

3 体歯車系の運動と滑り

東京大学 大学院理学系研究科 栗津暁紀*

3つの歯車が存在し、各々が別の二つと常に接触しているような状況において、何れかの歯車にトルクをかける。すると残り2つの歯車に相反する方向へのトルクがかかった、フラストレートした状況が実現する。この場合、もしこれらの歯車が硬く頑丈にできているならば、それらは（歯を壊さない限り）動くことはできない。ではこれらの歯車が柔らかく、いくらか変形が可能である場合は、どうであろうか？本小文ではそれを問う。

生体内には分子機械と呼ばれる多種多様な蛋白が存在し、それらによって様々な機能、エネルギーや情報の伝達、変換、貯蓄（記憶）や識別等が行われている。しかしこれらの”機械”は、環境の熱揺らぎ等の影響を大いに受けてしまうほど小さく、また我々にとってより日常的なマクロな機械と比べ、考えられないほど柔らかく不定形なものである事が知られている。よって本当に十分な機能を実現できるのか？と疑いたくもなる。しかし実際分子機械は、非常に効率的に働いていることが知られている。つまり、どうやらそのような柔らかい機械の動作原理は、マクロな機械の動作原理と大きく異なっており、マクロな機械での知見はあまり参考にならないようである。

ではそのような柔らかい機械は、マクロな硬い材質の機械と比べ、どのような動作（運動）特性の違いがあり、またどのような機能が可能（不可能）であるのか。このような疑問を頭に浮かべつつ、今回、マクロな硬い機械が動作するには明らかに不都合があるような状況を設定し、その状況における柔らかい機械の動作を眺めていく。機械といってすぐ想像されるもの

が、幾つかの歯車の連結物であるという人は少なくないだろう¹。そこで以下に述べるような多体モデル歯車系を用い、上記の問を考える。そのことにより、（マクロな）硬い機械と（ミクロな）柔らかい機械との間にある論理の違いを浮き彫りにしていく。

理想的なモデル歯車系として図1のように、正三角形（一辺 $L=3$ ）のいずれかの頂点を根元とし、先端に斥力相互作用をする粒子を一つ持つ剛体棒（長さ1）の集団を考える。各棒の先端にいる粒子の運動は以下の方程式に従う。

$$\ddot{\vec{r}}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_{ij}} \left[\sum_{i' \neq i \text{ or } j' \neq j} C_{jj'}^{ii'} V(|\vec{r}_{ij} - \vec{r}_{i'j'}|) \right] \quad (1)$$

$$V(r) = 1/r \quad (2)$$

ここで i, i' は三角形の頂点の番号、 j, j' は各頂点に属する粒子の番号とする²。今回は $C_{jj'}^{ii'}$ を $C_{jj'}^{ii'} = A$ ($i = i'$)、 $C_{jj'}^{ii'} = 1$ ($i \neq i'$)と置く。この系では、同じ頂点を根元として共有する棒の集団が一つの歯車とみなされ（よって i は歯車の番号を示すことになる。）、粒子間相互作用及び粒子の運動が、歯車間相互作用及び歯車の運動となる³。また更にパラメーター A を変えることで、個々の歯車の硬さを連続的に変化させることができる。

このような玩具モデル歯車系について、歯車の硬さを調整しながら、外部から掛けられたトルクに対する動作を眺めていく。本小文以下では、特に1歯車当り4つの棒からなる系（図1）において、そのうちの一つの歯車にトルクを掛けたときにみられる系の動作を、簡単に紹

¹ チャップリン「モダンタイムス」等

² 棒の長さが固定されているので、各粒子の運動は位相のみで記述できる

³ 棒の先端に磁石がはめ込まれたこのような玩具が、実際に市販されている。

*E-mail: awa@complex.c.u-tokyo.ac.jp

介する。この場合、残り2つの歯車に相反する方向へのトルクが働く、フラストレートした状況が実現する。紙面の都合上、硬い系と柔らかい系との違いが明快に見て取れる、ある状況における一例のみの結果を示すが、ここで見られる動作の傾向は、広く普遍的に現れる。

