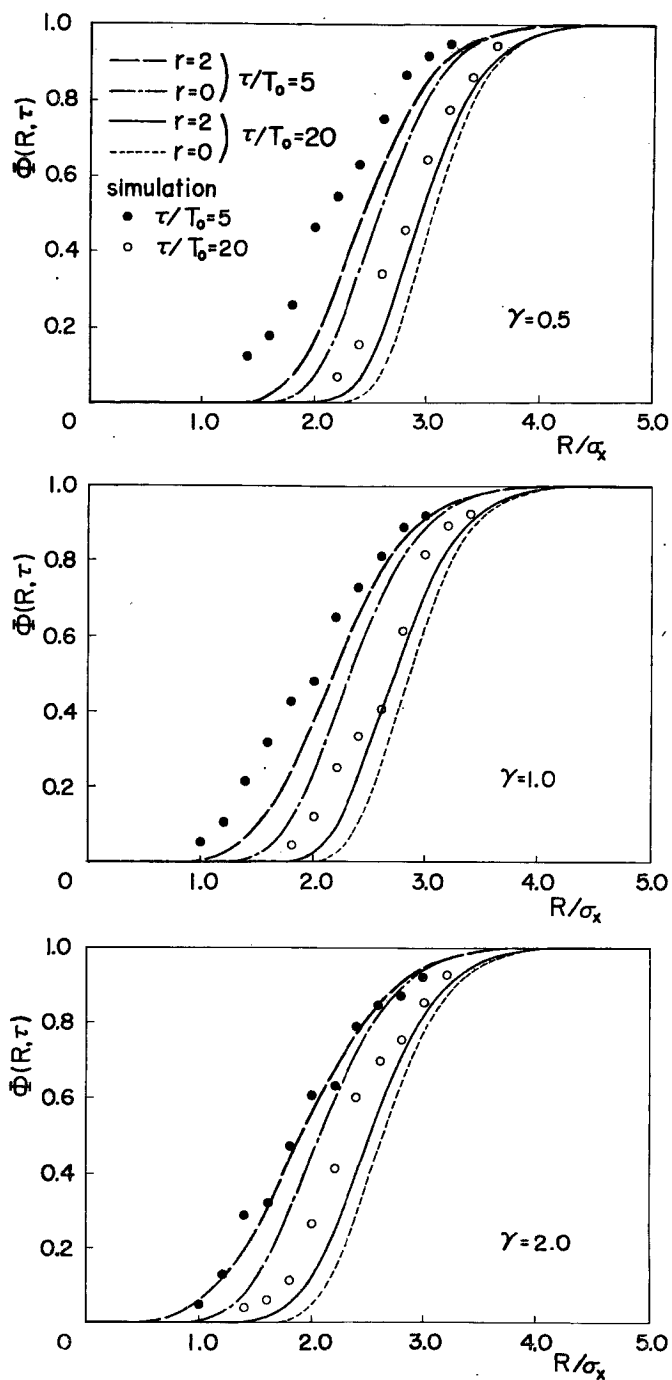
以上の理論計算に加えて、 $\Phi(R, \tau)$ を実験的に推定する方法として、構造物の不規則応答のシミュレーションを行なった。本計算例における $x(t)$ のパワースペクトル密度 $S_x(\omega)$ は、式 (7) の第 1 式右辺の被積分関数で与えられるから、

