

WKB SOLUTIONS FOR MICRODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL POWER SINGULARITIES

東京大学大学院数理科学研究科 千葉 康生 (CHIBA, Yasuo)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1. 問題と主定理

次のような $x=0$ で m 重の変わり点 (turning point) をもち, 大きいパラメータ τ の付随した $\mathbb{R}$ 上の解析的常微分方程式を考える:

$$(1.1) \quad P(x, \partial_x, \tau)u(x, \tau) = \left(\sum_{j=0}^m a_j(x, \tau) \partial_x^{m-j} \right) u(x, \tau) \\ = (\partial_x^m + a_1(x, \tau) \partial_x^{m-1} + a_2(x, \tau) \partial_x^{m-2} + \cdots + a_m(x, \tau)) u(x, \tau) = 0.$$

ここで ∂_x は d/dx を表し, $a_j(x, \tau) = \sum_{k=0}^j a_{jk}(x) \tau^k$, $a_{00}(x) = 1$ であり, 各 $a_{jk}(x)$ ($k = 0, 1, \dots, j; j = 1, \dots, m$) は $x=0$ の近傍で解析的であるとする. また, P の主シンボルは $x=0$ で

$$(1.2) \quad \sigma(P)(x, \xi, \tau) = \prod_{j=1}^m (\xi - \sqrt{-1} x^\lambda \alpha_j(x) \tau)$$

のように分解されている. ここで λ は自然数であり, 各 $\alpha_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) は $x=0$ の近傍で解析的である.

このような方程式に対して, 完全 WKB 解析によって解をつくる方法が盛んに行われているが, ここでは, 超局所解析の方法を用いて解を構成する. すなわち, τ を微分作用素 ∂_t と捉えて,

$$(1.3) \quad P(x, \partial_x, \partial_t)u(x, t) = \left(\sum_{j=0}^m a_j(x, \partial_t) \partial_x^{m-j} \right) u(x, t) \\ = \{ \partial_x^m + a_1(x, \partial_t) \partial_x^{m-1} + a_2(x, \partial_t) \partial_x^{m-2} + \cdots + a_m(x, \partial_t) \} u(x, t) = 0$$

のような偏微分方程式を考える ($\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_t = \partial/\partial t$ である).

この方程式にいくつかの仮定を課す.

仮定 1 (双曲性). 各 $\alpha_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) は x の純虚数値関数であり, $\alpha_j(0)$ は互いに異なる.

仮定 2 (Levi 条件). 各 $k = 0, 1, \dots, j; j = 1, 2, \dots, m$ に対し,

$$(1.4) \quad \partial_x^s a_{jk}(0) = 0, \quad 0 \leq s < k(\lambda + 1) - j.$$

方程式 (1.3) に対して, $\{x \geq 0\}$ における境界値問題の超局所解とは, $\partial_x^k u(+0, t)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) がマイクロ函数となるような $x > 0$ でのマイクロ函数解であり, 我々の目的は, 次の境界値問題のマイクロ函数解 u を構成することである:

$$(1.5) \quad \begin{cases} P(x, \partial_x, \partial_t)u(x, t) = 0, & 0 < x < \varepsilon, |t| < \varepsilon, \\ \text{SS}(u) \cap \{x > 0\} \subset H_j(x, \xi, \tau). \end{cases} \quad (*)$$

ここで, $H_j(x, \xi, \tau)$ は各 $\{\xi - \sqrt{-1}x^\lambda \alpha_j(x)\tau = 0\}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) の陪特性帯である. (*) を満たす解 $u(x, t)$ を各 j に対する (Yamane [Y] による) j -pure 解ということにする. 我々の真の目的は, j -pure 解をなるべく具体的な形で構成し, 特に境界値 $\partial_x^k u(+0, t)$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) を求めることにある.

