

衝撃波の水中への伝播の問題に対する 発展方程式の応用

東京電機大 理工 桜井 明 新井 勉
菅野 敬祐

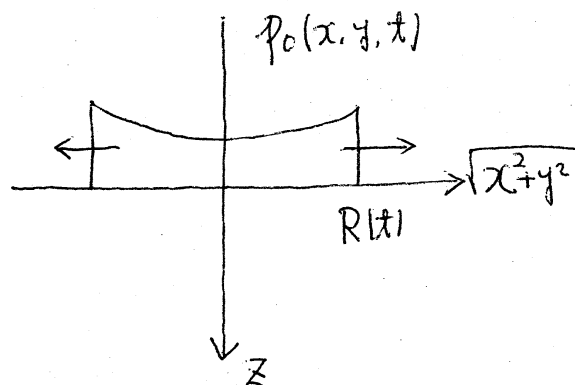
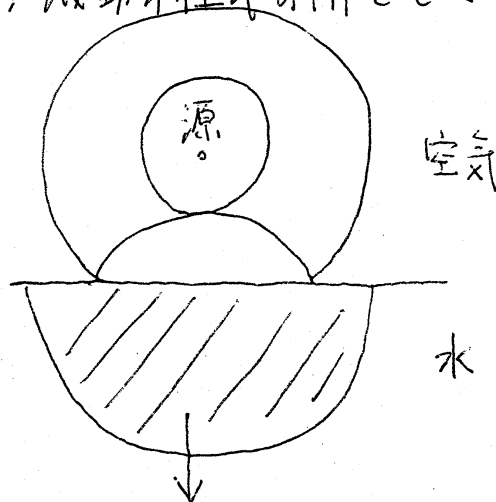
(Sakurai Akira, Arai Tsutomu, Sugano Kēisuke)

§1. 序

水面上空に置かれた点源(あるいは線源)から発生する球面(あるいは円柱面)衝撃波が水面に達すると、その一部は反射し、残りは水中に伝播する。この時、源の強さが弱い、あるいは源が充分高いところにあると、その反射、伝播は、ともに音波として線型理論で扱える。ところが、源が強いと、その水面での反射の様相は非線型性を持ち、これを完全に取らぬことがむづかしい。しかし、この時でも、水中に伝播する波は、大体において音波で近似でき、さらに、波のエネルギーの大部分が反射されるので、水面における圧力は殆んど球面(円柱面)衝撃波の剛体面での反射圧に等しくなっている。

そこで、この現象をモデル化し、水面上($z=0$)での圧力が境界条件として図のような $p_0(x, y, t)$ (x, y, z : 位置, t : 時間) で与えられるものとし、静水中に生起する圧力 $p(x, y, z, t)$

エ、波動方程式の解として求める問題とする：



問題

$$(1) \begin{cases} \square p = 0 & \square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \Delta \\ p(x, y, z, 0) = p'(x, y, z, 0) = 0 & ' = \frac{\partial}{\partial t} \\ p(x, y, 0, t) = p_0(x, y, t) \end{cases}$$

この時、圧力 $p_0(x, y, t)$ が滑らかな関数であれば、古典的な解が存在し、それは例へば強度 p_0 の doublet が分布しているとして、

$$p(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint p_0(x', y', t') \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\beta} dx' dy'$$

$$\beta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}, \quad t' = t - \beta$$

とあらわせる。しかし現在の問題では、 p_0 は上図のように $\sqrt{x^2 + y^2} = R(t)$ で不連続となるので、上のような古典解の公式をそのまま用いる事は出来ない。事実、この公式を使っ

形式的に計算すると、圧力 p の不連続面や、そこでの微分などがあらわれ、このような場所での様相を詳しく解析する事が出来ない。これ以外の場所においては、1)の結果は物理的には妥当であると考えられるが、しかしそれも明らかな事ではない。

そこで本講では、上記の問題を数学的な観点から考える事にする。すなわち、古典解の概念の拡張である広義解を定義し、その一意的存在を証明する。さらに、広義解のもつ、いくつかの物理的な性質を調べる。広義解の存在は、まずデータを滑らかな関数で近似し、それらに対応する近似解(古典的)をつくり、次に近似解の極限をとる事によって示される。その際、抽象的な発展方程式の理論を応用すると、以上の手順が、見通しよく遂行される。