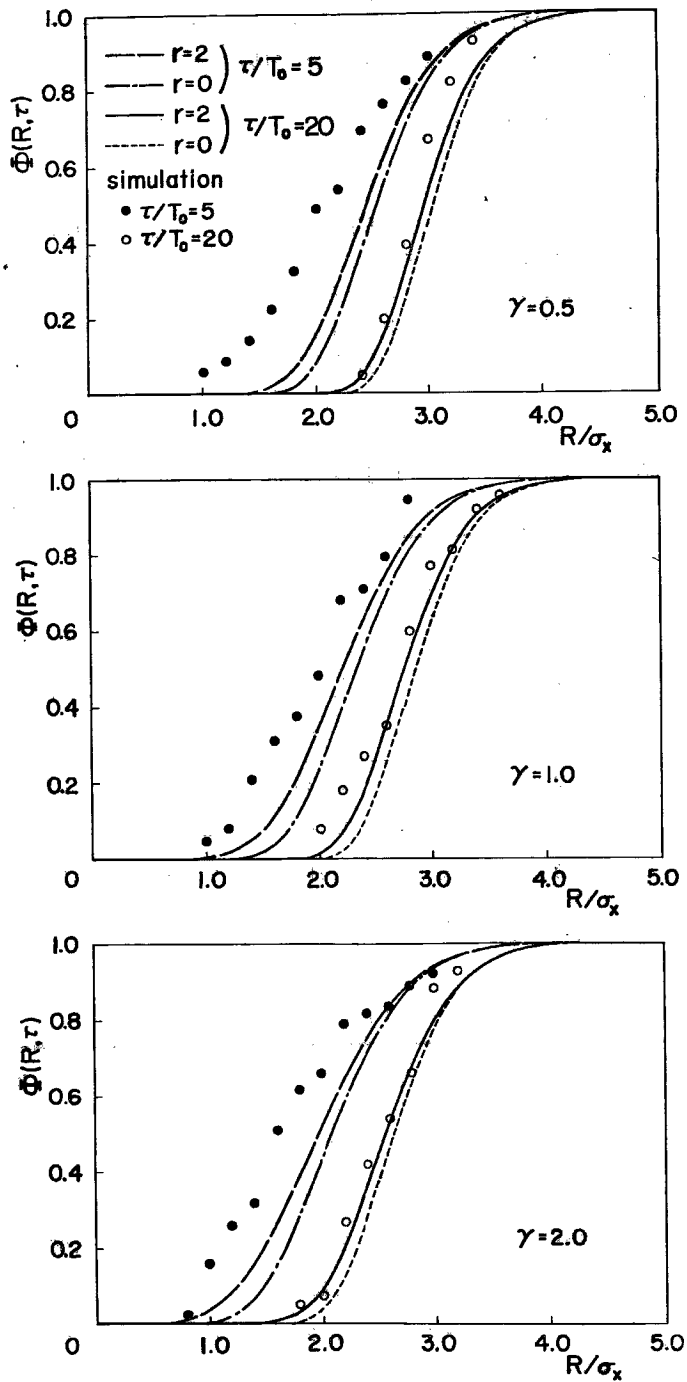
$$S_x(\omega) = \beta^2 \bar{\omega}_n^2 S_g(\omega) / A(\omega)$$

このような $S_x(\omega)$ をパワースペクトル密度とする定常確率過程をディジタル計算機上で発生させ、その最大値を読みとり、それらの累積頻度より最大応答の確率分布を実験的に求めた。一つの確率分布に用いた最大応答の標本数は 36~41 である。またシミュレーションは、著者の 1 人と土岐憲三・秋吉 卓氏による方法⁹⁾ によった。

計算結果を Fig. 3, Table 1 に示した。Fig. 3 は $\Phi(R, \tau)$ の値を示しており、横軸の R は $x(t)$ の標準偏差 σ_x で無次元化してある。同図の $r=0$ は、最大応答を Poisson 過程によって取り扱う場合に相当し、 $r=2$ に対する値は本研究の解法から算出された精度のより高い近似値である。これらと比較すると、 $h_n, \tau/T_0, R/\sigma_x$ が大きいほど両者の差異は小さくなる。これは、応答が広帯域であるほど、応答レベルが高いほど、そして継続時間が長いほど Poisson 過程による近似の精度が良くなるという、1. の所論を裏付けている。しかし本節の計算の範囲では、 r の変化に対する $\Phi(R, \tau)$ の差異は全体として明瞭であり、構造物の最大応答を Poisson 過程によって処理する場合には、継続時間が相当長くない限り、無視できない程度の誤差が含まれるであろうことがわかる。

次に、これらの計算結果とシミュレーションによる実験結果とを比較する。シミュレーションにおける標本数が十分でないために数値的に詳細な議論はできないが、確率分布の実験値は、 $r=0, 2$ いずれの場合も理論値より大きい傾向を示しており、 $\Phi(R, \tau)$ の真の値が実験値の付近にあるとすれば、Poisson 過程による近似 ($r=0$) の精度はさらに低下することになる。また $r=2$ について見ると、 $\tau/T_0=20$ に対しては実

Fig. 3 (a) Probability Distribution of the Maximum Response ($h_n=0.05$)


 Fig. 3 (b) Probability Distribution of the Maximum Response ($h_n=0.1$)

験値と理論値は比較的よく対応している。これに対し $\tau/T_0=5$ では実験値と理論値の差がかなり大きく、継続時間がこのように短い場合には理論値は良い近似解とはいえないことを示している。さらに高い精度を得るためには r をより大きくすればよいが、数値計算に要する時間は飛躍的に増大する。Fig. 3 は case I に対する結果であるが、case II についても同様の結果が得られた。