このような双曲型微分方程式については (変数の数は一般の場合も含めて), Alinhac, Takasaki, Amano-Nakamura 等の研究がある. 中でも, Amano-Nakamura [AN] の方法は我々の研究に近い. この中では $x = 0$ 付近での Cauchy 問題に対して複素常微分方程式の Stokes 現象の深い解析をし, 漸近解を構成している. $m = 2$ の場合には, 本質的には不確定特異点をもつ 2 階の常微分方程式を用いて成功している. しかし, $m \geq 3$ の場合には彼らの方法で具体的に解析することは難しい.

これに対し Yamane [Y] の中では $m = 3, \lambda = 1$ のとき具体例 $((\partial_x - x\partial_t)\partial_x(\partial_x + x\partial_t) + (\text{低階}))$ について分数ベキ変換と量子化 Legendre 変換を用いて解を構成した. さらに, Uchikoshi [U] では, λ が異なるものを含み, かつ $\text{Im}\alpha_j(0) \neq 0$ となり得る場合で Levi 条件も課さないときに, 無限階擬微分作用素を用いて境界値問題の可解性条件を求めた. しかし, 上の j -pure 解の構成は扱っていない.

これらに対し我々は, 一般の m 階の場合に複素微分方程式の Stokes 解析を経由せず, Kataoka [Kt] のプログラムに沿って, 分数ベキ座標変換と量子化 Legendre 変換を用いて解を構成する.

具体的には次のような操作を行い変形する.

まず u を $\text{supp}(u) \subset \{x \geq 0\}$ となる自然な超関数 $\tilde{u}(x, t)$ で代表すると, $x = 0$ の近傍で

$$x^m P\tilde{u}(x, t) = 0$$

の解と同一視できる.

ここで分数ベキ座標変換

$$y = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}$$

を考えると, $\tilde{u}(x, t)$ は

$$Q(y, \partial_y, \partial_t)v(y, t) = 0$$

の解に対応する. ただし, Q は係数が y について正の分数ベキの特異性をもつ偏微分作用素である. また, v は $\{y \geq 0\}$ を台にもつ超関数で代表できるマイクロ函数である.

最後に, $\{\tau > 0\}$ において, (y, t) のマイクロ函数を (w, t) のマイクロ函数に変える量子化 Legendre 変換

$$(1.6) \quad \beta \circ \circ \beta^{-1}: \begin{cases} \partial_y \mapsto -\sqrt{-1}w\partial_t, & \partial_t \mapsto \partial_t, \\ y \mapsto -\sqrt{-1}\partial_w(\partial_t)^{-1}, & t \mapsto t + \partial_w w(\partial_t)^{-1} \end{cases}$$

を行う. このとき, $\beta[v](w, t)$ は w を正則パラメータとし, $\{w \in \mathbb{CP}^1; \text{Im } w < 0\}$ 全体へ解析接続できるマイクロ函数となる. ここで ∂_w の分数ベキが現れるが, $\beta[v](w, t)$ はさらに $w = \infty$ の近傍で

$$\beta[v](w, t) = w^{-1}V(w^{-1/(\lambda+1)}, t)$$

と書けることがわかる. ただし $V(z, t)$ は $z = 0$ で正則な (z, t) のマイクロ函数である. したがって, 無限遠点において, このような表現をもつ, 正則パラメータつきマイクロ函数の大域的切断には, $\partial_w^{1/(\lambda+1)}$ が自然に作用する.

例えば, $w = \infty$ の近傍で, $q = 2, 3, 4, \dots, l, m = 0, 1, 2, \dots$ として,

$$D_w^{m/q}(w^{-1-l/q}f(t)) = e^{m\pi\sqrt{-1}/q} \frac{\Gamma(1+(l+m)/q)}{\Gamma(1+l/q)} w^{-1-(l+m)/q} f(t)$$

となる.