§2. 広義解

簡単のために空間次元を2とし(円柱面の場合。議論は球面あるいは一般 n 次元でも全く同様に行える)、 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ とおく。 $\partial\Omega$ で Ω の境界をあらわす。(1)を、もう少し一般化し、次のような問題を考えよう:

$$(2) \quad \begin{cases} \square p = f(t, x, y) & t > 0 \quad (x, y) \in \Omega \\ p(0, x, y) = u_0(x, y), \quad p'(0, x, y) = u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega \end{cases}$$

3

$\begin{cases} p(t, x, 0) = p_0(t, x), & t > 0, x \in \mathbb{R}. \\ \end{cases}$
 $\text{ここで } f(t, x, y), u_0(x, y), u_1(x, y), p_0(t, x) \text{ は 与えられた関数である。}$

広義解を定義するために、いくつかの関数空間を導入しよう。

$$L^2(\Omega) = \{ \Omega \text{ 上で 2 乗可積分な関数の全体} \}$$

$$H^2(\Omega) = \{ \text{2 階までの偏導関数が全て } L^2(\Omega) \text{ に属する } \}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{ u \in \mathcal{D}' \mid (1+|\tau|)^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\tau) \in L^2(\mathbb{R}), \hat{} \text{ は Fourier 変換} \}$$

これらはみな Hilbert 空間になり、さらに

$$H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega) \text{ の 共役空間,}$$

$$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \text{ の 共役空間}$$

とし、

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ u \in C^\infty(\Omega) \mid u \text{ の 台は } \Omega \text{ 内のコンパクト集合} \}$$

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \text{ の 共役空間 } (\equiv \text{Schwartz の 超関数の空間})$$

とする。 Hilbert 空間 L^2 に、その共役空間と同一視すれば
 これらの空間の間の関係は

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega) \subset H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

のようになり，という。 $(\cdot, \cdot)$ で共役対 (あるいは L^2 -内積) を表わすものとする。 Banach 空間 X に対し

$$L^2(0, T; X) = \{u: [0, T] \ni t \mapsto u(t) \in X \mid \int_0^T \|u(t)\|^2 dt < \infty\}$$

とする。これも Banach 空間になり，例へば $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ の共役空間は $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ である。

さて，問題 (2) において，データ f, u_0, u_1, φ_0 は次の仮定を満すものとしよう。

仮定 I (i) $f \in L^2(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$

(ii) $u_0, u_1 \in H^{-1}(\Omega)$

(iii) $\varphi_0 \in L^2(0, \infty; H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ 。

注意 関数は時間 t を変数にもち，適当な空間に値をもつベクトル値関数とみなす。

以上のもとに，問題 (2) の広義解を次のように定義しよう。

定義 超関数 $\varphi(t, x, y)$ が以下の (i)(ii) を満足する時， φ を問題 (2) の広義解と言う。

(i) 任意の $T > 0$ に対し， $\varphi \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$,

(ii) 積分等式:

$$(3) \quad \int_0^T (p, \square v) dt = \int_0^T (f, v) dt + (u_1, v(0)) \\ - (u_0, v'(0)) - \int_0^T (p_0, \frac{\partial v}{\partial y}(t, x, 0)) dt$$

が、任意の $v \in \mathcal{D}^*$ に対し成立する。ただし

$$\mathcal{D}^* = \{ v(t, x, y) \mid v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)) \\ \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)) \\ \square v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ v(T) = v'(T) = 0 \}$$

である。

注意(1) テータが滑らかで、 p が(2)の古典解(または L^2 の意味での強解)ならば、 p は広義解でもある。この事は(2)にひもかけ、Greenの公式を用いて部分積分してみればすぐに確かめられる。

注意(2) 広義解 p は超関数の意味で波動方程式を満足する:
 $\square p = 0$ in $\mathcal{D}'([0, T] \times \Omega)$ 。実際定義式(3)で $v \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$ とすれば、右辺=0となるから。

このような広義解の存在に関して、次の定理が成立する。

定理1 仮定Iのもとで, 問題(2)の広義解が, ただ一つ存在する。

証明の概略 まず, データ u_0, u_1, p_0, f に対し, 関数列 $u_{0m}, u_{1m} \in \mathcal{D}(\Omega), p_{0m} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}), f_m \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$ ($m=1, 2, \dots$) を

$$(4) \quad \begin{cases} u_{0m} \longrightarrow u_0, & u_{1m} \longrightarrow u_1 & \text{in } H^{-1}(\Omega), \\ p_{0m} \longrightarrow p_0 & & \text{in } L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega)), \\ f_m \longrightarrow f & & \text{in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ as } m \rightarrow \infty \end{cases}$$