図2は歯車1（図1のGear 1）に時計回りの向きのトルクをかけた時の、歯車1、歯車2、歯車3の平均角速度を、(a) $A = 100$ 、(b) $A = 8$ 、(c) $A = 2^{1.5}$ 、(d) $A = 2$ の場合について示したものである。ここで角速度は時計回りの向きを正にとった。今回のモデルでは、歯車間の相互作用が先端粒子間の斥力によって生じている。よって歯車が実際にかみ合っている場合と異なり、硬い歯車でも十分強いトルクがかかった場合には、回転運動が生じる（図2 (a)）。しかし、歯車が柔らかくなるにつれ、系の運動の特徴は次のように大きく変化していく。

I) 十分硬い歯車（図2 (a) $A = 100$ ）: トルクがある閾値を超えた時、歯車1のみ回転する。
II) やや硬い歯車（図2 (b) $A = 8$ ）: トルクがある閾値を超えると歯車1が回転し、またその回転により歯車3も回転する。
III) やや柔らかい歯車（図2 (c) $A = 2^{1.5}$ ）: トルクがある閾値を超えると歯車1のみが回転する。
IV) 柔らかい歯車（図2 (d) $A = 2$ ）: トルクがある閾値を超えると歯車1が回転し、またその回転により、歯車2も回転する。

このように、同じような設計思想であっても、硬い機械と柔らかい機械では大きく異なる動作が実現する⁴。

本小文では、4つの歯からなる歯車が正三角形の各頂点に存在する場合について、その動作の一例を述べた。このような「柔らかさ」の変化に対する動作特性の変化は、他の設定においても明確に、また設定に応じて様々な形で現れる。例えば歯車の中心間の距離を縮めた場合

⁴ 生体高分子の物性（硬さ等）は、低分子やイオン等の修飾によって大きく変化する。この事と今回得られた事実が、環境（物質濃度場）変化に対する生体分子の、多様な応答変化を可能にさせているのでは、とも考えられる。

や、歯車を1次元的に並べた場合では、かけられたトルクの変化に対する応答に、系の運動の履歴依存性等も現れる⁵。

この系は非常に簡単な玩具でありながら、運動のための閾値の存在（ビンガム性）やフラストレーション⁶を自然な形で内包している⁷。このことから、このての玩具遊びも、ソフトマター系、生体系の様々な側面の理解に対し、一つの道を広げているのでは、と考えている。

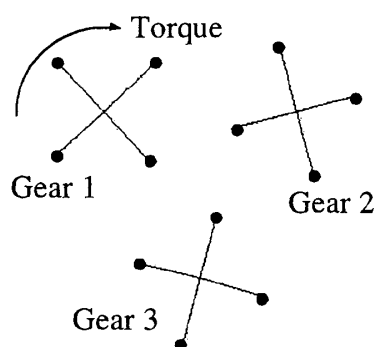


図1: 玩具歯車系

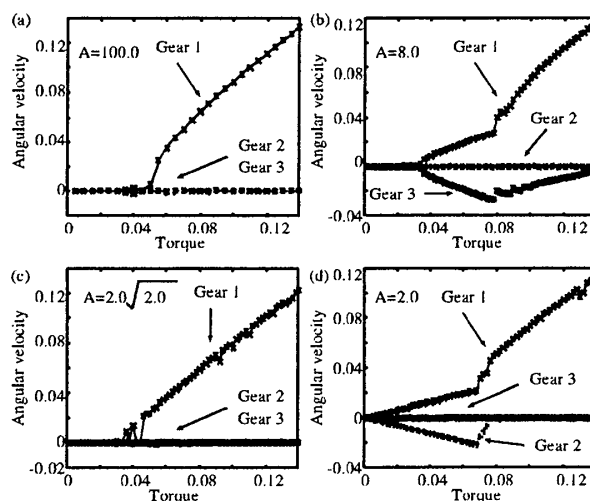


図2: トルク - 角速度 関係

⁵ 研究会では議論いたします。

⁶ 現実の物質系では、高分子の絡み合い、電荷分布の非一様性、分子の形の異方性などが主な原因であろう。

⁷ この2つが複雑なレオロジー特性、非線形な粘弾性や遅い緩和を引き起こす原因であり、ソフトマター系の動力学における最も重要かつ基本的な性質であろう。