具体的には、分数ベキ座標変換と量子化 Legendre 変換によって作用素 Q は

$$\begin{aligned}\beta \circ Q \circ \beta^{-1} &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^j \frac{a_{jk}^{(s)}(0)}{s!} \{-\sqrt{-1}(\lambda+1)\partial_w \partial_t^{-1}\}^{\frac{s+j}{\lambda+1}} \partial_t^k E_k \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ 0 \leq k \leq (s+j)/(\lambda+1)}} \frac{a_{jk}^{(s)}(0)}{s!} \{-\sqrt{-1}(\lambda+1)\}^{\frac{s+j}{\lambda+1}} \partial_w^{\frac{s+j}{\lambda+1}} \partial_t^{k-\frac{s+j}{\lambda+1}} E_k\end{aligned}$$

と変換される。ここで、 $E_k = \prod_{l=0}^{m-k-1} \{(\lambda+1)\partial_w w - l\}$ であり、2 番目の式は Levi 条件から導かれるものである。特に、 $\beta \circ Q \circ \beta^{-1}$ のうち、 $k = (s+j)/(\lambda+1)$ にあたる項が主導的であり、主導的項の和は次のように ∂_t を含まず、 w の多項式を係数とする m 階常微分作用素となる：

$$L = \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ j/(\lambda+1) \leq k \leq j}} \frac{a_{jk}^{(k(\lambda+1)-j)}(0)}{\{k(\lambda+1)-j\}!} \{-\sqrt{-1}(\lambda+1)\partial_w\}^k E_k.$$

式を簡易な形にするため、

$$\tilde{a}_{jk}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{jk}^l \{-\sqrt{-1}(\lambda+1)\}^{\frac{l+k}{\lambda+1}} x^{k+l-(\lambda+1)j} = \sum_{l'=0}^{\infty} \tilde{a}_{jk}^{l'} x^{l'}$$

(ここで、 $\tilde{a}_{jk}^{l'} = (-\sqrt{-1}(\lambda+1))^{\frac{(\lambda+1)j+l'}{\lambda+1}} a_{jk}^{l'+(\lambda+1)j-k}$ とおいている) とすると

$$\beta \circ Q \circ \beta^{-1} = \sum_{\substack{l' \geq 0 \\ 0 \leq j \leq k \leq m}} \tilde{a}_{jk}^{l'} \partial_w^{\frac{l'}{\lambda+1}+j} \partial_t^{-\frac{l'}{\lambda+1}} E_k$$

であり、主導項 L は

$$L = \sum_{0 \leq k' \leq k \leq m} \tilde{a}_{k'k}^0 \partial_w^{k'} E_k$$

と書ける。特に、 L の最高階の係数は

$$(\text{定数}) \cdot \prod_{j=1}^m (w + \alpha_j(0))$$

となるので、 $w = -\alpha_1(0), -\alpha_2(0), \dots, -\alpha_m(0), \infty$ に確定特異点をもつことがわかる。

仮定 3. 各 $w = -\alpha_j(0)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) での L の特性指数は整数にならない。さらに、 $-\alpha_1(x)$ での特性指数は恒等的に 0 (すなわち、 $a_{mm}(x) = 0$ であり、任意の l, l' に対して $a_{mm}^l \equiv 0, \tilde{a}_{mm}^{l'} \equiv 0$)。

以上の仮定の下で、以下の定理が得られる。

定理 1.1. (1.5) の j -pure 解が構成できる。境界値問題

$$(1.7) \quad \begin{cases} P(x, \partial_x, \partial_t)u(x, t) = 0, \\ u(+0, t) = u_0(t) \end{cases}$$

の mild マイクロ函数解 $u(x, t) \in \mathcal{C}_{\{x=0\} \cup \{x>0\}}^{\circ}$ を考える。ただし、 $u_0(t)$ は点 $(0, 0; 0, \sqrt{-1}\tau)$ でのマイクロ函数とする。このとき、次を満たすような高々 $k/(\lambda+1)$ 階の擬微分作用素 $R_{jk}(\partial_t)$ が存在する：

$$\partial_x^k u(+0, t) = R_{jk}(\partial_t)u_0(t)$$

($j=1,2,\dots,m; k=0,1,2,\dots,m-1$). さらに,

$$\det(\sigma_{k/(\lambda+1)}(R_{jk}(\tau)))_{\substack{j=1,2,\dots,m \\ k=0,1,\dots,m-1}} \neq 0$$

が成り立つ.