のようにならぶ。

このように, 滑らかなデータに対し, 波動方程式の初期値境界値問題(2)が, 古典解を持つ事は, 例へば半群理論等を用いると, それほど難しくなく証明できる。この解を w_m としよう。(w_m は広義解にもなっている事に注意)。

この近似解 w_m が, $m \rightarrow \infty$ の時に, ある超関数 w に収束する事, そして w が所望の広義解である事, を証明するのであるが, その為には次の補題が必要となる。

補題1. 初期値, 境界値問題:

$$(5) \quad \begin{cases} \square v = g(t, x, y) & 0 \leq t \leq T, (x, y) \in \Omega \\ v(T) = v'(T) = 0 & (x, y) \in \Omega \end{cases}$$

$$|v|_{\partial\Omega} = 0$$

の解を v_q とかく。もし非斉次項 q が $q \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ならば, $v_q \in \mathcal{D}^*$ である。

この補題の証明は節末にあげる。

さて, まず $p_n \rightarrow \exists p$ ($n \rightarrow \infty$) in $\mathcal{D}'(I_0, T; \Omega)$ である事を示そう。 p_n は滑らかな解であるから, 広義解でもあり従って, 時々 $u_{0n}, u_{1n}, p_{0n}, f_n$ に対し等式(3)を満足している。さらに, 任意の $q \in \mathcal{D}(I_0, T; \Omega) (\subset L^2(0, T; H_0^1(\Omega)))$ に対し, (5)の解 v_q は $\mathcal{D}^*$ に属しているから, 等式(3)で v の代りに v_q を代入すれば,

$$\begin{aligned} \int_0^T (p_n, q) dt &= \int_0^T (f_n, v_q) dt + (u_{1n}, v_q(0)) \\ &\quad - (u_{0n}, v_q'(0)) - \int_0^T (p_{0n}, \frac{\partial v_q}{\partial y}) dt \end{aligned}$$

となる。

ここで $v_q \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $v_q(0), v_q'(0) \in H_0^1(\Omega)$, $\frac{\partial v_q}{\partial y}|_{\partial\Omega} \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ なる事, 及び収束(4)に注意すれば, 上式の右辺が $n \rightarrow \infty$ で収束する事がわかる。超関数の空間は弱完備であるから, 二ゆえり p_n は, ある p に超関数の意味で収束する事になる。

次に, 列 $\{p_n\}$ が $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ で有界なる事を示そう。

任意の $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ に対し, 再び (5) の解 $v_\varphi \in \mathcal{D}^*$ を考える。これを広義解の定義式 (3) に代入, さらにトレースの定理: $\|\frac{\partial v_\varphi}{\partial \nu}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|v_\varphi\|_{H^2(\Omega)}$ ($v_\varphi \in H^2(\Omega)$) を用いて右辺を評価すれば,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (p_n, \varphi) dt \right| &\leq \|f_n\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \|v_\varphi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ &\quad + \|u_{1n}\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v_{\varphi(0)}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_{0n}\|_{H^1(\Omega)} \|v_{\varphi'(0)}\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\quad + C \|p_{0n}\|_{L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega))} \|v_\varphi\|_{L^2(0, T; H^2(\Omega))} \end{aligned}$$

となる。ところで (4) より, $\|f_n\|, \|u_{1n}\|, \|u_{0n}\|, \|p_{0n}\|$ は n にかかわらず有界であり, また $v_\varphi \in \mathcal{D}^*$ であるから結局

$$\left| \int_0^T (p_n, \varphi) dt \right| \leq C(\varphi) \quad (< \infty)$$

なる評価が得られる。ここは $C(\varphi)$ は n によらず, φ に依存して決まる定数である。 $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ が $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ の共役空間である事, 及びよく知られた一様有界性定理より, 上式から $\|p_n\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}$ が n によらず有界なる事が結論される。

さて $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ の有界列は $*$ -弱位相に関してコン

バクトであるから, $\{p_n\}$ の部分列で w^* -弱収束するものがある。これを $p_{n_k} \longrightarrow \tilde{p}$ weakly star in $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ とすれば, 勿論 $p_{n_k} \longrightarrow \tilde{p}$ in $\mathcal{D}'$ でもある。ところで, $p_n \longrightarrow p$ in $\mathcal{D}'$ はすでに分っているから, $\tilde{p} = p$ ではない。またこの極限は, 部分列のとり方により一意であるから, 結局 $p_n \longrightarrow p$ w^* in $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ という事になる。

以上をふまえて, p_n に対する等式(3)において $n \rightarrow \infty$ とすれば $p \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ が等式(3)を満足する事になり, p は問題(2)の広義解である事が示される。