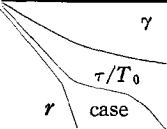
Table 1 は、最大応答の期待値 $E[R]$ を

$$E[R] = \int_0^{\infty} \{1 - \Phi(R, \tau)\} dR$$

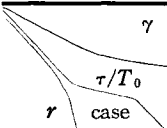
より算出し、 σ_a との比の形で示したものである。Fig. 3 に対する上記の議論は Table 1 についても当てはまるが、同表にはさらに $r=0, 1, 2$ における case I, case II に対する計算結果を一括して示した。これによると、 $r=2$ に対しては case I, II による $E[R]/\sigma_a$ の差異は小さいのに対し、 $r=1$ の場合には case I より case II の方が $r=2$ の場合に近い計算結果を与えている。したがって $r=1$ として $\Phi(R, \tau)$ の近似計算を行なう場合には、case II による方が精度が良い。

Table 1 Expected Value $E[R]/\sigma_a$ of the Maximum Response

(a) $h_n=0.05$

		0.5		1.0		2.0	
		5	20	5	20	5	20
0	I, II	2.611	3.097	2.373	2.894	2.106	2.664
1	I	2.609	3.096	2.334	2.866	2.043	2.647
	II	2.472	2.999	2.228	2.767	2.017	2.581
2	I	2.472	2.993	2.198	2.768	1.936	2.550
	II	2.450	2.980	2.215	2.758	2.003	2.559
simulation		2.187	2.860	2.116	2.673	1.954	2.387

(b) $h_n=0.10$

		0.5		1.0		2.0	
		5	20	5	20	5	20
0	I, II	2.585	3.075	2.372	2.893	2.124	2.680
1	I	2.590	3.076	2.349	2.890	2.064	2.661
	II	2.472	3.001	2.261	2.806	2.071	2.629
2	I	2.484	3.002	2.240	2.802	2.000	2.607
	II	2.468	2.999	2.256	2.799	2.064	2.622
simulation		2.188	2.930	1.956	2.763	1.730	2.617

5. 結 語

本研究で得られた成果を要約すれば、次のように結論することができよう。

1) 本研究で論じた解法により、不規則外力に対する構造物の最大応答の確率分布について、従来より精度の良い近似解を得ることができる。

2) この解法は、応答の継続時間が長いほど良い近似を与えるが、理論値とシミュレーションによる実験値との比較から、定常過程では $r=2$ に対して $\tau/T_0=20$ 程度であれば比較的良好な近似解が得られることがわかった。

3) 本研究の解法により数値計算を行なうに際しては、 $r=1$ に対しては case II に従って t_k を選ぶのが良い。また $r=2$ の場合には case I, II のいずれもほぼ同様の結果を与える。

4) ここに示した数値計算の範囲では、Poisson 過程によって最大応答を処理することによる誤差は無視できない程度に大きい、この誤差は、構造物の減衰が大きくて応答の周期特性が広帯域になるほど、応答レベルが高いほど、また継続時間が長いほど小さくなる傾向にあることが確かめられた。

以上、不規則外力に対する構造物の最大応答の確率分布を求めるための一近似解法を論じた。ここでは応答を定常確率過程とみなせる場合についてのみ数値計算を行なったが、本研究の解法は入力が任意の確率過程である場合に適用できるから、今後地震応答など具体的な問題を対象として、応答の非定常性を考慮した場合についても検討して行きたいと考えている。終りに、本研究における数値計算および不規則応答のシミュレーションは京都大学電子計算機 KDC-II によったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Rosenblueth, E. and Bustamante, J. I. : Distribution of Structural Response to Earthquakes, Proc. ASCE, Vol. 88, EM3, June 1962, pp.75~106.
- 2) Freudenthal, A. M. and Shinozuka, M. : Probability of Structural Failure under Earthquake Acceleration, Trans. JSCE, No.118, June 1965, pp.9~15.
- 3) Shinozuka, M. and Sato, Y. : On the Numerical Simulation of Nonstationary Random Processes, Inst. for the Study of Fatigue and Reliability, Columbia Univ., Tech. Rep., No.31, April 1966, pp.1~44.
- 4) 篠塚正宣・伯野元彦：多自由度系の過渡ランダム振動，土木学会第21回年次学術講演会講演概要，昭. 41. 5, pp.58-1~58-2.
- 5) Davenport, A. G. : The Application of Statistical Concepts to the Wind Loading of Structures, Proc. ICE, Vol.19, 1961, pp.449~472.
- 6) 小松定夫：長大吊橋の耐風設計法と安全性について，土木学会論文集，142号，昭. 42. 6, pp.10~19.
- 7) Goto, H. and Kameda, H. : A Statistical Study of the Maximum Ground Motion in Strong Earthquakes, Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., Vol. 29, Part 4, Oct. 1967, pp.389~419.
- 8) Rice, S.O. : Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes edited by N. Wax, Dover, 1954, pp.133~294.
- 9) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓：電子計算機による耐震設計用人工地震波に関する研究，日本地震工学シンポジウム（1966）講演集，昭. 41. 10, pp.25~30.