ここで $\mathcal{C}$ は mild マイクロ函数のなす層を表す.
定理 1.1 の応用として次の定理も得られる.

定理 1.2. 点 $(0,0;0,\sqrt{-1}\tau)$ において, 偏微分方程式

$$(1.8) \quad P(x, \partial_x, \partial_t)u(x, t) = 0, \quad x > 0$$

の任意の mild マイクロ函数解 $u(x, t) \in \mathcal{C}_{\{x=0\}|\{x \geq 0\}}^\circ$ は, j -pure 解の和に分解できる.

2. 逐次近似法による解の構成法

定理の証明をするために, 量子化 Legendre 変換後の方程式 $(\beta \circ Q \circ \beta^{-1})\beta[v] = 0$ の解を構成しよう.

このとき, マイクロ函数ではなく, 任意のマイクロ函数 $f(t)$ に作用するような, 次の形の擬微分作用素の形式表象解を構成する:

$$(2.1) \quad U(w, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(w) \tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}.$$

ここで $U(w, \tau)$ は, $w = \infty$ で

$$U(w, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j w^{-1-\frac{j}{\lambda+1}} \tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$$

のような形をしている. また, $U(w, \partial_t)f(t)$ は, 境界値をもつような正則パラメータつきマイクロ函数の層 $\mathcal{C}_+^\infty$ の切断となる.

第 1 節でみたように, 我々の考える方程式は次のものである:

$$(2.2) \quad (\beta \circ Q \circ \beta^{-1})U(w, \partial_t) = \sum_{\substack{l' \geq 0 \\ 0 \leq j \leq k \leq m}} \tilde{a}_{jk}^{l'} \partial_w^{\frac{l'}{\lambda+1}+j} \partial_t^{-\frac{l'}{\lambda+1}} E_k U(w, \partial_t) = 0.$$

このとき, 主導項 L は分数階微分も ∂_t を含まない次の形であった:

$$(2.3) \quad L = \sum_{0 \leq k' \leq k \leq m} \tilde{a}_{k'k}^0 \partial_w^{k'} E_k.$$

すると, LU の j 番目の項は,

$$(2.4) \quad (LU)_j = LU_j = \sum_{\substack{0 \leq k' \leq k \leq m \\ j \geq 0}} \tilde{a}_{k'k}^0 \partial_w^{k'} (E_k U_j).$$

であり, 残りの項は,

$$(2.5) \quad \begin{aligned} R(w, \partial_w, \partial_t) &= (\beta \circ Q \circ \beta^{-1})(w, \partial_w, \partial_t) - L(w, \partial_w) \\ &= \sum_{\substack{l' \geq 1 \\ 0 \leq k' \leq k \leq m}} \tilde{a}_{k'k}^{l'} \partial_w^{k'+\frac{l'}{\lambda+1}} \partial_t^{-\frac{l'}{\lambda+1}} E_k \end{aligned}$$

($|\tilde{a}_{k'k}^{l'}| \sim C^{l'+1}$, C は定数) となるから, $(R \circ U)_j$ の j 番目の項は

$$(2.6) \quad (R \circ U)_j = \sum_{\substack{0 \leq k' \leq k \leq m \\ j = j' + l', l' \geq 1}} \tilde{a}_{k'k}^{l'} \partial_w^{k' + \frac{l'}{\lambda+1}} (E_k U_{j'}) \mod \mathcal{O}_{\mathbb{R}_w \times \mathbb{R}_t}^{\mathbb{R}} \cdot \partial_w.$$

と書ける. ここで注意しなければならないのは, R も L と同様 m 階ということである (これは [KtS] の場合と異なる).

そこで, 形式表象 $U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(w) \tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ に対して次のような逐次近似の反復スキームを入れる:

$$(2.7) \quad \begin{cases} LU_0 = 0, \\ LU_{k+1} = -R \circ U_k \tau^{\frac{1}{\lambda+1}} \mod \mathcal{O}_{\mathbb{R}_w \times \mathbb{R}_t}^{\mathbb{R}} \cdot \partial_w \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

これは

$$(2.8) \quad (L + R \circ)U = 0 \mod \mathcal{O}_{\mathbb{R}_w \times \mathbb{R}_t}^{\mathbb{R}} \cdot \partial_w$$

に帰着される.