次に, 同じデータに対し広義解が2つ以上あるとし, それ等の中から勝手に p, q をえらぶ。すると等式(3)から

$$\int_0^T (p - q, \square v) dt = 0 \quad \text{for } \forall v \in \mathcal{D}^*$$

となる。これから任意の $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ に対し

$$\int_0^T (p - q, \varphi) dt = 0$$

が従う。 $p = q$ in $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ となり, 広義解の一意性が示された。

定理1の証明終り。

さて、現実の問題(1)に戻ろう。ここでは、データに関し
仮定 I よりも強い条件(以下の仮定 II)が成立している。

仮定 II (i) $f = 0$, (ii) $u_0, u_1 = 0$

(iii) $\varphi_0 \in L^2(0, \infty) \times \mathbb{R}$ であり、次のような関数 $R(t) \in C^2(0, \infty)$ が存在する: $R(0) = 0$, $R(\infty) = \infty$, $dR/dt > 0$, $d^2R/dt^2 < 0$, $\frac{dR}{dt} \rightarrow \begin{cases} \infty & t \rightarrow 0 \\ k & t \rightarrow \infty \end{cases}$ ($k \in (0, 1)$ は定数) で $\varphi_0(t, x)$ の台は 集合 $\{(t, x) \mid |x| \leq R(t)\}$ に含まれる。 $t_0 \in dR(t_0)/dt = 1$ なる点とする。

この時、 φ の伝播について次の定理が成立する。

定理 2 仮定 II が成り立っているとする。 φ を問題(2)の
広義解とする。すると、超関数として $]0, T[\times \Omega \setminus C$ 上で
 $\varphi = 0$ である。ただし $C = \{(t, x, y) \in]0, T[\times \Omega \mid \sqrt{x^2 + y^2} < t + R(t_0) - t_0\}$ 。

証明の概略 $\varphi \in \mathcal{D}'(]0, T[\times \Omega)$, φ の台 $\subset C$ なる φ_1
対し, $\int_0^T (\varphi, \varphi_1) dt = 0$ を示せばよい。これには次の命
題が必要。

補題2 $\varphi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$, φ の台 $\subset C$ とする。

この時, 問題(5)の解 v_φ は $v_\varphi = 0$ ($[0, T] \times \Omega \setminus C$) となる。

補題2の証明は, (5)に v' をかけ, Gaussの発散定理を用いて評価する事によ, となさる。

さて, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し, φ_m の台 $\subset \{(t, x) \mid |x| \leq R(t) + \varepsilon\}$ とする。補題2により, 台が C に含まれる $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し, v_φ を考える事より, 等式(3)から $\int_0^T (\varphi_m, \varphi) dt = 0$ が導かれる。ここで $m \rightarrow \infty$ とすればよい。

定理2の証明終り。

最後に補題1の証明の指針を述べよう。時間を逆転すればよいから(5)の代りに

$$(b) \quad \begin{cases} \square v = \varphi(t, x, y) \in L^2(0, T; H_0^1) & 0 < t < T, (x, y) \in \Omega \\ v(0) = v'(0) = 0 & (x, y) \in \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

を考える。列 $\varphi_m \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$ を $\varphi_m \rightarrow \varphi$ in $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ にとる。非斉次項 φ_m に対する(6)の解を v_m とする。発展方程式の解の正則性の理論を用いれば, 例へば

$$\begin{cases} v_m \in C^2([0, T]; H^2 \cap H_0^1) \\ v_m' \in C^1([0, T]; H_0^1) \end{cases}$$

$$\{\Delta v_n' \in C([0, T]; H_0^1)\}$$

等を示し得る。この近似解に対し以下の様な a priori estimates を証明出来る。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & v_n \text{ に対する方程式 (6) に } v_n' \text{ をかけて積分する事により,} \\ & \|v_n(t)\|_{L^2(\Omega)}, \|v_n'(t)\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla v_n(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C(T) \|q_n\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

ただし $C(T)$ は T によりのみ依存する定数。

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & \text{同じく (6) に } -\Delta v_n' \text{ をかけて積分する事により,} \\ & \|\nabla v_n'(t)\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta v_n\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C(T) \|q_n\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

こゝらの評価式を用いて、さらに $q_n \rightarrow q$ を使えば v_n が (6) の解 v に収束し、 $v \in \mathcal{D}^*$ である事が得られる。

参考文献

- 1) 桜井 明: 多媒質中の衝撃波, 日本物理学会誌 29巻 10号 (1974)
- 2) 溝畑 茂: 偏微分方程式論, 岩波書店 (1965)