3. 常微分方程式と PURE 解

この節では, 主導的な方程式 $LU = 0$ あるいはある領域で正則な関数 F に対する常微分方程式 $LU = F$ について考察しよう.

$w = -\alpha_j(0)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) と $w = \infty$ が作用素 L の特異点であった. さらに $Lu = 0$ の解 u は $O(|w|^{-1})$ 程度であるとする.

定義 3.1. 斉次方程式 $Lu = 0$ の解 u が α_j -pure であるとは, 各 $w = -\alpha_l(0)$ ($l \neq j$) に正則に延長できることをいう (u は一般的には $w = -\alpha_j(0)$ で分岐する).

さて, α_j -pure 解に対して, 線型代数の簡単な理論から次の 2 つの定理を得る.

定理 3.2. 斉次方程式 $Lu = 0$ の解 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ で, 各 u_j ($j = 1, 2, \dots, m$) が α_j -pure なものが存在する.

定理 3.3. $w = -\alpha_2(0), -\alpha_3(0), \dots, -\alpha_m(0)$ で正則である $F(w)$ に対して常微分方程式 $L(w, D_w)U(w) = F(w)$ の解 $U(w)$ で, $w = -\alpha_2(0), -\alpha_3(0), \dots, -\alpha_m(0)$ で正則なものが存在する (一意的ではない).

次に, 反復スキーム (2.7) の収束を論じるために, 解空間とそこでの評価式を与えよう. 反復スキームには分数階微分が現れるが, これは Riemann-Liouville 積分で表される非局所作用素なので, 考える空間は大域的なものになる.

十分小さい $\delta_0, \varepsilon > 0$ に対し,

$$(3.1) \quad D_j := \{w \in \mathbb{C}; |w + \alpha_j(0)| \leq \delta_0\} \quad (j = 2, 3, \dots, m),$$

$$(3.2) \quad \Omega^1 := \{w \in \mathbb{C}; w \neq 0, |\arg w| \leq \pi - \varepsilon\}$$

とおく.

無限遠点 $w = \infty$ での方程式の状況を調べるため, $\beta \circ Q \circ \beta^{-1}$ に $z^{-(\lambda+1)}$ と $z^{\lambda+1}$ を施す. すると, $z^{-(\lambda+1)} \circ (\beta \circ Q \circ \beta^{-1}) \circ z^{\lambda+1}$ は z^m で括れることがわかる. つまり, w 空間での方程式

$$(\beta \circ Q \circ \beta^{-1})U(w, \partial_t) = (L + R \circ)U(w, \partial_t) = 0$$

は z 空間では $w = z^{-(\lambda+1)}$ なる変換によって,

$$z^m(M + N \circ)(z, \partial_z, \partial_t)V(z, \partial_t) = 0$$

となることがわかる. ただし $M = z^{-(\lambda+1)}Lz^{\lambda+1}$ であり, N は残りの項である.

そこで十分小さい $\varepsilon_0 > 0$ に対して, 次のような解空間を考える:

$$(3.3) \quad X := \{(F(w), G(z)) \in \mathcal{O}_w(\Omega^1) \times \mathcal{O}_z(B(0; \varepsilon_0^{1/(\lambda+1)}))\} \\ ; wF(w) = G(z) \text{ with } w = z^{-(\lambda+1)}, 0 < |z| < \varepsilon_0^{1/(\lambda+1)}, |\arg z| < \frac{\pi}{2(\lambda+1)}\}.$$

また, その部分空間として次を定める:

$$(3.4) \quad \overset{\circ}{X} := \{(F(w), G(z)) \in X; G^{(l)}(0) = 0, l = 0, 1, 2, \dots, m-1\} \subset X.$$

命題 3.4. $\partial_w, w\partial_w, \partial_w^{l/(\lambda+1)}$ ($l = 1, 2, \dots$) は自然に X の元に作用する.

この節の最後に, 反復スキームの収束を論じるために用いるノルムとその評価式を与えよう.

定義 3.5. $F(w) \in \mathcal{O}_w(\Omega^1)$ および $G(z) \in \mathcal{O}_z(B(0; \delta_0))$ に対して, 次のノルムを定義する:

$$(3.5) \quad \|F\|_k := \max_{0 \leq l \leq k} \sup_{w \in \Omega^1} |\partial_w^l F(w)|,$$

$$(3.6) \quad \|G\|'_k := \max_{0 \leq l \leq k} \sup_{z \in B(0; \delta_0)} |[\partial_w^l]G(z)|.$$

ここで $[\partial_w^k]G(z)$ は $z=0$ の近傍での (つまり, $w = \infty$ の近傍での) $G(z)$ への ∂_w^k の作用を表わす. つまり, $[*]$ はいつも z^m で割った作用を考えている.

定義 3.6. $(F(w), G(z)) \in X$ に対して次のノルムを導入する:

$$(3.7) \quad \|(F, G)\|_k := \max_{0 \leq l \leq k} \left(\sup_{w \in \Omega^1} |\partial_w^l F(w)| + \sup_{z \in B(0; \delta_0)} |[\partial_w^l]G(z)| \right),$$

$$(3.8) \quad \|(F, G)\|_{\mu, m} := \sup_{\substack{0 \leq k \leq m \\ w \in \Omega^1 \\ z \in B(0; \delta_0)}} \left(\frac{|w|}{1+|w|} \right)^{\mu+k-(m-1)_+} (|\partial_w^k F(w)| + |[\partial_w^k]G(z)|).$$

ただし,

$$(m-1)_+ = \begin{cases} m-1, & m \geq 1, \\ 0, & m = 0. \end{cases}$$

さらに, 分数階微分に関して次のノルムを入れる:

$$(3.9) \quad \|(F, G)\|_{l+\frac{\lambda}{\lambda+1}} := \sum_{k=0}^{\lambda} \|\partial_w^{\frac{k}{\lambda+1}}(F, G)\|_l.$$

このノルムは $\sum_{k=0}^{(\lambda+1)l+\lambda} \|\partial_w^{\frac{k}{\lambda+1}}(F, G)\|_0$ と同値である.

注 3.7. G は F によって一意に決まるので, (F, G) の代わりに F のみを使って表わすことがある.

解析接続や Gronwall の補題によって, 以下の補題や命題が得られる.

補題 3.8. 常微分方程式 $LU = F \in \dot{X}$ に対して, 次を満たすような定数 $C > 0$ と $(U, V) \in X$ が存在する:

$$\|(U, V)\|_m \leq C\|(F, G)\|_0.$$

命題 3.9. $\|(F, G)\|_{\frac{\lambda}{\lambda+1}} < \infty$ であるような $(F, G) \in \dot{X}$ に対して常微分方程式 $LU = F$ を考える. このとき, 次の評価式を満たすような定数 C と $(U, V) \in X$ が存在する:

$$\|(U, V)\|_{m+\frac{\lambda}{\lambda+1}} \leq C\|(F, G)\|_{\frac{\lambda}{\lambda+1}}.$$

方程式 $LU = F$ の α_f -pure 解は定理 3.3 でみたように一意ではないが, 以下では上の評価式を満たすような α_f -pure 解を (上手く) 一つに決定する.

補題 3.10. 常微分方程式 $LU = F$ に対し, μ とは無関係な定数 $C > 0$ が存在して次の評価式が満たされる:

$$\|U\|_{\mu, m} \leq C(\|F\|_{\mu, 0} + |U(w_0)|).$$

ただし, $w_0 \in \mathbb{R}$ は十分大きい実数であり, α_f -pure 解を一つに決定する際に用いた数である.

命題 3.11. 次の評価式を満たすような定数 $C > 0$ が存在する:

$$\max\{\|U\|_{\mu, m}, \|V\|'_{0, m}\} \leq C(\max\{\|F\|_{\mu, 0}, \|G\|'_{0}\} + |U(w_0)|).$$

4. 形式ノルムによる逐次近似解の収束性

この節では, 反復スキームによる擬微分作用素解の収束を [BK] 流の形式ノルムによって論じる.

まず, 正則解と非正則解の形式ノルムとして次のようなものを導入する.

定義 4.1. 形式表象 $U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(w) \tau^{-j/(\lambda+1)}$ の各項 $U_j(w)$ が Ω^1 で正則のとき, 形式ノルム $N_{m'}(U, V; T)$ ($m' = 0, 1, 2, \dots$) を次で定義する:

$$(4.1) \quad N_{m'}(U, V; T) := \sum_{j, l} \frac{T^{2j+l}}{(\frac{j+l}{\lambda+1})!} \left\{ \|\partial_w^{\frac{l}{\lambda+1}} U_j(w)\|_{m'} + \|[\partial_w^{\frac{l}{\lambda+1}}] V_j(z)\|'_{m'} \right\}.$$

ただし, $U_j(w)$ と $V_j(z)$ の間には $V_j(z) = wU_j(w)$ の関係があり, $(\frac{j+l}{\lambda+1})! = \Gamma(\frac{j+l}{\lambda+1} + 1)$ とする. 同様に, 形式ノルム $N_{m'}^{\mu}(U, V; T)$ ($m' = 0, 1, 2, \dots$) を次で定義する:

$$(4.2) \quad N_{m'}^{\mu}(U, V; T) := \sum_{j, l} \frac{T^{2j+l}}{(\frac{j+l}{\lambda+1})!} \left\{ \|\partial_w^{\frac{l}{\lambda+1}} U_j(w)\|_{\mu+\frac{j+l}{\lambda+1}, m'} + \|[\partial_w^{\frac{l}{\lambda+1}}] V_j(z)\|'_{m'} \right\}.$$

これらの形式ノルムを入れることで、反復スキームによる逐次近似解が収束することがわかる。

定理 4.2 (正則型). $U_0 \equiv U_{00}$ を Ω^1 での $LU_0 = 0$ の解とする. 各 $U_k = \sum_{j=-\infty}^0 U_{jk}$ が

$$\partial_w^l U_k|_{w=0} = 0 \quad (l=0, 1, 2, \dots, m-2; k \geq 1)$$

であるような反復スキームを満たす形式表象 U_k ($k=1, 2, \dots$) を構成する. このとき $U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k$ は $N_m(U, V; T)$ -ノルムに関して一様収束し、擬微分方程式

$$(L + R \circ) U = 0$$

の WKB 解である.

証明の方針のみを示す. 正則解の場合, w についての有界領域と $w = \infty$ の近傍に分けて考え, $w = \infty$ の近傍では $z = w^{-(\lambda+1)}$ なる変換を用いて, 反復スキームを評価する. 具体的には, 以下の命題によって上の定理が得られる.

命題 4.3. 常微分方程式 $LU = F$ において, $F = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(w) \tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ および $U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(w) \tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ の各成分 F_j および U_j は Ω^1 で正則であるとする. このとき, 次を満たすような T の収束ベキ級数 $\Phi(T)$ で, その係数は F と U に無関係なものが存在する:

$$N_m(U, V; T) \ll \Phi(T) N_0(F, G; T).$$

命題 4.4. 次の評価を満たすような T の関数 $\phi_1(T)$ が存在する. ただし, $\phi_1(0) = 0$ である.

$U = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(w) \tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ および $V = \sum_{j=0}^{\infty} V_j(w) \tau^{-\frac{j}{\lambda+1}}$ の各項 $U_j(w), V_j(w)$ が Ω^1 で正則であるとき,

$$N_0(R \circ U, N \circ V; T) \ll \phi_1(T) N_m(U, V; T).$$

この 2 つの評価式から

$$\begin{aligned} & N_m(U_{k+1}, V_{k+1}; T) \\ & \ll \Phi(T) N_0(R \circ U_k, N \circ V_k; T) \\ & \ll \Phi(T) \phi_1(T) N_m(U_k, V_k; T) \\ & \ll \dots \ll \{\Phi(T) \phi_1(T)\}^{k+1} N_m(U_0, V_0; T) \end{aligned}$$

となり, 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} N_m(U_k, V_k; T)$ が

$$(1 - \Phi(T) \phi_1(T))^{-1} N_m(U_0, V_0; T)$$

に収束することがわかり, 正則型の擬微分作用素解 $U(w, \tau)$ の収束が言える.

非正則解についても証明の方針は同様である.

5. 主定理の証明と F -MILD マイクロ関数

主定理の証明の方針は以下の通りである. まず, 量子化 Legendre 変換に関して,

$$\begin{aligned}\beta(f(t)\delta(y)) &= \frac{1}{2\pi}\partial_t f(t), \\ \beta \circ \partial_y \circ \beta^{-1} &= -\sqrt{-1}w\partial_t,\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\mathcal{C}_{\{x=0\}}^{\circ} \ni u(x,t) \mapsto u(+0,t) \in \mathcal{C}_{\{x=0\}}$$

は, 次の対応で表現される:

$$\begin{aligned}\beta(u(+0,t) \frac{y_+^{\frac{k}{\lambda+1}}}{\Gamma(\frac{k}{\lambda+1}+1)}) &= \beta(u(+0,t) \partial_y^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)} \delta(y)) \\ &= \beta \circ \partial_y^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)} \circ \beta^{-1} \circ \beta(u(+0,t) \delta(y)) \\ &= (-\sqrt{-1}w\partial_t)^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)} \cdot \frac{1}{2\pi} \partial_t u(+0,t).\end{aligned}$$

$y = x^{\lambda+1}/(\lambda+1)$ であったから,

$$\beta(u(+0,t) \frac{(\lambda+1)^{-\frac{k}{\lambda+1}}}{\Gamma(\frac{k}{\lambda+1}+1)} (x_+)^k) = \frac{1}{2\pi} (-\sqrt{-1})^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)} w^{-(\frac{k}{\lambda+1}+1)} \partial_t^{-\frac{k}{\lambda+1}} u(+0,t)$$

であり, 境界値 $\partial_x^k u(+0,t)$ ($k=0,1,\dots,m-1$) が $w^{-1-\frac{k}{\lambda+1}}$ の係数によって与えられることがわかる.

また, j -pure 解の分解については, 常微分方程式に関する考察からわかる (詳細略).

最後に, 量子化 Legendre 変換前後の mild マイクロ関数解の対応について簡単に述べる.

分数ベキ座標変換をしているので, mild マイクロ関数といっても, 分数ベキの特異性をもつような F -mild マイクロ関数を考えなければならない. しかし, x 変数について $1/(\lambda+1)$ F -mild マイクロ関数というものが定義できて, 分数ベキ座標変換と量子化 Legendre 変換後のマイクロ関数とを対応づけできる. このことについては, 本研究集会での片岡清臣氏の講演の通りである.

REFERENCES

- [AN] Amano, K. and Nakamura, G., *Branching of singularities for degenerate hyperbolic operators*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **20**, pp. 225–275 (1984).
- [BK] Boutet de Monvel, L. and Krée, P., *Pseudo-differential operators and Gevrey classes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **17**, pp. 295–323 (1967).
- [Kt] Kataoka, K., *Microlocal analysis of boundary value problems with regular or fractional power singularities*, Structure of solutions of differential equations (Katata/Kyoto, 1995), pp. 215–225, World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1996).
- [KtS] Kataoka, K. and Sato, Y., *Formal symbol type solutions of Fuchsian microdifferential equations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **9**, pp. 565–626 (2002).
- [O] Oaku, T., *Microlocal boundary value problem for Fuchsian operators. I. F -mild microfunctions and uniqueness theorem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **32**, pp. 287–317 (1985).
- [U] Uchikoshi, K., *Cauchy problems for mixed-type operators*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36**, pp. 191–230 (2000).
- [Y] Yamane, H., *Branching of singularities for some second or third order microhyperbolic operators*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **2**, pp. 671–749 (1995).